ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Optique. Recherches d'analise sur les caustiques planes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 345-358
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__345_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1824-1825, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

OPTIQUE.

Recherches d'analise sur les caustiques planes ;

Par M. GERGONNE.

LES travaux des Bernouilli, de la Hire et de l'Hopital sur les caustiques semblaient en avoir épuisé la théorie, et elles étaient, en effet, tombées dans une sorte d'oubli, depuis près d'un siècle, lorsque les belles recherches de Malus ramenèrent, à l'envi, l'attention des géomètres vers ces courbes qui jouent un rôle si important dans les phénomènes de la vision, dont la génération est si facile à concevoir, et qui pourtant se montrent quelquefois si réfractaires à l'action du calcul.

Déjà Petit avait donné, dans le II.e volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique* (pag. 354), une méthode très-élégante pour construire par points la caustique, soit par réflexion soit par réfraction, relative au cercle, et par suite à la sphère, lorsque, dans le V.e volume du présent recueil (pag. 283), je m'occupai de ramener à la théorie des caustiques de phénomène des images multiples, auquel donne naissance une glace étamée ou non étamée, à faces parallèles. J'insinuai dès lors (pag. 289), qu'il se pourrait bien que *les caustiques*, d'une figure si compliquée pour l'ordinaire, ne fussent que les *développées d'autres courbes beaucoup plus simples*. Dans le XI.e volume (pag. 229), je déterminai la nature de la caustique formée par les rayons émanés de l'un des points d'un milieu homogène, après avoir péné-

tré dans un autre milieu homogène, séparé de celui-là par un plan, et je prouvai que cette caustique était, dans tous les cas, la développée d'une section conique. Revenant ensuite de nouveau, dans le XIV.e volume (pag. 1), sur les lentilles planes, à faces parallèles, je prouvai, contre l'opinion commune, et toujours par la considération des caustiques, que ces sortes de lentilles partagent avec les lentilles convexes la faculté amplificative.

Dans le même temps M. Dupin venait de faire paraître ses *Applications de géométrie*, dans lesquelles il donnait une extension importante à la théorie dont Malus avait posé les premières bases; je prouvai, à ce sujet, dans le même volume (pag. 129), que la recherche de la caustique produite par un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, à la rencontre de surfaces quelconques, pouvait toujours être réduite à celle de la caustique produite soit par la réflexion soit par la réfraction, à la rencontre d'une surface unique, ou encore à la recherche de la développée d'une surface déterminée.

J'étais, depuis quelque temps, en possession de l'équation de la caustique par réflexion sur le cercle, et par suite sur la sphère, qui n'avait encore été donnée par personne; mais je l'avais obtenu par des calculs trop prolixes et sous une forme trop peu élégante pour songer à la publier, lorsque j'appris, par les journaux, que M. le professeur Auguste de Larive, de Genève, venait de publier un mémoire dans lequel, disait-on, il s'occupait de la recherche de cette même caustique, non seulement pour le cas de la réflexion, mais pour le cas, incomparablement plus difficile, de la réfraction, lequel renferme l'autre, comme cas particulier. Quelle que fût mon impatience de connaître le mémoire de M. de Larive, il ne me parvint qu'assez tard. Je me hâtai de le parcourir, j'y rencontrai beaucoup de choses fort intéressantes; mais je n'y trouvai point l'équation annoncée. Rebuté sans doute par la complication des calculs, l'auteur avait pris le parti de recourir à des approximations, ressource très-utile sans doute pour les applications

pratiques, mais dont l'emploi laissait tout à fait entière la question spéculative que j'avais en vue.

C'est fort peu de temps après que m'est parvenu le mémoire de M. Sturm, inséré dans le présent volume (pag. 205), et dans lequel il démontre que *la caustique, soit par réfraction soit par réflexion, relative au cercle, est constamment la développée d'une courbe telle que la somme ou la différence des produits qu'on obtient en multipliant les distances de ses points au point rayonnant et à son conjugué, par rapport au cercle, pris pour foyers, par des nombres constans, est égale à une longueur constante.* On voit que M. Sturm est entré dans la bonne voie, dans celle que j'avais indiquée il y a déjà plusieurs années, et qui consiste à chercher, au lieu de la caustique, la courbe dont elle est la développée.

Je me proposais de profiter du premier moment de loisir que je rencontrerais pour chercher de nouveau, à l'aide des résultats obtenus par M. Sturm, la caustique par réflexion relative au cercle, espérant l'obtenir ainsi par un calcul plus simple et sous une forme plus concise, lorsque j'ai reçu, avec une lettre de M. Quetelet, professeur d'astronomie et de physique au muséum de Bruxelles, les cinq premières feuilles imprimées du III.e volume des *Mémoires de l'académie royale des sciences* de la même ville, contenant le commencement d'un mémoire de ce géomètre sur une nouvelle manière d'envisager la génération des caustiques planes, soit par réflexion soit par réfraction. Par sa lettre d'envoi, M. Quetelet déclare qu'il est depuis trois ans en possession des idées qui forment le fond de son mémoire; il se plaît à reconnaître que les conseils que M. Lacroix a bien voulu lui donner, il y a déjà plus d'un an, n'ont pas peu contribué à en améliorer les détails; il ajoute enfin que, frappé des nombreux points de ressemblance qui existent entre les résultats obtenus par M. Sturm et les siens, il n'a pu, avant même l'impression terminée, résister à l'envie de m'adresser les quarante premières pages de son mémoire,

afin de me mettre en situation de juger par moi-même de cette ressemblance.

M. Quetelet est parvenu en effet, pour la caustique relative au cercle, à des conclusions pareilles à celles de M. Sturm ; mais ce qu'il dit de cette courbe n'est qu'une application particulière de deux principes très-élégans sur les caustiques planes en général, et qu'il énonce en ces termes :

I. *La caustique par réflexion pour une courbe plane quelconque, et pour un point rayonnant, situé d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui, ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, passent par le point rayonnant.*

II. *La caustique par réfraction, pour une courbe plane quelconque, et pour un point rayonnant situé d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice des deux milieux, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres au point rayonnant dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.*

On doit remarquer, au surplus, que ces deux principes n'en font proprement qu'un seul, attendu que le premier se déduit du second, en supposant, dans celui-ci, que le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence est égal à *moins un*. C'est ainsi qu'en ont usé constamment M. de Larive et M. Sturm, et que j'en ai usé moi-même dans le deuxième article du tom. XIV, rappelé au commencement de celui-ci.

M. Sarrus se trouvait momentanément à Montpellier, lorsque je reçus la lettre et le commencement du mémoire de M. Quetelet. Il m'observa que les deux principes de ce géomètre pouvaient être déduit, *à priori*, de la théorie des ondulations. Ayant fait remarquer ensuite à M. Sarrus que malheureusement ces deux principes se trouvaient illusoires, dans le cas des rayons incidens parallèles ; après un moment de réflexion, et en s'aidant toujours de la

théorie des ondulations et de celles des courbes parallèles, données par M. Crelle, au commencement du XII.e volume du présent recueil, M. Sarrus me dit qu'alors sans doute ces principes devaient être remplacés par les deux suivans ; ce qu'une analise rigoureuse a complètement justifié.

I. *La caustique par réflexion, pour une courbe plane quelconque, et pour des rayons incidens parallèles entre eux dirigés d'une manière quelconque, dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe réfléchissante et qui sont tangens à une perpendiculaire menée arbitrairement à la direction commune des rayons incidens.*

II. *La caustique par réfraction, pour une courbe plane quelconque et pour des rayons incidens parallèles entre eux, dirigés d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice des deux milieux, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à une perpendiculaire menée arbitrairement à la direction commune des rayons incidens, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.*

Depuis le départ de M. Sarrus, j'ai pensé qu'il serait plus simple et plus élégant de n'avoir, s'il était possible, qu'un principe unique qui pût se plier indistinctement au cas où les rayons incidens partent d'un point voisin et à celui où ces rayons sont parallèles ; et, après quelques recherches, je suis parvenu aux deux principes que voici.

I. *La caustique par réflexion, pour une courbe plane quelconque, et pour un point rayonnant situé d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui, ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, sont tangens à un même cercle, décrit du point rayonnant comme centre, avec un rayon quelconque.*

II. *La caustique par réfraction, pour une courbe plane quel-*

conque, et pour un point rayonnant situé d'une manière quelconque dans le plan de cette courbe, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice des deux milieux, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à une circonférence décrite du point rayonnant comme centre, avec un rayon quelconque, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

On voit que, si, dans ces deux théorèmes, on suppose le rayon arbitraire nul, on retombe sur ceux de M. Quetelet, et que, si, au contraire, en supposant le point rayonnant infiniment éloigné, on suppose ce rayon infini, on obtient ceux de M. Sarrus. On doit remarquer aussi que, dans l'application du premier de ces deux principes, les cercles dont on cherche l'enveloppe peuvent indistinctement toucher extérieurement le cercle arbitraire qui a son centre au point rayonnant, ou bien l'envelopper ou encore en être eux-mêmes enveloppés, si la courbe réflechissante coupe ce dernier cercle. Pareillement, dans l'application de l'autre principe, on peut prendre pour distance des centres des cercles dont on cherche l'enveloppe au cercle arbitraire qui a son centre au point rayonnant, leur plus courte ou leur plus longue distance à ce cercle. L'essentiel est seulement que les cercles dont on cherche l'enveloppe se trouvent tous dans les mêmes circonstances par rapport à celui-là.

Ces deux principes sont également précieux sous le point de vue analitique et sous le point de vue graphique. Sous le premier de ces deux points de vue, en effet, ils semblent offrir le procédé le plus simple et le plus naturel qu'on puisse employer pour parvenir à l'équation de la caustique. Sous le second, il présente toutes les facilités qu'on peut désirer pour en tracer le cours. En traçant, en effet, un assez grand nombre de cercles dont on cherche l'enveloppe, pour que ces cercles se trouvent fort rapprochés les uns des autres, l'enveloppe s'offrira pour ainsi dire d'elle-même dans leurs intersections consécutives. En outre, à raison de l'indétermination du rayon du cercle qui a son centre au point rayon-

nant, on pourra se procurer plusieurs enveloppes ; et dès lors il deviendra facile de leur mener à vue des normales communes, dont les intersections consécutives dessineront la caustique cherchée.

J'allais livrer tout ceci à l'impression, lorsque j'ai réfléchi que, si ces principes suffisaient pour des rayons qui subissent une réflexion ou une réfraction unique, il n'en était plus ainsi pour ceux qui subissent plusieurs réflexions ou réfractions consécutives, ou qui subissent alternativement des réflexions et des réfractions, dans un ordre quelconque ; attendu que, dès la seconde réflexion ou réfraction, les rayons incidens cessent de partir d'un même point ou d'être parallèles, mais sont simplement tangens à une même caustique ou normaux à une même enveloppe. J'ai donc pensé que, pour ne plus rien laisser à dire sur ce sujet, il fallait établir des principes relatifs à la caustique qui doit répondre à des rayons incidens normaux à une même courbe plane, réfléchis ou réfractés à leur rencontre avec une autre courbe plane, située dans un même plan avec celle-là ; et, au point où j'en étais parvenu, il ne m'a pas été difficile, avant même toute démonstration, de deviner les deux théorèmes suivans qui, pour parler le langage des adeptes de la philosophie de Konigsberg, sont à l'égard des caustiques planes, d'une généralité *absolue*.

THÉORÈME I. La caustique par réflexion, pour une courbe plane réfléchissante quelconque, et pour des rayons incidens normaux à une autre courbe plane aussi quelconque, située dans un même plan avec celle-là, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui, ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, sont tangens à la courbe à laquelle tous les rayons incidens sont normaux.

THÉORÈME II. La caustique par réfraction, pour une courbe plane quelconque, séparatrice de deux milieux, et pour des rayons incidens normaux à une autre courbe aussi quelconque, située dans un même plan avec celle-là, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice, et dont

les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à la courbe à laquelle tous les rayons incidens sont normaux, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence.

Les deux précédens principes, que j'ai montré renfermer, comme cas particulier, ceux de M. Quetelet et ceux de M. Sturm, ne sont eux-mêmes que des cas particuliers de ces deux théorèmes; on les en déduit, en effet, en supposant simplement que la courbe à laquelle tous les rayons incidens sont normaux est la circonférence d'un cercle ou une ligne droite, qui n'est elle-même qu'un cercle dont le rayon est infini. Et comme, d'un autre côté, le *Théorème II* renferme implicitement le *Théorème I*, de la même manière que le deuxième principe de M. Quetelet ou celui de M. Sarrus renferme implicitement le premier, il s'ensuit que ce *Théorème II* est à lui seul l'expression générale de toute la théorie des caustiques planes.

On voit que des rayons lumineux, émanés d'un point, après avoir subi une première réflexion ou une première réfraction, deviendront normaux à une première enveloppe; qu'après avoir été de nouveau réfléchis ou réfractés, ils deviendront normaux à une seconde enveloppe, et ainsi du reste; et la développée de la dernière enveloppe sera la caustique à laquelle ces rayons, successivement réfléchis ou réfractés, donneront naissance.

Ainsi se trouve pleinement confirmée, pour les caustiques planes, la conjecture que j'avais hasardée, il y a déjà dix ans; on voit, en effet, que, de quelque manière que ces courbes soient engendrées, elles sont toujours des développées d'enveloppes d'une suite de cercles, c'est-à-dire, des developpées de courbes qui sont d'ordinaire d'une nature assez simple.

M. Quetelet a déduit la démonstration de ses deux principes, par la géométrie descriptive, de la considération des surfaces de révolution. Faute des figures, qui ne me sont point encore parvenues, je n'ai pu suivre qu'assez imparfaitement les raisonnemens de

l'auteur ; mais il me paraît qu'il serait assez facile de les remplacer par des considérations puisées dans la géométrie plane la plus élémentaire. Peut-être même ne serait-il pas impossible de ramener à cette même géométrie la démonstration de deux théorèmes, beaucoup plus généraux, par lesquels je viens de les remplacer. Cependant, pour la satisfaction de ceux d'entre les lecteurs qui comme moi peuvent éprouver quelque gêne à promener alternativement leurs regards d'un texte sur une figure et d'une figure sur un texte, j'ai pensé qu'il valait mieux recourir à l'usage du calcul ; d'autant que, comme on le verra tout à l'heure, il n'est pas nécessaire ici d'en faire une très-grande dépense.

Le calcul peut, en cette rencontre, être employé de deux manières différentes. On peut supposer le théorème connu, et employer le calcul à en démontrer l'exactitude : c'est la marche synthétique que l'on persiste encore aujourd'hui à suivre dans les traités de géométrie élémentaire. On peut, au contraire, supposer le théorème tout à fait inconnu, et montrer comment le calcul aurait pu y conduire depuis long-temps, si nous étions plus adroits à le manier ; c'est la marche analitique, bien préférable à l'autre, et qu'il convient d'autant mieux d'adopter ici qu'elle pourra donner d'utiles directions dans les recherches qui restent encore à faire, relativement aux caustiques que forment les rayons réfléchis ou réfractés, à la rencontre d'une surface courbe quelconque.

Soit donc une courbe plane quelconque, séparatrice de deux milieux homogènes, de densité différente ; et soit une autre courbe plane aussi quelconque, située dans le même plan avec la première, et de tous les points de laquelle jaillissent, dans des directions normales, des rayons lumineux qui se réfractent à la rencontre de l'autre courbe. Soit $\frac{m}{n}$ le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

Soient rapportées les deux courbes à deux axes rectangulaires

quelconques, soit $(t'u')$ un point de la seconde courbe, duquel jaillit un rayon incident ; soit (t,u) le point d'incidence sur la première courbe ; soit (x,y) un quelconque des points de la direction du rayon réfracté ; et prenons enfin X, Y pour symbole des coordonnées courantes.

Les coordonnées t et u devront être liées par une relation connue ; et il en sera de même de t' et u'. Représentons ces deux relations par

$$\varphi(t,u)=V=0 \; ; \qquad \varphi'(t',u')=V'=0 \; .$$

De ces deux relations on déduira, en t et u, t' et u', les valeurs de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{du'}{dt'}$; valeurs que, pour abréger, nous représenterons respectivement par p et p'.

Les équations du rayon incident, du rayon réfracté et de la normale au point d'incidence seront respectivement

$$Y-u=-\frac{1}{p'}(X-t) \; ,$$

$$Y-u=\frac{y-u}{x-t}(X-t) \; ,$$

$$Y-u=-\frac{1}{p}(X-t).$$

On aura, en conséquence, par les formules connues

$$\text{Sinus d'incidence} = \frac{p-p'}{\sqrt{(1+p^2)(1+p'^2)}} \; ,$$

$$\text{Sinus de réfraction} \; \frac{(x-t)+p(y-u)}{\sqrt{(1+p^2)\{(x-t)^2+(y-u)^2\}}} \; ;$$

en divisant ces deux formules l'une par l'autre, on devra donc avoir

$$\frac{\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2}}{(x-t)+p(y-u)} \cdot \frac{p-p'}{\sqrt{1+p'^2}} = \frac{m}{n} ; \qquad (1)$$

de plus, les coordonnées t et u, t' et u' se trouveront liées par la condition

$$\frac{u-u'}{t-t'} = -\frac{1}{p'} ,$$

c'est-à-dire,

$$(t-t')+p'(u-u')=0 , \qquad (2)$$

au moyen de laquelle l'équation (1) deviendra

$$\frac{\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2}}{(x-t)+p(y-u)} \cdot \frac{(t-t')+p(u-u')}{\sqrt{(t-t')^2+(u-u')^2}} = \frac{m}{n} . \qquad (3)$$

Cela posé, si l'on prend un quelconque des systèmes de valeurs de t' et u' donnés par l'équation $V'=0$, ainsi que la valeur correspondante de p', pour les substituer dans l'équation (2), l'équation résultante en t et u, combinée avec $V=0$, donnera les valeurs correspondantes de t, u et p ; et, en substituant ces valeurs dans (3), l'équation qu'on en obtiendra, en x et y, sera indistinctement satisfaite par tous les points de la direction du rayon réfracté.

Puis donc que cette équation laisse x et y indéterminés, et n'établit entre elles qu'une simple relation, il doit nous être permis de la décomposer arbitrairement en deux autres, qui alors donneront, pour x et y, les coordonnées d'un point déterminé de la direction du rayon réfracté qui répond au point de départ (x, y) du rayon incident.

Or, on satisfait à cette équation, en posant à la fois,

$$(x-t)^2+(y-u)^2=\frac{n^2}{m^2}\{(t-t')^2+(u-u')^2\}\ , \qquad (4)$$

$$(x-t)+p(y-u)=\frac{n^2}{m^2}\{(t-t')+p(u-u')\}\ ; \qquad (5)$$

car, en divisant la racine quarrée de la première par la seconde, on retombe sur la proposée; donc les équations (4) et (5), pour chaque point de départ (t', u') d'un rayon incident, feront connaître un des points de la direction du rayon réfracté. Examinons quel est ce point.

L'équation (4) est celle d'un cercle qui a son centre (t, u) sur la courbe séparatrice des deux milieux et dont le rayon $\frac{n}{m}\sqrt{(t-t')^2+(u-u')^2}$ est à la distance $\sqrt{(t-t')^2+(u-u')^2}$ de ce centre à la courbe des points de laquelle émanent les rayons incidens dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence; ainsi le point de la direction du rayon réfracté donné par les deux équations (4) et (5) doit être un des points de la circonférence d'un tel cercle.

Si l'on prend la dérivée de l'équation (4) par rapport à t, u, t', u', considérés comme quatre paramètres variables, liés entre eux par les deux équations $V=0$, $V'=0$ et par l'équation (2); ou, ce qui revient au même, si on la différentie par rapport à t', en y considérant t, u, u', comme des fonctions de cette variable indépendante, et x et y comme constans, en observant que $\frac{du}{dt'}=\frac{du}{dt}\frac{dt}{dt'}=p\frac{dt}{dt'}$, il viendra

$$\{(x-x')+p(y-y')\}\frac{dt}{dt'}=\frac{n^2}{m^2}\{[(t-t')+p(u-u')]\frac{dt}{dt'}-[(t-t')+p'(u-u')]\}\ ;$$

ou simplement, en vertu de l'équation (2), et en divisant par $\frac{dt}{dt'}$

$$(x-x')+p(y-y')=\frac{n^2}{m^2}\{(t-t')+p(u-u')\}\ ;$$

c'est-à-dire, l'équation (5) elle-même; donc, suivant la théorie des enveloppes, les valeurs de x et y données par les équations (4) et (5) sont les coordonnées du point où le cercle donné par l'équation (4) est touché par l'enveloppe de tous les cercles décrits sous les mêmes conditions; donc le rayon réfracté, qui part du centre de ce cercle, est normal à l'enveloppe en ce point; donc les rayons réfractés ne sont autre chose que les normales aux différens points de l'enveloppe; donc la caustique formée par les intersections consécutives de ces rayons, c'est-à-dire, la courbe à laquelle ils sont tangens, n'est autre que la développée de cette enveloppe: or c'est précisément en cela que consiste le *Théorème II*; ce théorème est donc complètement démontré; le *Théorème I* l'est donc également, puisqu'il n'est qu'un cas particulier de celui-là.

Si, au lieu de donner la surface séparatrice on donnait l'enveloppe, c'est-à-dire, la trajectoire orthogonale de tous les rayons réfractés, en éliminant x et y entre l'équation de cette trajectoire et les équations (4) et (5), puis t' et u' entre l'équation résultante, l'équation $V'=0$ et l'équation (2); l'équation qu'on obtiendrait, en t, u, p serait l'équation différentielle de la courbe séparatrice inconnue.

Si, la courbe séparatrice et la trajectoire orthogonale des rayons réfractés étant données, on demandait la trajectoire orthogonale des rayons incidens, entre l'équation de la première trajectoire et les équations (4) et (5), on éliminerait d'abord x et y; on éliminerait ensuite t et u entre l'équation résultante, l'équation $V=0$ et l'équation (2); et l'équation en t', u', p' à laquelle on parviendrait ainsi serait celle de la trajectoire orthogonale des rayons incidens.

Ainsi, de ces trois courbes, la trajectoire orthogonale des rayons

incidens, la courbe séparatrice des milieux et la trajectoire orthogonale des rayons réfractés, deux quelconques étant connus, on peut toujours déterminer la troisième. On voit même que chacun des trois problèmes compris sous cet énoncé général est susceptible d'une infinité de solutions.

Dans un prochain article, nous ferons l'application de la théorie qui vient d'être développée à quelques exemples particuliers, qui montreront combien elle facilite les calculs.