ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL ZINSMEISTER

Domaines réguliers du plan

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 1 (1985), p. 49-55

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_1_49_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 1 (1985), 49-55

DOMAINES RÉGULIERS DU PLAN

par Michel ZINSMEISTER

1. INTRODUCTION

Cet article est un complément à l'article "Représentation conforme et courbes presque – lipschitziennes" paru dans une précédente édition de cette revue [8]. Lors d'une rencontre avec le Professeur Gehring celui-ci m'a en effet indiqué un certain nombre de précisions et d'améliorations notables que l'on pouvait apporter à [8], à la lumière de ses propres résultats sur le sujet. Ces améliorations font l'objet de la section 3. Dans la section 2 une définition plus "intrinsèque" des domaines considérés dans [8] est donnée. Enfin il est apparu que les courbes presque lipschitziennes avaient déjà été considérées par Ahlfors [1] qui les avait alors baptisées "courbes régulières". C'est cette dénomination que nous adopterons désormais. Je remercie chaleureusement le professeur Gehring pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je remercie également le professeur Ancona pour les conversations très utiles que j'ai eues avec lui sur le sujet.

2. LES DOMAINES REGULIERS

Pour $z \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, $D(z,r)$ désigne le disque ouvert de centre z et de rayon r. D désigne le disque $D(0,1)$ et $\mathcal{H}^1$ la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle.

Mots-clefs : Représentation conforme, Courbes régulières, Courbes de Lavrentiev, L'espace BMO A, L'espace universel de Teichmüller.

DEFINITION. – *Un domaine simplement connexe* $\Omega \subset \mathbf{C}, \Omega \neq \mathbf{C}$ *est dit régulier s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall z \in \mathbf{C}, \forall r > 0, \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap D(z,r)) \leqslant Cr. \tag{1}$$

Un domaine presque lipschitzien au sens de [8] vérifie naturellement (1). L'objet de la proposition qui suit est d'établir la réciproque.

PROPOSITION 1. – *Soit* Ω *un domaine régulier du plan contenant* 0.

a) *Si* Ω *est borné et si* Φ *désigne la représentation conforme de* D *sur* Ω *vérifiant* $\Phi(0) = 0, \Phi'(0) > 0$, *alors* Φ *se prolonge en une application continue de* $\bar{D}$ *sur* $\bar{\Omega}$ *et* $\Phi \mid \partial D$ *est une paramétrisation absolument continue de* $\partial\Omega$ *vérifiant*

$$\forall z_0 \in \mathbf{C}, \forall r > 0, \int_{E(z_0,r)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant 2\,\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap D(z_0,r)) \tag{2}$$

où

$$E(z_0,r) = \{z \in \partial D ; |\Phi(z) - z_0| < r\}$$

b) *Si* Ω *est non borné alors* $\partial\Omega$ *a un nombre fini* $p \geqslant 1$ *de composantes connexes. Si* Φ *est une représentation conforme de* $\mathbf{R}^2_+ = \{x + iy \in \mathbf{C}, y > 0\}$ *sur* Ω *telle que* $\Phi(\infty) = \infty$, *alors* Φ *se prolonge en une application continue de* $\bar{\mathbf{R}}^2_+ \cup \{\infty\}$ *sur* $\bar{\Omega} \cup \{\infty\}, \Phi^{-1}(\infty) = \{x_1, \ldots, x_{p-1}\} \cup \{\infty\}$ *et si l'on appelle* $(I_k), 1 \leqslant k \leqslant p$ *les composantes connexes de* $\mathbf{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_{p-1}\}$ *les restrictions de* Φ *aux* I_k *sont des paramétrisations absolument continues des* p *composantes de* $\partial\Omega$ *et l'on a encore* (2) *(en remplaçant* ∂D *par* $\mathbf{R}$*).*

Démonstration (abrégé). – a) Puisque Ω est borné on a en particulier $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < \infty$. Le fait que Φ se prolonge continûment de $\bar{D}$ sur $\bar{\Omega}$ et que $\Phi \mid \partial D$ est absolument continue est alors prouvé dans [7]. Pour prouver (2) on utilise d'abord un théorème de Denjoy [4] qui affirme que pour $z \in \partial\Omega$,

$$N(z) = {}^{\#}\{y \in \partial D ; \Phi(y) = z\}$$

est inférieur ou égal à 2 sauf peut-être sur un sous-ensemble dénombrable de $\partial\Omega$, puis le fait que

$$\int_{E(z_0,r)} |\Phi'(z)|\,|dz| = \int_{\Phi(E(z_0,r))} N(z)\,d\mu(z)$$

où μ est la mesure définie par $\mu(A) = \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap A)$ ([5]).

b) Soit $I(z)$ l'inversion $z \longmapsto 1/z$ et $\Omega' = I(\Omega)$. Alors $\partial\Omega' = I(\partial\Omega)$ et on vérifie facilement que $\partial\Omega'$ vérifie encore (1). On peut supposer $\Phi^{-1}(0) = i$. Alors $z \longmapsto \psi(z) = 1/\Phi\left(i\,\frac{1+z}{z-1}\right)$ est une représentation conforme de $\mathbf{C}\backslash\overline{D}$ sur Ω' telle que $\psi(\infty) = \infty$. Les résultats de [7] impliquent que ψ se prolonge de $\mathbf{C}\backslash D$ sur $\overline{\Omega'}$ et que $\psi \mid \partial D$ est une paramétrisation absolument continue de $\partial\Omega'$. La condition (1) étant vérifiée par $\partial\Omega'$, on voit facilement que $\psi^{-1}(0)$ doit être fini. Soit p son cardinal. Toutes les propriétés de b) découlent alors du fait que $\Phi(z) = 1/\psi\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)$.

La propriété (2) signifie qu'un domaine régulier est presque-lipschitzien au sens de [8]. On peut donc énoncer :

COROLLAIRE 1. – *Si* Ω *est un domaine régulier :*

a) *Si* Ω *est borné,* $\Phi : D \longrightarrow \Omega$ *vérifie :* Φ' *est extérieure et* $|\Phi'|^t$ *appartient à la classe de Muckenhoupt* $A^\infty(\partial D)$ *si* $0 \leqslant t < 1/3$. *En particulier* $\mathrm{Log}(\Phi') \in \mathrm{BMOA}(D)$.

b) *Si* Ω *est non borné,* $\Phi : \mathbf{R}^2_+ \longrightarrow \Omega$ *vérifie :* Φ' *est extérieur et* $|\Phi'|^t \in A^\infty(R)$ *si* $0 \leqslant t < 1/3$. *En particulier* $\mathrm{Log}(\Phi') \in \mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$.

Les détails sont laissés au lecteur.

3. APPROXIMATION DES DOMAINES REGULIERS

Un domaine Ω est appelé domaine de Lavrentiev si c'est un domaine de Jordan qui vérifie :

$$\exists C > 0, \forall z_1, z_2 \in \partial\Omega, \inf(\mathcal{H}^1(\gamma_1), \mathcal{H}^1(\gamma_2)) \leqslant C\,|z_1 - z_2|,$$

où γ_1 et γ_2 sont les deux sous-arcs de $\partial\Omega$ (dans la sphère de Riemann) joignant z_1 et z_2 ; Les domaines de Lavrentiev sont des domaines réguliers ; le but de cette partie est d'étudier, après lui avoir donné un sens, l'approximation des domaines réguliers

par des domaines de Lavrentiev. Désignons par X l'ensemble des couples (Φ, Ω) où Ω est un domaine régulier et Φ une représentation conforme de $\mathbf{R}^2_+$ sur Ω. Soit $X_0 \subset X$ le sous-ensemble défini par la condition que Ω est un domaine de Lavrentiev.

Deux topologies peuvent être introduites sur X. La première, $\mathfrak{T}$, a été étudiée dans [8]. Rappelons sa définition : Si $(\Phi, \Omega) \in X$, le Schwarzien de Φ est la fonction

$$S_\Phi(z) = \left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)'(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2(z).$$

Le corollaire 1 et les résultats de [8] entraînent que S_Φ appartient à l'espace de Banach E des fonctions g holomorphes dans $\mathbf{R}^2_+$ telles que

$$\|g\|_E = \sup_{I \subset R} \left\{ \frac{1}{|I|} \iint_{I \times [0, |I|]} y^3 |g(x+iy)|^2 \, dxdy \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

La topologie $\mathfrak{T}$ est alors définie par l'écart suivant :

Si $x_1 = (\Phi_1, \Omega_1) \in X, x_2 = (\Phi_2, \Omega_2) \in X, d(x_1, x_2)$

$$= \|S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2}\|_E.$$

Observons que $d(x_1, x_2) = 0$ signifie que $\Phi_2 = k \circ \Phi_1$ où k est une homographie. La topologie séparée correspondante est la topologie de E induite sur $\mathcal{O} = \{S_\Phi ; (\Phi, \Omega) \in X\}$. Posons $\mathcal{P} = \{S_\Phi ; (\Phi, \Omega) \in X_0\}$.

La seconde topologie, $\tilde{\mathfrak{T}}$, est définie par l'écart

$$\tilde{d}(x_1, x_2) = \|\operatorname{Log} \Phi_1' - \operatorname{Log} \Phi_2'\|_{BMO}.$$

Observons que $\tilde{d}(x_1, x_2) = 0$ signifie $\Phi_2 = h \circ \Phi_1$ où h est une similitude affine. La topologie séparée correspondante est la topologie de $BMOA(\mathbf{R}^2_+)$ induite sur $\tilde{\mathcal{O}} = \{\operatorname{Log} \Phi' ; (\Phi, \Omega) \in X\}$. Là encore, posons $\tilde{\mathcal{P}} = \{\operatorname{Log} \Phi' ; (\Phi, \Omega) \in X_0\}$.

Rappelons [8] qu'il existe une constante (universelle) C telle que $\forall x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) \leqslant C\tilde{d}(x_1, x_2)$.

En sens inverse, si $x_0 \in X_0$, il existe $\epsilon > 0$ et $C(\epsilon, x_0)$ tels que

$$\forall x_1, x_2 \in X, \ \tilde{d}(x_1, x_2) \leqslant C d(x_1, x_2) \ \text{ si } \ \tilde{d}(x_j, x_0) \leqslant \epsilon, j = 1, 2.$$

3.1. Etude de la topologie $\mathfrak{T}$.

Il a été démontré dans [8] que $\mathfrak{L}$ est l'intérieur de $\mathfrak{O}$ dans E. Un résultat de Gehring permet de préciser ce fait.

THEOREME 1. – *Il existe* $(\Phi, \Omega) \in X$ *tel que* S_Φ *ne soit pas adhérent à* $\mathfrak{L}$.

C'est un corollaire immédiat du théorème 2 de [6]. Soit $U = \mathbf{C} \backslash \gamma$ ou $\gamma = \{z = \pm \exp(-a + i)t, \quad t \in [0, +\infty]\}$ avec $0 < a < 1/8\pi$. On définit alors Ω comme étant le transformé de U par l'inversion de centre 1. La courbe γ est un "segment" de la spirale logarithmique $\Gamma = \{z = \pm \exp(-a + i)t, \quad t \in [-\infty, +\infty]\}$. Comme une telle spirale est une courbe de Lavrentiev, on en déduit aisément que Ω est un domaine régulier. Soit Φ une représentation conforme de $\mathbf{R}^2_+$ sur Ω. Comme la topologie de E est plus fine que celle de l'espace de Teichmüller, le théorème 2 de [6] montre qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si g est conforme dans $\mathbf{R}^2_+$ et $\| S_g - S_\Phi \|_E < \epsilon$, alors $g(\mathbf{R}^2_+)$ ne peut être un domaine de Jordan. A fortiori S_Φ n'est pas adhérent à $\mathfrak{L}$.

Remarque. – Si l'on a choisi Φ de sorte que $\Phi(\infty) = \infty$, les résultats de [8] prouvent que $|\Phi'| \in A^\infty(\mathbf{R})$.

3.2. Etude de la topologie $\tilde{\mathfrak{T}}$.

Un résultat récent d'Astala et Gehring [2] permet d'établir l'analogue de 3.1 pour la topologie $\tilde{\mathfrak{T}}$.

THEOREME 2. – $\tilde{\mathfrak{L}}$ *est l'intérieur de* $\tilde{\mathfrak{O}}$ *dans* $\mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$. *De plus il existe* $\mathrm{Log}\,\Phi' \in \tilde{\mathfrak{O}}$ *qui n'est pas adhérent à* $\tilde{\mathfrak{L}}$.

Puisqu'il existe une constante universelle C telle que

$$\| S_f - S_g \|_E \leqslant C \| \mathrm{Log}\, f' - \mathrm{Log}\, g' \|_{\mathrm{BMO}},$$

le fait que $\tilde{\mathfrak{L}}$ soit ouvert dans $\mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$ se déduit du fait que $\mathfrak{L}$ est ouvert dans E. De plus, si (Φ, Ω) est le couple du théorème 1, il apparaît que $\mathrm{Log}\,\Phi'$ n'est pas adhérent à $\tilde{\mathfrak{L}}$. La seule chose restant à démontrer est que si $\mathrm{Log}\,\Phi'$ est un point intérieur à $\tilde{\mathfrak{O}}$, alors $\Omega = \Phi(\mathbf{R}^2_+)$ est un domaine quasi-conforme, c'est-à-dire

vérifiant les propriétés (3) et (4) suivantes :

$$\exists k > 1\,,\ \forall z_0 \in \mathbf{C}\,,\ \forall r > 0\,,\ \forall z_1, z_2 \in \bar{\mathrm{D}}(z_0, r) \cap \Omega\,,$$

z_1 et z_2 peuvent être joints dans $\mathrm{D}(z_0, kr) \cap \Omega$. (3)

$$\exists k > 1\,,\ \forall z_0 \in \mathbf{C}\,,\ \forall r > 0\,,\ \forall z_1, z_2 \in \Omega \backslash \mathrm{D}(z_0, kr)\,,$$

z_1 et z_2 peuvent être joints dans $\Omega \setminus \mathrm{D}(z_0, r)$. (4)

La propriété (3) se démontre grâce à un argument analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 4 de [8]. Pour démontrer (4), on utilise le théorème suivant :

THEOREME 3 [2]. — *Si* Ω *est un domaine simplement connexe ne vérifiant pas* (4), *alors, pour tout* $\epsilon > 0$, *on peut trouver* $z_0 \in \Omega$, $w \in \mathrm{D}(0, \epsilon)$, *et* g *une représentation conforme de* Ω *sur* D *telle que* $g(z_0) = 0$ *et telle que*

$$f_\epsilon(z) = (z - z_0) \exp\left\{ w \int_{z_0}^{z} \frac{g(u)}{u - z_0}\, du \right\}$$

ne soit pas univalente dans Ω.

Ce théorème admis, posons $\psi_\epsilon = f_\epsilon \circ \Phi$. Alors

$$\mathrm{Log}\ \psi_\epsilon' - \mathrm{Log}\ \Phi' = \mathrm{Log}\ f_\epsilon' \circ \Phi$$

et

$$f_\epsilon'(z) = (1 + wg(z)) \exp\left\{ w \int_{z_0}^{z} \frac{g(u)}{u - z_0}\, du \right\}.$$

L'application $k(z) = g \circ \Phi(z)$ est de la forme $k(z) = e^{ia} \dfrac{z - u_0}{z - \bar{u}_0}$

où $u_0 = \Phi^{-1}(z_0)$ et l'on a

$$\mathrm{Log}\ f_\epsilon' \circ \Phi = \mathrm{Log}(1 + wk(z)) + w \int_{z_0}^{\Phi(z)} \frac{g(u)}{u - z_0}\, du\,.$$

Puisque $|k(z)| \leqslant 1$, on voit immédiatement qu'il existe $C > 0$ telle que $\| \mathrm{Log}(1 + wk(z)) \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C\epsilon$.

D'autre part, en posant $\mathrm{F}(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{\Phi(z)} \frac{g(u)}{u - z_0}\, du$, il vient

$$\mathrm{F}'(z) = k(z) \frac{d}{dz}\left(\mathrm{Log} \frac{\Phi(z) - z_0}{k(z)} \right) + k'(z)\,.$$

Les résultats de [3] prouvent qu'il existe une constante absolue $C > 0$ telle que $\| \mathrm{Log} \dfrac{\Phi(z) - z_0}{k(z)} \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$.

En utilisant la caractérisation de BMO par les mesures de Carleson, on en déduit que $\| \operatorname{Log} f_\epsilon' \circ \Phi \|_{BMO} \leqslant C\epsilon$.

Nous pouvons alors conclure. Si Ω ne vérifie par (4), nous venons de voir que l'on peut trouver, pour tout $\epsilon > 0$, une fonction $\psi_\epsilon : \mathbf{R}^2_+ \longrightarrow \mathbf{C}$, non univalente, telle que

$$\| \operatorname{Log} \Phi' - \operatorname{Log} \psi_\epsilon' \|_{BMO} \leqslant C\epsilon .$$

Mais ceci est en contradiction avec le fait que $\operatorname{Log} \Phi'$ est intérieur à $\widetilde{\mathcal{O}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AHLFORS, Zur Theorie des "Uberlagerungs-flächen, *Acta. Math.*, 65 (1935), 157-194.

[2] K. ASTALA, F. GEHRING, Injectivity criteria and the quasidisk, Preprint (University of Michigan).

[3] A. BAERNSTEIN, Univalence and bounded mean oscillation, *Mich. Math. Journal*, 23 (1976), 217-223.

[4] A. DENJOY, Les continus cycliques et la représentation conforme, *Bull. Soc. Math de France*, 70 (1942), 97-125.

[5] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1969.

[6] F. GEHRING, Spirals and the universal Teichmüller space, *Acta Math.*, 141 (1978), 99-113.

[7] C. POMMERENKE, *Univalent functions*, Vanden-hoeck et Ruprecht, Göttingen, 1975.

[8] M. ZINSMEISTER, Représentation conforme et courbes presque lipschitziennes, *Ann Inst. Fourier*, 34, 2 (1984), 29-44.

Manuscrit reçu le 19 mars 1984.

Michel ZINSMEISTER,
Département de Mathématiques
Université de Rouen
U.E.R. Sciences
76130 Mt St Aignan.