ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BERGER

Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de 1/4

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 2 (1983), p. 135-150

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_135_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 2 (1983), 135-150.

SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES PINCÉES JUSTE AU-DESSOUS DE 1/4

par Marcel BERGER

1. Introduction.

Une variété riemannienne est dite δ-*pincée* ($\delta \leqslant 1$) si sa courbure sectionnelle est toujours comprise entre δ et 1. Le « théorème de rigidité » dit que si (M,g) est simplement connexe, de dimension paire, compacte et 1/4-pincée, alors : soit M est homéomorphe à la sphère S^n, soit (M,g) est isométrique à un espace riemannien symétrique compact de rang 1, cf. [1] ou [2], chapter II ou [3], 6.6, p. 111. C'est-à-dire à l'un des espaces suivants : $\mathbf{CP}^m$ l'espace projectif complexe, $\mathbf{HP}^m$ l'espace projectif quaternionien, $\mathbf{CaP}^2$ le plan projectif des octaves de Cayley, ces espaces devant être munis de leur structure riemannienne canonique (dont la courbure varie entre 1/4 et 1, bornes comprises).

Juste au-dessous de 1/4 on peut donc conjecturer que l'on ne trouve pas d'autre variété différentiable que les $\mathbf{CP}^m$, $\mathbf{HP}^m$, $\mathbf{CaP}^2$. Tel est bien le cas, on a en effet le :

THÉORÈME. — *Il existe, pour tout n pair, un réel $\varepsilon(n) < 1/4$ tel que toute variété simplement connexe, de dimension n et qui admet une métrique riemannienne $\varepsilon(n)$-pincée, est nécessairement homéomorphe à S^n ou difféomorphe à un espace riemannien symétrique compact de rang 1.*

Malheureusement le nombre ε obtenu est purement idéal; à l'heure actuelle nous n'avons aucune idée sur sa valeur optimale. Comme résultats dans cette direction mentionnons [5] et [7].

Remarquons que le cas des dimensions impaires ne peut pas être étudié seulement comme ici car, dans le théorème de convergence de Gromov [4], 8.28, p. 129, que nous utilisons de façon essentielle, il faut savoir que le rayon d'injectivité des variétés considérées ne tend pas vers 0. En

dimension paire c'est toujours le cas car d'après Klingenberg [3], 5.9, p. 98, il est toujours supérieur ou égal à π. Par contre le comportement du rayon d'injectivité en dessous de $1/4$ en dimension impaire est pratiquement inconnu sauf en dimension 3, voir [10]. Pour la dimension 7 on trouvera dans [6] des variétés de pincement tendant vers 16/29.37 et dont le rayon d'injectivité tend vers 0.

Pour ce travail, j'ai profité d'une discussion en 1968 avec D. Gromoll, d'une lettre de 1981 de K. Grove et des conseils de M. Gromov et P. Pansu. Enfin W. Ziller m'a signalé un trou important dans une première version. Je remercie ici vivement tous ces collègues pour leur aide.

2. Comment démontrer le théorème.

Fixons $\eta \in]0,1/4[$ quelconque. D'après Weinstein et Cheeger (voir [3], 7.34, p. 132) il n'existe, à un difféomorphisme près, qu'un nombre fini $F(n)$ de variétés $M_1, \ldots, M_{F(n)}$ de dimension paire n, simplement connexes et admettant une métrique riemannienne η-pincée. Pour $i = 1, \ldots, F(n)$ posons

$$\pi_i = \sup \{\delta : \text{il existe sur } M_i \text{ une métrique riemannienne } \delta\text{-pincée}\}.$$

Il suffit de montrer que si $\pi_i = 1/4$ et si M_i n'est pas homéomorphe à une sphère, alors M_i est difféomorphe à un espace symétrique compact simplement connexe de rang 1.

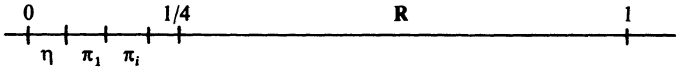

Fig. 1.

Soit donc sur $M = M_1$ par exemple une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de métriques riemanniennes telle que g_k soit ε_k-pincée avec $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 1/4$. La suite (M, g_k) de variétés riemanniennes vérifie les hypothèses du théorème de convergence de Gromov : [4], p. 129, et en conséquence il existe sur M une métrique *faiblement riemannienne* $g = \lim_{k \to \infty} g_k$, seulement continue par définition *a priori*, mais possédant les propriétés suivantes (cf. [4], p. 129) :

> pour g, il y a une structure d'espace métrique d. Les distances pour d sont limite, lorsque k tend vers l'infini, des distances pour les g_k. La métrique g possède des segments (géodésiques

réalisant la distance entre leurs extrémités), des géodésiques; ces géodésiques sont données par des applications exponentielles, qui existent en chaque point de M; ce sont des difféomorphismes entre les boules ouvertes de rayon égal au rayon d'injectivité (supérieur ou égal à π pour toute g_k). Pour g, il existe des angles entre segments, les angles euclidiens des $g(p)$, $p \in M$. Ces angles sont la limite des angles correspondant dans les g_k. En particulier :

(i) *la formule de la variation première est vraie dans la variété faiblement riemannienne* (M,g).

Mais on a aussi :

(ii) *le diamètre de* (M,g) *est égal à* π;

et

(iii) *pour tous* $p, q \in M$ *tels que* $d(p,q) = \pi$ *et pour tout vecteur unitaire* v *tangent en* q *il existe un segment* γ *de* p *à* q *tel que* $\sphericalangle(\dot{\gamma}(q),v) \leqslant \pi/2$.

La propriété (ii) provient de ce que, chaque (M,g_k) n'étant pas homéomorphe à S^n mais aussi ε_k-pincée, d'après le résultat sur le diamètre (cf. [3], 6.13, p. 117) on a diamètre $((M,g_k)) \leqslant \pi/2\sqrt{\varepsilon_k}$, donc

$$\text{diamètre } ((M,g)) \leqslant \lim_{k\to\infty} (\pi/2\sqrt{\varepsilon_k}) = \pi.$$

Mais le diamètre est supérieur ou égal au rayon d'injectivité, dont on a vu de plus qu'il est supérieur ou égal à π. La propriété (iii) se démontre avec (i) comme dans [3], 6.2, p. 107, par exemple.

DANS TOUTE LA SUITE (M,g) DÉSIGNE
CETTE VARIÉTÉ FAIBLEMENT RIEMANNIENNE.

Pour démontrer le théorème il suffira donc, d'après le théorème de rigidité rappelé au début de ce travail, de montrer que g continue seulement *a priori* est en fait C^∞. En fait on va montrer que (M,g) est un espace homogène riemannien de groupe de Lie. C'est l'objet de la proposition finale 11. Il faut d'abord démontrer une succession de lemmes (3 à 10). L'idée de la démonstration est, comme en [3], pp. 116-117 ou [2], de montrer que les symétriques géodésiques σ_p autour des points p de (M,g) sont des isométries. Dans les démonstrations de [2] ou [3] on utilise finalement, après des arguments géométriques basés sur (iii) et les théorèmes de comparaison de Rauch supérieur et inférieur, les champs de Jacobi de la variété

riemannienne C^∞ considérée. Ici ceci n'est plus possible puisque g est seulement C^0 *a priori*, donc sans courbure ni champs de Jacobi exploitables.

La démonstration ci-dessous est seulement un passage technique du cas C^∞ au cas C^0. Comme il y a dans (M,g) une notion de distance, des notions de géodésiques, d'angles de segments, outre (i), nous pouvons utiliser les deux théorèmes de comparaison de Rauch, le supérieur pour la courbure 1 et l'inférieur pour la courbure 1/4; en effet les conclusions de ces théorèmes ne font intervenir que les angles et les côtés d'un triangle géodésique et comme ils sont vrais pour chaque g_k, avec la courbure supérieure 1 et la courbure inférieure ε_k, ils seront vrais par passage à la limite : on obtient ainsi les lemmes 3 et 4.

On calque ensuite plus ou moins la démonstration du théorème de rigidité, cf. [9] ou [3], pp. 111-117. On construit dans (M,g) deux familles de sous-variétés totalement géodésiques, les premières isométriques à la sphère $S^{n-k}(1)$ de courbure constante égale à 1 dans le lemme 7, ce sont les candidates à être les droites projectives des KP^m. Les secondes sont isométriques au projectif réel $RP^2(1/4)$ de courbure constante égale à 1/4, lemme 8. Comme les surfaces de la première famille sont orthogonales partout à celles de la seconde, et que chacune est respectée par la symétrie géodésique autour d'un point qui leur est commun, on en déduit bien que la symétrie géodésique autour de ce point est une isométrie.

3. Lemme de comparaison avec la courbure 1/4.

Soit $p \in (M,g)$, *soit* c *une courbe d'image contenue dans l'intersection de la boule de rayon* π *de* T_pM *et dans un sous-espace* P *de dimension* 2 *de* T_pM. *Fixons un isomorphisme euclidien* f *entre* T_pM *et* $T_n(S^2(1/4))$ *tangent à* $S^2(1/4)$ *au pôle nord* n. *Alors*

$$\text{longueur } (\exp_p(c)) \leqslant \text{longueur } (\exp_n(f \circ c)).$$

Preuve. — Puisque chaque g_k possède un rayon d'injectivité supérieur ou égal à π, les hypothèses du corollaire 1.30 de [3], p. 30, sont satisfaites lorsque l'on prend pour M_0 (notations de [3]) notre variété (M,g_k) et pour M (notations de [3]) la sphère $S^2(\varepsilon_k)$. On a donc :

$$\text{longueur pour } g_k \text{ de } \exp_p(c) \leqslant \text{longueur dans } S^2(\varepsilon_k) \text{ de } \exp_n(f \circ c)).$$

Ceci ayant lieu pour tout k, à la limite on obtient bien le lemme.

4. Lemme de comparaison avec la courbure 1.

Soient p, q, r, *trois points de* (M,g), *soient* γ, δ, η *trois segments de* p *à* q, p *à* r, q *à* r *respectivement; on suppose en outre que* $d(p,z) < \pi$ *pour tout* z *de* η. *Soit* $\{\bar{p},\bar{q},\bar{r}\}$ *un triangle de* $S^2(1)$ *tel que* $d(p,q) = d(\bar{p},\bar{q})$, $d(p,r) = d(\bar{p},\bar{r})$, $d(q,r) = d(\bar{q},\bar{r})$. *Alors les angles en* p *et* $\bar{p}$ *de ces triangles vérifient :*

$$\measuredangle(\dot{\gamma}(p), \dot{\delta}(p)) \leqslant \text{angle en } \bar{p} \text{ de } \{\bar{p},\bar{q},\bar{r}\}.$$

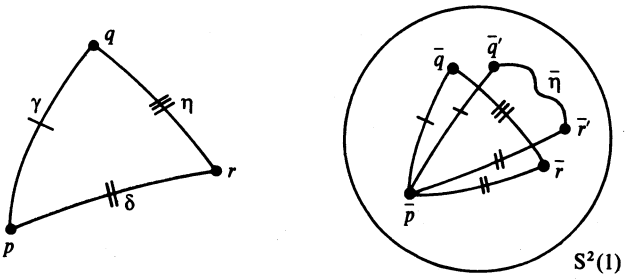

Fig. 2.

Preuve. — On applique le corollaire 1.30 de [3], p. 30, mais cette fois-ci avec $M_0 = S^2(1)$ et $M = (M,g_k)$. L'hypothèse de distance du lemme montre que les hypothèses dans 1.30 de [3] sont satisfaites (pour k suffisamment grand) pour le réel $r = \pi$, parce que le rayon d'injectivité de chaque (M,g_k) est supérieur ou égal à π. On prend dans 1.30 de [3] la courbe c égale à une représentation par la longueur du segment η. Le corollaire 1.30 de [3] dit donc qu'il existe dans $S^2(1)$ une courbe image $\bar{\eta}$ d'extrémités $\bar{q}'$, $\bar{r}'$ avec

$$d(\bar{p},\bar{q}') = d(p,q) = d(\bar{p},\bar{q}), \qquad d(\bar{p},\bar{r}') = d(p,r) = d(\bar{p},\bar{r}),$$

l'angle du triangle $\{\bar{p},\bar{q}',\bar{r}'\}$ en $\bar{p}$ étant égal à l'angle $\measuredangle(\dot{\gamma}(p),\dot{\delta}(p))$. Donc

$$d(\bar{q}',\bar{r}') \leqslant \text{longueur de } \bar{\eta} \leqslant \text{longueur de } c = d(q,r).$$

Mais comme dans $S^2(1)$, le côté opposé à un angle d'un triangle dont les longueurs des deux autres côtés sont fixes a une longueur qui est une fonction strictement croissante de cet angle, on aura donc :

$$\measuredangle \text{ dans } g_k(\dot{\gamma}(p),\dot{\delta}(p)) \leqslant \text{angle en } \bar{p} \text{ de } \{\bar{p},\bar{q},\bar{r}\}.$$

Comme ceci a lieu pour tout k assez grand, on obtient bien le lemme par passage à la limite.

5. Lemme du fuseau de courbure 1.

Soient deux points $p, q \in M$ *tels que* $d(p,q) = \pi$ *et supposons qu'il existe deux segments* γ, δ *de* p *à* q *tels que* $\dot{\gamma}(p) \neq \pm \dot{\delta}(p)$. *Alors :*

(i) *pour tous* $\lambda, \mu \geqslant 0$ *la géodésique issue de* p, *et dont le vecteur tangent en* p *est égal au vecteur* $\lambda.\dot{\gamma}(p) + \mu.\dot{\delta}(p)$ *normé, est un segment joignant* p *à* q.

(ii) *la réunion des segments ci-dessus, lorsque* λ, μ *parcourent les réels positifs ou nuls, est une surface* S *de* M *qui est isométrique à tout fuseau de la sphère* $S^2(1)$ *qui a même angle que* $\sphericalangle(\dot{\gamma}(p),\dot{\delta}(p))$.

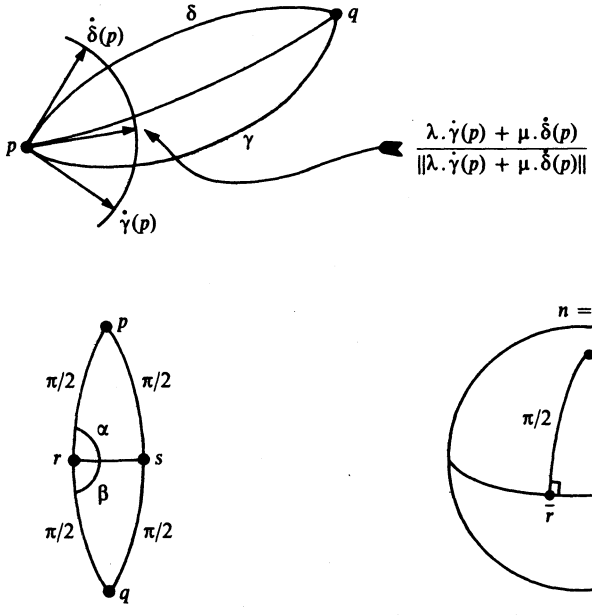

Fig. 3.

Preuve. — *a*) Soient r, s les milieux de γ, δ. Les deux triangles $\{r,p,s\}$ et $\{r,q,s\}$ vérifient les hypothèses du lemme de comparaison 4 avec la courbure 1 pour leur angle en r. En regardant sur $S^2(1)$, on voit que les angles en r de ces deux triangles, soient α et β, vérifient $\alpha \leqslant \pi/2$ et $\beta \leqslant \pi/2$. Or $\alpha + \beta = \pi$. On a donc $\alpha = \beta = \pi/2$.

b) Avec les notations du *a*), mettons un point quelconque t sur δ entre p et s. Appliquons le lemme 4 aux deux triangles $\{p,r,t\}$ et $\{r,t,s\}$

pour leur angle en r d'abord. Si l'on accole, dans $S^2(1)$, deux triangles $\{\bar{p},\bar{r},\bar{t}\}$ et $\{\bar{r},\bar{t},\bar{s}\}$ à côtés respectivement égaux à ceux de $\{p,r,t\}$ et $\{r,t,s\}$, ceci le long de leur côté $[\bar{r},\bar{t}]$, et comme

$$d(p,s) \leqslant d(p,t) + d(t,s) = d(p,t) + d(t,s) = \pi/2,$$

on voit que l'angle des segments $[r,p]$ et $[r,s]$ en r est toujours strictement inférieur à $\pi/2$, sauf si s est sur l'équateur de p et si t est sur le segment $[p,s]$. Il en résulte donc que les angles en r de $\{p,r,t\}$, $\{r,t,s\}$ sont égaux à ceux en $\bar{r}$ de $\{\bar{p},\bar{r},\bar{t}\}$, $\{\bar{r},\bar{t},\bar{s}\}$. Noter en outre que ceci implique que le vecteur vitesse du segment de r à t est une combinaison linéaire de ceux des segments $[r,p]$ et $[r,s]$.

Mais en raisonnant de même avec les angles en t de ces deux triangles, on voit que les deux angles en t sont égaux aux angles en t sur $S^2(1)$. Ceci ayant lieu pour tout t du segment $[p,s]$, en faisant tendre t vers p sur $[p,s]$ on voit que l'angle $\measuredangle(\dot{\gamma}(p),\dot{\delta}(p))$ est le même que sur $S^2(1)$, donc égal à $d(r,s)$.

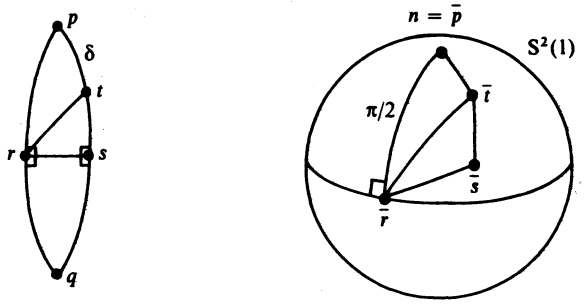

Fig. 4.

c) Soit w quelconque sur le segment $[r,s]$. Je dis d'abord que

$$d(p,w) = d(q,w) = \pi/2,$$

donc, puisque $d(p,q) = \pi$, la réunion des segments $[p,w]$ et $[w,q]$ est un segment, *noté* η, de p à q. Appliquons en effet le lemme 4 au triangle $\{p,r,w\}$; comme on sait que son angle en r vaut $\pi/2$, d'après le *a*), c'est que $d(p,w) \geqslant \pi/2$. Mais si l'on regarde alors son angle en w, il doit alors au contraire être $\leqslant \pi/2$. Ceci étant aussi vrai pour le triangle $\{p,w,s\}$ et son angle en w, comme la somme des deux angles en w est exactement π, c'est qu'il y a égalité partout, ce qu'il fallait démontrer.

d) Maintenant on peut appliquer la fin du *b*) aux paires $\{\gamma,\eta\}$ et $\{\eta,\delta\}$

(au lieu de la paire $\{\gamma,\delta\}$). On aura alors :

$$\sphericalangle(\dot\gamma(p),\dot\eta(p)) = d(r,w), \qquad \sphericalangle(\dot\eta(p),\dot\delta(p)) = d(w,s),$$
$$\sphericalangle(\dot\gamma(p),\dot\delta(p)) = d(r,s) = d(r,w) + d(w,s).$$

C'est donc que $\dot\eta(p)$ est combinaison linéaire de $\dot\gamma(p)$ et $\dot\delta(p)$.

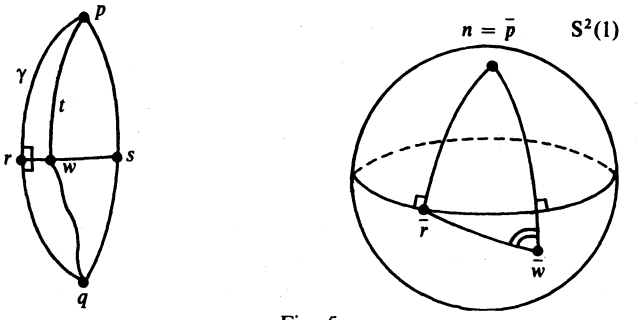

Fig. 5.

e) Pour montrer enfin que S est isométrique à une partie de $S^2(1)$, il suffit d'appliquer le *b*) à tout point t de S pour la paire $\{\gamma,\eta\}$ si t est sur η. Les distances $d(r,t)$ et $d(p,t)$ étant données, l'angle en t sera le même que sur $S^2(1)$ pour les mêmes distances, ce qui implique bien l'isométrie. On aura remarqué au passage en effet que la géodésique portant $[r,t]$ est toujours dans le même sous-espace vectoriel de dimension 2 de T_rM d'après le *b*).

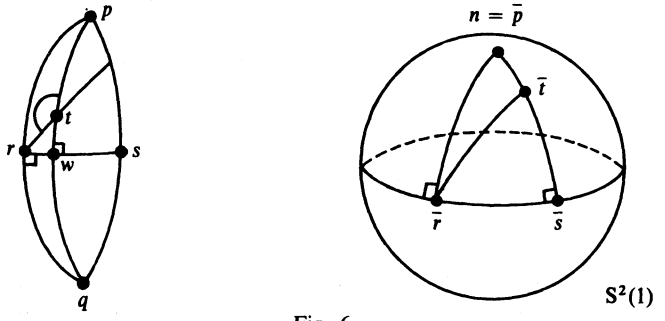

Fig. 6.

6. Lemme sur le cut-locus.

D'après le 2 le cut-locus $C(p)$ de tout point p de (M,g) est constitué par l'ensemble des points situés à une distance de p égale à π. Nous

avons en vue de montrer que $C(p)$ est, pour tout point p de M, une sous-variété totalement géodésique de (M,g) et que, en tout $q \in C(p)$, l'ensemble des vecteurs tangents en q aux segments joignant p à q constitue exactement l'orthogonal dans T_qM de l'espace tangent en q à $C(p)$. Chemin faisant on démontrera que toutes les géodésiques de (M,g) sont périodiques, de plus petite période égale à 2π.

PREMIER SOUS-LEMME. — *Pour tout p de (M,g), son cut-locus $C(p)$ est une partie fortement convexe de (M,g), c'est-à-dire que, quels que soient q, $r \in C(p)$, tout segment de q à r est contenu dans $C(p)$.*

Preuve. — Sinon en effet un segment γ de q à r possèdera un point s dont la distance à p est minimum et strictement inférieure à π. D'après 2.(i), l'angle en s d'un triangle $\{p,s,q\}$ vaut $\pi/2$; le lemme 3 fournit alors la contradiction $d(p,q) < \pi$. C.Q.F.D.

Fig. 7.

Appelons *dimension de $C(p)$ en q, notée* $\dim_q C(p)$, la dimension du sous-espace vectoriel de T_qM engendré par les vecteurs tangents en q aux segments joignant q aux points de $C(p)$ autres que q.

DEUXIÈME SOUS-LEMME. — *La dimension de $C(p)$ est une constante k, comprise entre 1 et $n-1$.*

Preuve. — Soient q, $r \in C(p)$ avec $d(q,r) < \pi$; comme l'application exponentielle $\exp_q$ est de rang maximum sur la boule ouverte $B(0_q,\pi)$ de rayon π de T_qM, la forte convexité de $C(p)$ montre que $\dim_q C(p) \geqslant \dim_r C(p)$. En échangeant les rôles de q et r on voit que $\dim_\cdot C(p)$ est constante sur les boules ouvertes de rayon π, donc partout.

Cette constante ne peut valoir 0, car sinon $C(p)$ serait réduit à un point et M serait homéomorphe à une sphère. Elle ne peut valoir non plus n, car le sous-lemme suivant, par exemple, montre qu'il y aurait des points où $C(p)$ serait un ouvert de M, et donc où n'arriverait aucune géodésique venant de p.

TROISIÈME SOUS-LEMME, — *L'ensemble des points de* $C(p)$ *où* $C(p)$ *est localement une sous-variété (totalement géodésique et de dimension* k*) de* M *est partout dense dans* $C(p)$.

Preuve. — La forte convexité de $C(p)$ (premier sous-lemme) et le fait que l'application exponentielle $\exp_q$ est de rang maximum près de q montrent que. dans toute boule suffisamment petite de centre q, il y a des points r où $C(p)$ contient une sous-variété locale en r et de dimension k de M. Comme $C(p)$ est fortement convexe et que $\dim_r C(p) = k$, c'est donc que, localement en r, tout $C(p)$ se réduit à cette sous-variété.

QUATRIÈME SOUS-LEMME. — *En un point* q *de* $C(p)$ *où* $C(p)$ *est localement une sous-variété, l'ensemble des vecteurs tangents en* q *aux segments joignant* p *à* q *constitue exactement l'orthogonal* $(T_qC(p))^\perp$ *de* $T_qC(p)$ *dans* T_qM.

Preuve. — Soit u un vecteur tangent unitaire à M en q et qui est orthogonal à $T_qC(p)$. Mettons un point r sur la géodésique $\exp_q(\mathbf{R}.u)$ à distance ε de q; et soit γ un segment de p à r. Si le prolongement $\bar{\gamma}$ de γ ne contient pas $\exp_q(\mathbf{R}.u)$ l'inégalité stricte du triangle montre que $d(p,r) > \pi - \varepsilon$. Soit q' le point situé à distance π de p sur $\bar{\gamma}$; on a à la fois $q' \in C(p)$ et $d(r,q') < \varepsilon$. Le lemme 4 appliqué au triangle $\{q,q',r\}$

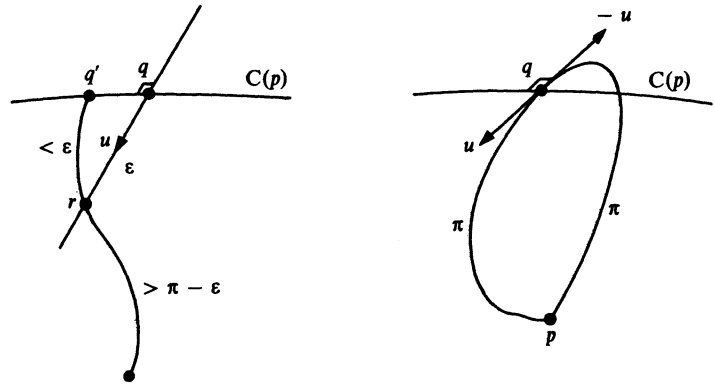

Fig. 8.

montre que $d(q',r) > \varepsilon$ compte tenu de ce que son angle en q vaut $\pi/2$ par hypothèse. Cette contradiction montre bien que $\exp_q(\mathbf{R}.u)$ passe par p.

LEMME. — *Toutes les géodésiques de* (M,g) *sont périodiques, de plus petite période* 2π, *et le cut-locus* $C(p)$ *de tout point* p *est une sous-variété totalement géodésique de* (M,g).

Preuve. — Plaçons-nous d'abord en un point q de $C(p)$ où $C(p)$ est localement une sous-variété. Le quatrième sous-lemme montre qu'une géodésique qui part de p et passe par q repasse par p au bout du temps 2π. Cette géodésique ne peut pas avoir d'angle en p à cause de l'inégalité stricte du triangle. Elle est donc périodique. La densité du sous-lemme troisième et le fait d'être périodique de plus petite période 2π pour une géodésique étant stable par passage à la limite, on en déduit la première assertion du lemme.

Soient maintenant q et r distincts quelconques dans $C(p)$. Soit γ une géodésique quelconque contenant q et r; d'après ce qui précède elle est périodique de période 2π. Je dis que cela entraîne qu'elle est toute entière dans $C(p)$. Sinon en effet il existerait un point s sur γ à distance minima inférieure à π de p. L'une des distances $d(s,q)$, $d(s,r)$ est inférieure à π, soit $d(s,q)$ par exemple; mais alors le lemme 3, appliqué au triangle $\{p,q,s\}$, dont l'angle en s est droit par la propriété de minimum de distance à p, fournit la contradiction $d(p,q) < \pi$.

Puisque $C(p)$ est fortement convexe (premier sous-lemme) et contient la géodésique entière joignant deux de ses points, c'est bien une sous-variété.

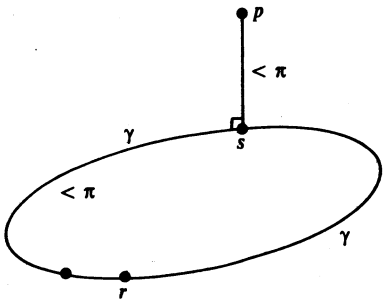

Fig. 9.

7. Lemme des droites projectives.

Soient p, q *tels que* $d(p,q) = \pi$. *Alors l'ensemble des segments de* p *à* q *forme une sous-variété de* (M,g), *totalement géodésique et isométrique à*

la sphère $S^{n-k}(1)$ *de dimension* $n-k$ *et de courbure égale à* 1, *où* k *désigne la dimension de la sous-variété* $C(p)$ *(lemme sur le cut-locus). On* notera $\Sigma(p,q)$ *cette sphère. En outre l'entier* k, *dimension de* $C(p)$, *est une constante sur* M.

Preuve. — L'ensemble $\Sigma(p,q)$ forme bien une sphère d'après le quatrième sous-lemme du 6, et bien de dimension $n-k$, celle de l'orthogonal $(T_qC(p))$. Le lemme 5 montre que cette sphère est bien isométrique à $S^{n-k}(1)$.

Soient maintenant deux points p', q' antipodes sur $\Sigma(p,q)$. Comme $\Sigma(p,q)$ est isométrique à $S^{n-k}(1)$, il s'ensuit que p' et q' sont joints par ∞^{n-k-1} segments de longueur π de $\Sigma(p,q)$, qui sont donc aussi des segments de longueur π de (M,g) parce que $d(p',q') = \pi$. Ainsi d'abord $\Sigma(p,q)$ est-elle bien totalement géodésique. Mais ceci montre aussi que la dimension du cut-locus $C(p')$ de p' est égale à k, celle de $C(p)$. De proche en proche, la dimension de tous les cut-locus dans (M, g) vaut bien ce même k.

8. Lemme sur les plans projectifs réels de courbure 1/4.

Soient $p \in M$, $q \in C(p)$, δ *une géodésique périodique quelconque contenue dans* $C(p)$ *et passant par* q *et enfin* γ *un segment de* p *à* q. *Alors, si* $P \subset T_qM$ *est le sous-espace vectoriel de dimension* 2 *de* T_qM *engendré par les vecteurs-vitesses en* q *de* γ *et de* δ, *l'image* $\exp_q(P)$ *est une sous-variété totalement géodésique de dimension* 2 *de* M, *isométrique au plan projectif réel de courbure* 1/4.

Preuve. — *a*) On définit une application F de $\exp_q(P)$ sur l'hémisphère nord de $S^2(1/4)$ à l'aide de $\exp_q^{-1}$, d'un isomorphisme euclidien $T_qP \to T_n(S^2(1/4))$, où n est le pôle nord de $S^2(1/4)$ et de $\exp_n$.

b) Soit θ une géodésique quelconque de longueur π de $S^2(1/4)$ issue de $E^{-1}(p)$ et $F^{-1}(\theta)$ sa contre-image dans $\exp_q(P)$. Alors $F^{-1}(\theta)$ joint p à un point s de δ et le lemme 3 dit que longueur de $F^{-1}(\theta) \leqslant$ longueur de $\theta = \pi$. Mais longueur de $F^{-1}(\theta) \geqslant d(p,s) = \pi$. Il y a donc égalité et $F^{-1}(\theta)$ est en fait une géodésique de M et de $\exp_q(P)$.

c) Pour un point quelconque t de $F^{-1}(\theta)$ on voit, de façon analogue au point *b*) du lemme 5, que l'on a toujours

$$d(p,t) = d(F(p),F(t)), \qquad d(q,t) = d(n,F(t))$$

et que l'angle en t de $F^{-1}(\theta)$ et du segment de t à q est égal à l'angle en $F(t)$ des géodésiques images par F de ces dernières.

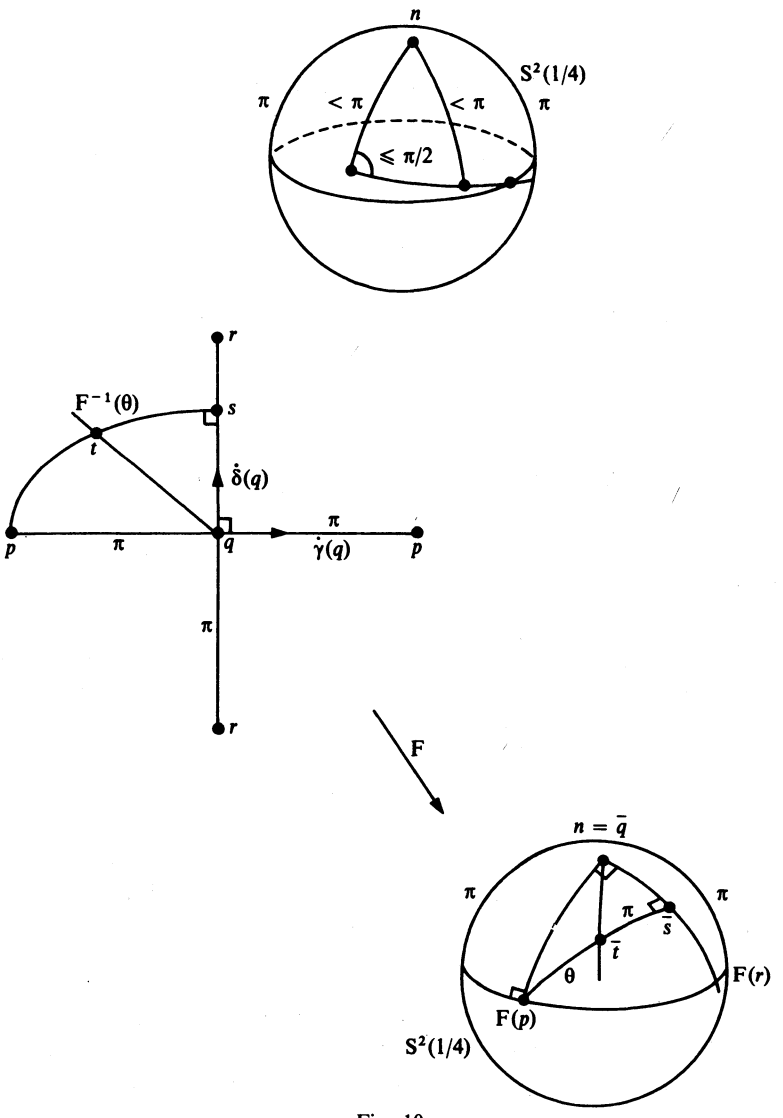

Fig. 10.

d) Le *c*) étant valable sur tout $\exp_q(P)$, on voit, comme dans le *e*) du lemme 5, que F est une isométrie. Enfin $\exp_q(P)$ est totalement géodésique pour des raisons identiques à celle de la démonstration du lemme 7 : les contre-images par F des géodésiques de $S^2(1/4)$ sont des courbes fermées simples de $\exp_q(P)$ et de longueur 2π, donc nécessairement des géodésiques de M.

9. Lemme d'orthogonalité.

Avec les notations du lemme 8, *pour tout* z *de* γ, *les deux sous-variétés* $\Sigma(p,q)$ *et* $\exp_q(P)$ *sont orthogonales en* z.

En effet, d'après la démonstration du lemme 7, si w est l'antipode de z sur $\Sigma(p,q)$ on a $\Sigma(p,q) = \Sigma(z,w)$, en particulier leurs espaces tangents en z sont égaux. Et de même $\exp_q(P) = \exp_z(P')$ pour un P' convenable, d'où l'orthogonalité cherchée.

10. Lemme sur les symétries géodésiques.

Pour tout p *de* M, *la symétrie géodésique* σ_p *autour de* p *est isométrie de* (M,g).

Preuve. — *a*) Plaçons-nous en un z non dans $C(p)$ d'abord et soit γ une géodésique de p à z et q tel que $\Sigma(p,q) \supset \gamma$. Décomposons T_zM en somme directe orthogonale

$$T_zM = T_z(\Sigma(p,q)) \overset{\perp}{\oplus} S_z.$$

La symétrie σ_p conserve $\Sigma(p,q)$ et donc l'application tangente $T_z(\sigma_p)$ est une isométrie, pour la structure riemannienne faible g, de $T_z(\Sigma(p,q))$ sur $T_{z'}(\Sigma(p,q))$, où l'on a posé $z' = \sigma_p(z)$.

b) Par ailleurs d'après le lemme 9 on peut engendrer S_z par les $T_z(\exp_q(P))$ pour des P convenables de T_qM. Comme σ_p conserve tout tel $\exp_q(P)$, en fait induit dessus une isométrie, on voit que $T_z(\sigma_p)$: $S_z \to S_{z'}$ est aussi une isométrie. Finalement la décomposition orthogonale montre que $T_z(\sigma_p)$ est une isométrie de tout T_zM sur tout $T_{z'}M$.

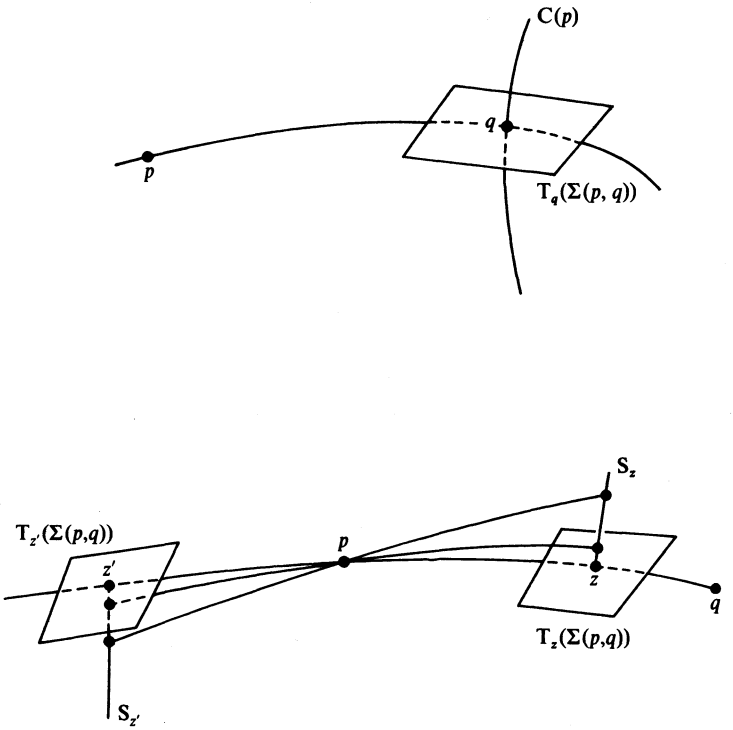

Fig. 11.

c) En $q \in C(p)$, les choses sont simples : $T_q(\sigma_p)$ est l'identité sur l'espace tangent en q à $C(p)$ et l'opposée de l'identité sur $T_q(\Sigma(p,q))$. Comme ces deux sous-espaces forment une somme directe orthogonale de T_qM, c'est terminé.

11. Proposition finale.

La variété riemannienne faible (M,*g*) *est en fait une variété riemannienne* C^∞ *et isométrique à un espace riemannien symétrique de rang* 1.

Preuve. — Comme M est un espace métrique compact pour d, son groupe d'isométries G est localement compact pour la topologie compacts-ouverts, cf. par exemple [8], th. 4.7, p. 46.

Par ailleurs, chaque symétrie de (M,*g*) est C^1 d'après [8], th. 3.10, p. 169 ou [9]. Donc G est un groupe de Lie d'après [8], th. 4.6, p. 45. Mais

G est transitif car il contient toutes les symétries géodésiques d'après le lemme 10.
Donc M est en fait C^∞ ainsi que g; et l'on est par exemple ramené au théorème classique de rigidité; ou bien voir directement que (M,g) est un espace symétrique de rang 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, Les variétés riemanniennes 1/4-pincées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 14 (1960), 161-170.
[2] I. CHAVEL, *Riemannian Symmetric Spaces of Rank one*, Marcel Dekker, 1972.
[3] J. CHEEGER et D. EBIN, *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, 1975.
[4] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.
[5] M. GROMOV, Curvature, diameter and Betti numbers, *Comm. Math. Helvetici*, 56 (1981), 179-195.
[6] H.-M. HUANG, Some remarks on the pinching problem, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, 9 (1981), 321-340.
[7] D. HULIN, Le second nombre de Betti d'une variété riemannienne (1-ε)-pincée de dimension 4, *Ann. Inst. Fourier*, 33, 2 (1983).
[8] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, volume 1, Interscience 1969.
[9] R. PALAIS, On the differentiability of isometries, *Proc. A.M.S.*, 8 (1957), 805-807.
[10] T. SAKAI, On a theorem of Burago-Toponogov, à paraître.

Manuscrit reçu le 16 août 1982.

Marcel BERGER,
Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
Tour 45-55, 5e étage
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05.