ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Pseudo-laplaciens II

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 2 (1983), p. 87-113

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_87_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 2 (1983), 87-113.

PSEUDO-LAPLACIENS II

par Yves COLIN DE VERDIERE

Dans cet article, nous étudions dans le même esprit que dans [7] une famille d'opérateurs auto-adjoints construits à partir du laplacien riemannien. Ces opérateurs, notés Δ_a, où a est un paramètre réel, ont été introduits et utilisés par Lax et Phillips [19] dans le même contexte, i.e. l'étude de la théorie spectrale du laplacien (noté ici Δ_∞) sur une surface de Riemann d'aire finie dont nous supposerons ici, pour la commodité de la rédaction, qu'elle ne possède qu'une seule pointe ayant une métrique hyperbolique (i.e. à courbure constante négative) au voisinage de l'infini.

L'opérateur Δ_a est l'opérateur auto-adjoint associé par le procédé de Friedrichs à la forme quadratique $q(f) = \int_X \|df\|^2$ restreinte au sous-espace des fonctions dont le zéro -ième coefficient de Fourier est nul pour $y \geqslant a$; géométriquement, cela signifie qu'on impose à f d'être de moyenne nulle sur les horicycles (H_t) pour $t \geqslant a$. Il se trouve que les Δ_a fournissent une très bonne approximation de Δ_∞, et qu'ils ont l'avantage d'être à résolvante compacte et donc à spectre discret : on peut donc leur appliquer les méthodes habituelles pour les opérateurs elliptiques sur les variétés compactes : théorie des perturbations, formules de traces.

Les résultats obtenus dans cet article au moyen de l'utilisation de ces opérateurs sont les suivants :

- Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein (fonctions propres généralisées associées à la partie continue du spectre de Δ_∞) annoncée dans [8], mais reproduite ici pour la commodité du lecteur.

- La preuve que, pour une perturbation générique de la métrique dans un ouvert relativement compact de la variété X, le laplacien Δ_∞ n'a

qu'un nombre fini de valeurs propres toutes situées dans $\left[0, \frac{1}{4}\right[$ et même l'existence de variétés X n'ayant que 0 comme valeur propre. Ceci est à comparer au cas où X est hyperbolique, i.e. $X = \Gamma\backslash H$ où Γ est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbf{R})$, où l'on conjecture qu'il y a toujours une infinité de valeurs propres [27].

• Une preuve, voisine de celle donnée par Lax et Phillips [19], d'un résultat démontré récemment dans le cadre des espaces localement symétriques à courbure négative par Donnelly [10] du fait que si $\nu_0 = 0 < \nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n \leqslant \ldots$ sont les valeurs propres de Δ_∞, on a :

$$\limsup_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \operatorname{Card} \{n | \nu_n \leqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{4\pi} \operatorname{aire}(X).$$

Cette preuve doit permettre d'attaquer un cas plus général en ce sens qu'elle est basée sur le principe du minimax qui n'utilise que des estimations C^0 sur la métrique, alors que la démonstration de Donnelly nécessite des estimations précises sur le noyau de l'équation de la chaleur.

• Nous étudions ensuite la propagation des singularités pour le groupe à un paramètre engendré par $\sqrt{\Delta_a - \frac{1}{4}}$ et donnons dans ce cas l'analogue de la relation de Poisson pour les variétés riemanniennes compactes avec ou sans bord [4], [11], [13].

• Enfin, dans un dernier paragraphe, nous étudions la relation entre ceci et les travaux de Hejhal [16] : dans le cas où l'on a $X = PSL_2(\mathbf{Z})\backslash H$ et $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, il ne nous semble pas impossible que le spectre de $\Delta_{\sqrt{3}/2}$ contienne les pseudo-valeurs propres introduites par Hejhal, i.e. les $s(1-s)$ tels que $\zeta_K(s) = 0$, où ζ_K est la fonction zêta de Dedekind du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, cela impliquant l'hypothèse de Riemann. Nous donnons plusieurs raisons permettant de soutenir cette conjecture pour le moins optimiste.

1. Les opérateurs Δ_a.

Soit X une variété riemannienne complète; à tout sous-espace fermé $\mathscr{H}$ de l'espace de Sobolev $H^1(X)$ des fonctions de carré intégrable et dont le gradient est de carré intégrable au sens de la métrique de X, on peut associer un opérateur autoadjoint positif $\Delta_{\mathscr{H}}$ sur l'adhérence $\bar{\mathscr{H}}$ de $\mathscr{H}$ dans

$L^2(X)$: c'est l'opérateur associé par le procédé de Friedrichs à la restriction à $\mathscr{H}$ de la forme quadratique $q(f) = \int_X \|\text{grad } f\|^2$. Le domaine de $\Delta_{\mathscr{H}}$ est l'ensemble des g de $\mathscr{H}$ telles qu'il existe $T \in H^{-1}(X)$, orthogonale à $\mathscr{H}$ telle que $\Delta g - T$ soit dans $\mathscr{H}$, où Δ désigne le laplacien opérant au sens des distributions. On pose alors $\Delta_{\mathscr{H}} g = \Delta g - T$.

Remarques. — *a*) On n'a pas en général $D(\Delta_{\mathscr{H}}) = H^2(X) \cap \mathscr{H}$; c'est le cas seulement si $\mathscr{H}$ décompose Δ dans la théorie spectrale usuelle du laplacien sur X.

b) Dans la suite, les espaces $\mathscr{H}$ seront indexés par un paramètre réel positif a. On notera $\mathscr{H}_a$, Δ_a les objets définis plus haut; on posera $\mathscr{H}_\infty = H^1(X)$, Δ_∞ est alors le laplacien usuel, qu'on distinguera soigneusement de Δ qui est le laplacien au sens des distributions sur X.

Soit maintenant X une variété riemannienne de dimension 2 avec une pointe hyperbolique : X est de la forme $X_0 \cup X_1$ où X_0 est compact et X_1, la pointe, est isométrique à $]b, +\infty[\times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, muni des coordonnées $(y, x \bmod 1)$ et équipé de la métrique $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Par exemple, $X = \Gamma\backslash H$ où H est le demi-plan de Poincaré et Γ un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbf{R})$ choisi de façon que $\text{vol}(X) < +\infty$ et que les éléments paraboliques de Γ sont les éléments de la forme $\gamma\gamma_\infty\gamma^{-1}$ avec γ_∞ dans $\Gamma_\infty (\gamma_\infty \neq \text{Id})$ et γ dans Γ avec $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbf{Z} \right\}$. A toute distribution f sur X est associée son zéro-ième coefficient de Fourier $f_0 \in \mathscr{D}'(]b, +\infty[)$: si $\pi : X_1 \to]b, +\infty[$ est la projection $\pi(x,y) = y$, on a $\langle f_0 | \varphi \rangle = \langle f | \varphi \circ \pi \rangle$, i.e. $f_0 = \pi_*(f)$. Si $X = \Gamma\backslash H$, f_0 est même définie comme distribution sur $]0, +\infty[$, car les distributions sur X s'identifient aux distributions Γ-périodiques, et donc Γ_∞-périodiques, sur H.

On pose alors $\mathscr{H}_a = \{ f \in H^1(X) \mid f_0|_{]a,+\infty[} = 0 \}$. (En général, on a $b \leqslant a$; mais si $X = \Gamma\backslash H$, on peut prendre $a \geqslant 0$ quelconque). Géométriquement, dire que f est dans $\mathscr{H}_a$ signifie que la moyenne de f sur les horicycles $(H_t)_{t \geqslant a}$ est nulle, où $H_t = \{(x,y) \in X_1 | y = t\}$.

Remarque. — Si $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, on peut prendre $b = 1$, comme on le voit aisément sur la construction usuelle du domaine modulaire; si Γ est sans éléments elliptiques, on peut prendre $b = \dfrac{1}{2}$ [24].

Précisons le domaine du pseudo-laplacien $\Delta_a (a > b)$:

THÉORÈME 1. — *Le domaine de* Δ_a *est l'ensemble des* f *de* $\mathscr{H}_a$ *telles qu'il existe* $C \in \mathbf{C}$ *vérifiant* $\Delta f - CT_a \in L^2(X)$, *où* $T_a \in \mathscr{D}'(X)$ *est définie par* $\langle T_a | g \rangle = g_0(a)$.

Dans le cas $a \leqslant b$, la caractérisation précédente n'est plus valable : il peut y avoir à prendre en compte d'autres distributions sur $\mathscr{H}_a$.

Preuve du théorème 1. — Soit $D_a = X_0 \cup \{(x,y) \in X_1 | y < a\}$. On a $C_0^\infty(D_a) \subset \mathscr{H}_a$ et donc, si $T \in H^{-1}(X)$ est orthogonale à $\mathscr{H}_a$, on a $T_{|D_a} = 0$. De plus, si

$$T_{|X_1} = \sum_n T_n(y) e^{2\pi i n x}, \qquad \text{avec} \qquad T_n \in \mathscr{D}'(]b, +\infty[),$$

on voit facilement que $T_n = 0$ pour $n \neq 0$ et donc $T = T_0(y)$ avec Support $(T_0) \subset [a, +\infty[$. De l'égalité $\Delta f - T \in \mathscr{H}_a$, où $f \in \mathscr{H}_a$, on déduit d'autre part que $T_{0_{]a,+\infty[}} = 0$ et donc Support $T \subset H_a$. Cela prouve que $T = C\,\delta(y-a) + C_1\,\delta'(y-a) + \cdots$ et comme $T \in H^{-1}(X)$, on voit que $C_1 = \cdots = 0$. Donc $T = CT_a$.

2. Les séries d'Eisenstein.

On a le :

THÉORÈME 2. — *Les opérateurs* Δ_a *sont autoadjoints et à résolvante compacte.*

La preuve de ceci est essentiellement donnée dans [19], p. 206 et suivantes.

THÉORÈME 3. — *Soit* $h(y)$ *une fonction* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^+$, *égale à* 0 *pour* $y \leqslant b'$ (avec $b' > b$) *et à* 1 *pour* $y \geqslant b + 1$; *soit*

$$\Omega = \left\{ s \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2} \text{ et } s(1-s) \notin \text{spectre } (\Delta_\infty) \right\}.$$

Pour s *dans* Ω, *il existe une fonction* $E(z,s)$ *unique telle que :*

$$\begin{cases} \text{(i)} & (\Delta - s(1-s)) \ldots E(\cdot, s) = 0, \\ \text{(ii)} & E(z,s) - h(y) y^s \in L^2(X). \end{cases}$$

L'application $s \mapsto E(z,s)$ *est holomorphe sur* Ω.

Preuve. — On écrit $E(z,s) = h(y)y^s + g(z,s)$ avec $g(\cdot,s) \in L^2(X)$. Appliquant $\Delta - s(1-s)$ aux deux membres, il vient (en posant $H(z,s) = (s(1-s)-\Delta)(h(y)y^s)$:

$$(\Delta - s(1-s))g(\cdot,s) = H(\cdot,s),$$

où $H(\cdot,s)$ est C^∞ à support compact dans X et dépend holomorphiquement de $s \in \mathbf{C}$. On en déduit $g \in H^2(X)$ et comme $s(1-s)$ n'appartient pas au spectre de Δ_∞, on a :

$$g(\cdot,s) = (\Delta_\infty - s(1-s))^{-1}(H(\cdot,s)).$$

L'holomorphie de la résolvante permet de conclure.

DÉFINITION . — $E(\cdot,s)$ *est la série d'Eisenstein de paramètre* s.

Si $X = \Gamma\backslash H$, la fonction définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$E(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty\backslash\Gamma} [\mathrm{Im}\,(\gamma z)]^s$$

a la propriété caractéristique annoncée précédemment.

Nous allons montrer que l'utilisation des pseudo-laplaciens Δ_a permet d'obtenir rapidement le prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ des séries d'Eisenstein ([8]). Lorsque $s \in \Omega$, on a $E_0(z,s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s}$ où $\varphi(s)$ est holomorphe sur Ω et vérifie $\varphi(\bar{s}) = \overline{\varphi(s)}$. On va prouver le :

THÉORÈME 4. — *L'application* $s \mapsto E(\cdot,s)$ *de* Ω *dans* $C^\infty(X)$ *se prolonge en une application méromorphe sur* $\mathbf{C}$, *sans pôles sur* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ *et on a les équations fonctionnelles :*

$$\begin{cases} \text{(i)} & E(z,s) = \varphi(s)E(z,1-s) \\ \text{(ii)} & \varphi(s)\varphi(1-s) = 1. \end{cases}$$

Preuve. — Fixons $a \geqslant b + 1$ et posons pour $s(1-s) \notin \mathrm{Spectre}\ (\Delta_a)$, $F(z,s) = h(y)y^s - (s(1-s)-\Delta_a)^{-1}(H(z,s))$. Comme Δ_a est à résolvante compacte et donc à résolvante méromorphe sur $\mathbf{C}$, $F(z,s)$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec d'éventuels pôles lorsque $s(1-s)$ est valeur propre de Δ_a. Pour $b < y < a$, on a $F_0(z,s) = A(s)y^s + B(s)y^{1-s}$, où

$A(s)$ et $B(s)$ sont des fonctions méromorphes de s, $\left(s \neq \frac{1}{2}\right)$, et si on pose :

$$\tilde{F}(z,s) = F(z,s) + \chi_{[a,+\infty[}(y)(A(s)y^s + B(s)y^{1-s} - y^s),$$

on a : $(\Delta - s(1-s))(\tilde{F}(\cdot,s)) = 0$. De plus, pour $y = a$, on a :

$$A(s)a^s + B(s)a^{1-s} = a^s,$$

d'où l'on déduit que A et B ne peuvent être tous deux identiquement nuls. Si $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et $s(1-s) \notin \mathrm{Spectre}\,(\Delta_a)$, on a :

$$\tilde{F}(z,s) = A(s)h(y)y^s + g, \qquad \text{avec} \qquad g \in L^2(X)$$

et donc :

$$\tilde{F}(z,s) = A(s)E(z,s).$$

De même si $\mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ et $s(1-s) \notin \mathrm{Spectre}\,(\Delta_a)$, on a :

$$\tilde{F}(z,s) = B(s)E(z,1-s).$$

D'où l'on déduit le prolongement méromorphe de $E(\cdot,s)$ et les équations fonctionnelles.

L'absence de pôles sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ se prouve de la façon suivante : si $\hat{E}(z,s) = E(z,s) - \chi_{[a,+\infty[}(y)E_0(y,s)$, on a, pour $r \in \mathbf{R}$, $\left\|\hat{E}\left(\cdot;\frac{1}{2}+ir\right)\right\|^2_{L^2(X)} = 2\log a - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)\left(\frac{1}{2}+ir\right) - \frac{1}{r}\,\mathrm{Im}\left(\varphi\left(\frac{1}{2}+ir\right)a^{-2ir}\right)$, (relation de Maass-Selberg, cf. [17], p. 21). Et comme $\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+ir\right)\right| = 1$, on voit que $\hat{E}$ et donc E n'a pas de pôles sur $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

3. Le spectre de Δ_a.

Dans la suite, on note $\Lambda_0 = 0 < \Lambda_1 < \cdots < \Lambda_N < \frac{1}{4}$ les valeurs propres de Δ_∞ associées à une fonction propre dont le zéro-ième

coefficient de Fourier n'est pas nul et $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ la suite (finie ou infinie) des autres valeurs propres de Δ_∞. On a le :

THÉORÈME 5. — *Le spectre de* Δ_a *est la réunion avec égalité des multiplicités des deux suites suivantes :*

1) *les valeurs propres de type* (I) *qui sont les* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, *les fonctions propres associées étant celles de* Δ_∞.

2) *Les valeurs propres de type* (II) *qui forment une suite*

$$0 < \mu_0(a) \leqslant \mu_1(a) \leqslant \ldots$$

ayant les propriétés suivantes :

(i) *chaque* $\mu_j(a)$ *est une fonction décroissante de* a;

(ii) *lorsque* $a \geqslant b$, *les* $\mu_j(a)$ *sont de multiplicité* 1 *et données par* $\mu_j(a) = s_j(1-s_j)$ *où les* s_j *vérifient : soit* $\operatorname{Im} s_j \geqslant 0$, $\operatorname{Re}(s_j) \geqslant \frac{1}{2}$, $s_j \neq \frac{1}{2}$ *et* $a^{s_j} + \varphi(s_j)a^{1-s_j} = 0$, *soit*

$$s_j = \frac{1}{2}\left(\mu_j(a) = \frac{1}{4}\right), \qquad si \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1, \qquad \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = -2\operatorname{Log} a.$$

Les fonctions propres associées étant

$$\hat{E}(\cdot,s_j)\left(s_j \neq \frac{1}{2}\right) \qquad et \qquad \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=\frac{1}{2}} \hat{E}(\cdot,s)\left(s_j = \frac{1}{2}\right).$$

$\left(On\ notera\ s_j = \frac{1}{2} + ir_j(a)\right)$.

(iii) *On a, pour* $a \geqslant b$,

$$\Lambda_0 = 0 < \mu_0(a) < \Lambda_1 < \mu_1(a) < \cdots < \Lambda_N < \mu_N(a)$$

et, lorsque $a \to +\infty$, *on a : pour* $0 \leqslant j \leqslant N$, $\lim_{a\to+\infty} \mu_j(a) = \Lambda_i$ *et pour* $j \geqslant N+1$, $\lim_{a\to+\infty} \mu_j(a) = \frac{1}{4}$.

Remarques. — *a*) Lorsque $a < b$, on n'a guère de renseignements sur la suite $\mu_i(a)$ autres que (i), i.e. $\mu_j(a) \geqslant \mu_j(b)$. Voir cependant le § 7, pour une conjecture dans le cas $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Le (iii) exprime la convergence lorsque $a \to +\infty$ du spectre de Δ_a vers celui de Δ_∞ : en fait, il y a convergence forte des résolvantes, et cela permettrait de faire la décomposition spectrale de Δ_∞ en suivant exactement ce qui est fait habituellement pour la théorie spectrale des opérateurs de Sturm-Liouville sur $[a,+\infty[$ [6].

Preuve. — Le (i) est la conséquence immédiate de la caractérisation de la i-ème valeur propre d'un opérateur autoadjoint positif à résolvante compacte au moyen du minimax et du fait que :

$$(a \leqslant a') \Rightarrow (\mathscr{H}_a \subset \mathscr{H}_{a'}).$$

Le (iii) résulte de la densité de $\bigcup_{a \geqslant b} \mathscr{H}_a$ dans $H^1(X)$ et du minimax.

Dans (ii), la partie directe est aisée : il est clair que les $\hat{E}(z,s_j)$ sont dans le domaine de Δ_a et vérifient $(\Delta_a - s_j(1-s_j))\hat{E} = 0$. Il reste à prouver qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres, $\left(\text{sauf peut-être } \mu_j = \frac{1}{4}\right)$.

Soit $\hat{F}(z)$ la fonction propre associée à $\mu_j(a) = s_j(1-s_j)\left(\neq \frac{1}{4}\right)$ et supposons $\hat{F}_0 \not\equiv 0$; si $F(z) = \hat{F}(z) + \chi_{[a,+\infty[}(y)\hat{F}_0(y)$ où $\hat{F}_0$ est le prolongement analytique à $y > a$ du coefficient de Fourier de $\hat{F}$, on a : $(\Delta - s_j(1-s_j))F = 0$. Il reste à prouver que $F(z) = C.E(z,s_j)$. Cela peut se voir par un argument de conservation de l'énergie au cours du temps ([19], pp. 202-204).

Pour le cas $s_j = \frac{1}{2}$, si $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ et $2\,\mathrm{Log}\, a + \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, il est clair que $E\left(\cdot, \frac{1}{2}\right) = 0$ et $\frac{d}{ds} E|_{s=\frac{1}{2}} = G \neq 0$: on peut donc construire $\hat{G}$ par troncature du zéro-ième coefficient de Fourier, comme on a construit $\hat{E}$ plus haut.

Réciproquement, si $\frac{1}{4}$ est valeur propre de Δ_a du type (II) ne rentrant pas dans la construction précédente, on dispose de deux solutions de $\left(\Delta - \frac{1}{4}\right) f_i = 0$, $i = 1, 2$ avec $f_i = f_{i,0} +$ fonction L^2; on peut donc supposer $f_{1,0} = y^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Log}\, y$ et $f_{2,0} = y^{\frac{1}{2}}$ (si $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, on a les

solutions $E\left(\cdot,\frac{1}{2}\right)$ et $G\left(\cdot,\frac{1}{2}\right)$; si $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, on a $G\left(\cdot,\frac{1}{2}\right)$ et la fonction propre de Δ_a prolongée analytiquement pour $y \geqslant a$). On pose alors

$$f(z,t) = (f_1(z) - tf_2(z)) - \varphi(ye^{-t})(f_{1,0}(y) - tf_{2,0}(y)).$$

Il est facile de voir que, pour $t \geqslant 0$, $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_z - \frac{1}{4}\right) f = 0$ et que l'énergie

$$e(t) = \int_X \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 + \|\text{grad } f\|^2 \text{ est finie et non constante.}$$

4. Comportement asymptotique des valeurs propres de Δ_a.

Soit C_ℓ le cylindre $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times [0,\ell]$ muni de la métrique euclidienne $dx^2 + dy^2$. Pour $f \in L^2(C_\ell)$, on note f_0 le zéro-ième coefficient de Fourier de f : $f_0(y) = \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} f(x,y)\, dx$.

On note $N_\ell(\lambda)$ le nombre de valeurs propres du problème de Neumann sur la variété à bord C_ℓ qui sont inférieures à λ et telles que la fonction propre φ associée vérifie $\varphi_0 = 0$. On a le :

LEMME 4.1. — $N_\ell(\lambda) \leqslant \frac{\ell}{4\pi}\lambda + \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}$ *si* $\lambda \geqslant 4\pi^2$ *et* $N_\ell(\lambda) = 0$ *si* $\lambda < 4\pi^2$.

Preuve. — Les fonctions propres vérifiant $\varphi_0 \equiv 0$ sont les

$$\varphi_{k,m}(x,y) = \cos\frac{k\pi y}{\ell} \cdot \exp 2i\pi m y \quad \text{avec} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{et} \quad m \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}.$$

La valeur propre associée étant $\lambda_{k,m} = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2} + 4\pi^2 m^2$. On en déduit que $N_\ell(\lambda)$ est inférieur à l'aire du domaine de $\mathbf{R}^2$,

$$\mathscr{D}_\lambda = \left\{\frac{\pi^2}{\ell^2}X^2 + 4\pi^2 Y^2 \leqslant \lambda \,|\, X \geqslant 0\right\} \cup [-1,0] \times \left[-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}, \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\right],$$

en associant à chaque (k,m) tel que $\lambda_{k,m} \leqslant \lambda$ le carré de côté 1 ayant ce point comme sommet supérieur droit si $m \geqslant 1$ (inférieur droit si $m \leqslant -1$): la région recouverte est manifestement contenue dans $\mathscr{D}_X$; on en déduit les estimations annoncées en remarquant par ailleurs que la première valeur propre utile est $\lambda_{0,\pm 1} = 4\pi^2$.

LEMME 4.2. — *Soit* $C_{b_1,b_2} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times [b_1,b_2]$ $(0<b_1<b_2)$ *le cylindre équipé de la métrique hyperbolique* $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$; *le nombre de valeurs propres inférieures à* λ *pour le laplacien avec conditions de Neumann et fonctions propres de zéro-ième coefficient de Fourier nul,* $N_{b_1,b_2}(\lambda)$ *vérifie :*

$$N_{b_1,b_2}(\lambda) \leqslant \frac{\lambda}{4\pi}\cdot\frac{b_2-b_1}{b_1^2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi b_1} \qquad \text{et} \qquad N_{b_1,b_2}(\lambda) = 0$$

si $\lambda \leqslant 4\pi^2 b_1^2$.

Preuve. — On peut en effet comparer les valeurs propres de C_{b_1,b_2} avec celles du cylindre euclidien $C_{b_2-b_1}$ en utilisant le minimax restreint aux fonctions de zéro-ième coefficient de Fourier nul appliqué avec le quotient :

$$\frac{\displaystyle\int \|df\|^2\,dx\,dy}{\displaystyle\int |f|^2\,dx\,dy/y^2} \geqslant b_1^2\cdot\frac{\displaystyle\int \|df\|^2\,dx\,dy}{\displaystyle\int |f|^2\,dx\,dy};$$

d'où $N_{b_1,b_2}(\lambda) \leqslant N_{b_2-b_1}(\lambda/b_1^2)$.

On va en déduire le :

THÉORÈME 6. — *Soit* $N_a(\lambda)$ *le nombre de valeurs propres de* Δ_a *inférieures à* λ $(a \geqslant b)$, *on a :*

$$N_a(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi}\,\text{aire}\,(X).$$

Preuve. — On pose $a_n = a + nh$, $n = 0, 1, \ldots$; on a :

$$\mathscr{H}_a \subset H^1(X_a) \hat{\bigoplus}_{n=0,1,\ldots} \{H^1(C_{a_n,a_{n+1}}) \cap f_0 = 0\}.$$

D'où l'on tire $N_a(\lambda) \leqslant N_a^1(\lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} N_{a_n,a_{n+1}}(\lambda)$ où $N_a^1(\lambda)$ est le

nombre de valeurs propres du laplacien, avec conditions de Neumann sur X_a, inférieures à λ. Donc :

$$N_a(\lambda) \lesssim \frac{\lambda}{4\pi} \operatorname{vol}(X_a) + \frac{\lambda h}{4\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(a+nh)^2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{a+nh},$$

avec $N = 0\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{h}\right)$. D'où l'on tire :

$$N_a(\lambda) \lesssim \frac{\lambda}{4\pi} \operatorname{vol}(X_a) + \frac{\lambda}{4\pi} \int_a^{\infty} \frac{dy}{y^2} + \frac{\lambda}{4\pi} \cdot \frac{h}{a^2} + O_h(\sqrt{\lambda} \operatorname{Log} \lambda).$$

Et donc, en faisant tendre h vers 0^+, $N_a(\lambda) \lesssim \frac{\lambda}{4\pi} \operatorname{vol}(x)$.

L'estimation opposée s'obtient de façon analogue.

COROLLAIRE. — *On a :* $\operatorname{Card}\{\lambda_n \leqslant \lambda\} \lesssim \frac{\lambda}{4\pi} \operatorname{vol}(X)$. (Cf [19], p. 205, [10])

Remarque. — La méthode utilisée ici est essentiellement celle de Lax-Phillips; nous précisons seulement les estimations nécessaires (lemme 4.1 et 4.2); cette méthode nous semble plus aisément généralisable que celle de Donnelly, car elle ne fait pas appel à des estimations délicates sur le noyau de l'équation de la chaleur.

Cas où $X = PSL_2(\mathbf{Z})\backslash H$: soit $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ où ζ est la fonction zêta de Riemann et $A(r) = \operatorname{Arg}(\xi(1+2ir))$, on a les estimations : $A(r) = r \log \frac{r}{\pi e} + O(r \log r)$ ([25], p. 17) et même si on admet l'hypothèse de Riemann (HR), on a un reste en $O((\log r)^{\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ ([25], p. 77). Les $r_j(a)$ $(a \geqslant 1)$ sont alors les zéros réels positifs de $A(r) = \frac{\pi}{2} - r \log a + k\pi$. On déduit ainsi que si $N_a(T) = \operatorname{Card}\{r_j(a) \leqslant T\}$, on a :

$$N_a(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{Ta}{e\pi} + \begin{cases} O(T \log T) \\ O((\log T)^{\varepsilon}) \end{cases} \text{ si on admet (HR).}$$

En particulier $\operatorname{Card}\{\mu_j(a) \leqslant \lambda\} \sim \lambda^{\frac{1}{2}} \log \lambda$ et donc

$$\operatorname{Card}\{\lambda_n \leqslant \lambda\} \sim \frac{\text{aire}(X)}{4\pi} \lambda.$$

5. Le cas générique.

Rappelons qu'on peut distinguer parmi les valeurs propres de Δ_∞ deux types : les valeurs propres $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ telles que la fonction propre associée ait un zéro-ième coefficient de Fourier nul, appelées en anglais « cusp-forms », que nous appellerons valeurs propres de type (C) et les $\Lambda_0 = 0 < \Lambda_1 < \cdots < \Lambda_N < \frac{1}{4}$ en nombre fini et dans $\left[0,\frac{1}{4}\right[$. On peut du reste séparer ces deux types géométriquement : les fonctions propres de type (C) sont les seules à avoir des lignes nodales non bornées.

H. Donnelly [10] a donné récemment une preuve de la formule

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \operatorname{Card}\{\lambda_n \leqslant T\} \leqslant \frac{1}{4\pi} \operatorname{vol}(X)$$

(voir aussi [19] pour une preuve différente).

Nous allons prouver que pour une métrique générique sur X hyperbolique au voisinage de l'infini, Δ_∞ n'a aucune valeur propre de type (C) et donc seulement un nombre fini de valeurs propres, situées dans $\left[0,\frac{1}{4}\right[$. On peut même, en adaptant les méthodes isopérimétriques de Büser [1], montrer l'existence de surface d'aire finie à pointes hyperboliques n'ayant que 0 comme valeur propre, par exemple une petite perturbation générique de la métrique hyperbolique de $S^2\backslash\{A,B,C,\}$.

THÉORÈME 7. — *Soit* K *un compact d'intérieur non vide de* X, *soit* $\mathcal{M}$ *l'ensemble des* f *de* $C_0^\infty(K)$ *telles que le laplacien* Δ_∞ *associé à la métrique* $e^f g_0$ *n'ait aucune valeur propre de type* (C). *Alors* $\mathcal{M}$ *est un résiduel au sens de Baire, c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts partout denses.*

Note. — $C_0^\infty(K) = \{f \in C_0^\infty(X) \mid \text{support}(f) \subset K\}$ est un espace de Fréchet et donc a la propriété de Baire.

Preuve. — La preuve de ce théorème, relativement technique, peut se décomposer en deux types de résultats : des résultats de *stabilité* et des résultats de *densité*.

Introduisons quelques notations : T est un nombre réel positif; $\Delta_{\infty,f}$ désigne le laplacien usuel associé à la métrique $e^f.g_0$ ($f \in C_0^\infty(K)$); Ω_T est l'ensemble des f de $C_0^\infty(K)$ telles que les valeurs propres inférieures ou égales à T de $\Delta_{\infty,f}$ soient de multiplicité 1; $U_{T,i}$ ($i \in \mathbf{N}$) le sous-ensemble de Ω_T formé des f telles que $\Delta_{\infty,f}$ ait au plus i valeurs propres de type (C) dans [0,T]. On a évidemment

$$U_{T,0} \subset T_{T,1} \subset \cdots \subset \Omega_T \qquad \text{et} \qquad \Omega_T = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{T,i}; \qquad \mathcal{M} = \bigcap_{N=0}^{\infty} U_{N,0}.$$

Le théorème sera donc prouvé si l'on prouve que les $U_{T,i}$, Ω_T sont ouverts (stabilité) et que $\overline{U_{T,i}} \supset U_{T,i+1}$ et $\overline{\Omega_T} = C_0^\infty(K)$ (densité).

LEMME 5.1. — *Ω_T est un ouvert dense de $C_0^\infty(K)$.*

Soit $f \in \Omega_T$, il est clair d'après le § 3 que l'on peut choisir $a > b$ tel que $\Delta_{a,f}$ n'ait dans [0,T] que des valeurs propres simples : les $\mu_i(a)$ sont des fonctions analytiques non constantes de a. Pour f_1 voisin de f, Δ_{a,f_1} aura également ses valeurs propres dans [0,T] simples, car $\Delta_{a,f}$ est à résolvante compacte et que cette dernière dépend continûment de f. Il en est donc a fortiori de même pour $\Delta_{\infty,f}$.

La densité de Ω_T se prouve en appliquant la même méthode que K. Uhlenbeck [26] pour le laplacien sur une variété compacte avec bord à l'opérateur $\Delta_{a,f}$ (a fixé, assez grand pour que $K \subset X_0 \cup \{y<a\}$).

LEMME 5.2. — *L'application de Ω_T dans $\mathbf{N}$ qui, à f, associe le nombre $N(T,f)$ de valeurs propres de type (C) de $\Delta_{\infty,f}$ dans [0,T] est semi-continue supérieurement (et donc $U_{T,i}$ est ouvert).*

Preuve. — On choisit a comme dans la preuve du lemme 4.1, les valeurs propres et fonctions propres de Δ_{a,f_1} pour f_1 voisin de f dans Ω_T varient continûment en fonction de f_1. La forme linéaire

$$L : \varphi \to \left(\frac{d}{dy}\varphi_0\right)(a)$$

est continue sur le domaine commun des $\Delta_{a,f}$ et donc la condition $L(\varphi) \neq 0$ sur la fonction propre φ est ouverte sur f_1 : cette condition équivaut à dire que la valeur propre correspondante de Δ_{a,f_1} est de type (II).

Il reste à prouver la densité de $U_{T,i}$ dans $U_{T,i+1}$, on a le :

LEMME 5.3. — *Soit* U *un ouvert de* X_0, $a > b$, g_0 (*métrique sur* X) *et* $\lambda_0 \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ *donnés; il existe* $h \in D(\Delta_a)$ *telle que* $h_0 \not\equiv 0$ *et* $(\Delta_a - \lambda_0)h \in C_0^\infty(U)$.

Preuve. — Soit g_1 une métrique telle que support $(g_0 - g_1) \subset U$ et λ_0 ne soit pas valeur propre de Δ_{a,g_1}. Soit $R(z_0,z)$ le noyau de $(\lambda_0 - \Delta_{a,g_1})^{-1}$; pour $z_0 \in X_0$ où $y(z_0) < y(z) < a$, on a :

$$R(z_0,\cdot)|_0(y) = A(z_0)y^{s_0} + B(z_0)y^{1-s_0} \quad (s_0(1-s_0) = \lambda_0)$$

avec $A(z_0)a^{s_0} + B(z_0)a^{1-s_0} = 0$. De plus, on vérifie que, dans $X_0 \cup \{y<a\}$, on a : $(\Delta_{g_1} - \lambda_0)A = (\Delta_{g_1} - \lambda_0)B = 0$. Or

$$A(z_0)y^{s_0} + B(z_0)y^{1-s_0}$$

n'est pas nul pour tout z_0 car cela impliquerait que pour toute $f \in C_0^\infty(y<a)$, $(\Delta_{a,g_1} - \lambda_0)^{-1} f|_0 \equiv 0$, ce qui est faux comme on s'en convainc en posant $k = \varphi(y)$, $\varphi \in]b,a[$ et $f = (\Delta - \lambda_0)k$. Donc, comme A et B sont solutions d'une équation elliptique dans $X_0 \cup \{y<a\}$, il existe $z_0 \in U$ tel que

$$A(z_0)y^{s_0} + B(z_0)y^{1-s_0} \not\equiv 0.$$

Soit alors $\varphi \in C_0^\infty(U)$ telle que $\varphi \equiv 1$ au voisinage de z_0, on pose $h(z) = (1-\varphi(z))R(z_0,z)$. Il est clair que h est une solution du problème posé.

Fin de la preuve. — Soit ψ une fonction propre de type (C) de valeur propre λ simple de Δ_{a,g_0}; soit $U \subset K$ tel que $\psi\restriction_U$ ne s'annule pas; d'après le lemme précédent, il existe $f \in C_0^\infty(K)$ et $h \in D(\Delta_{a,g_0})$ avec $h_0 \not\equiv 0$ telles que $(\Delta_{a,g_0} - \lambda)h = f\psi$. Soit alors $g_t = e^{tf}g_0$. Les formules usuelles de la théorie des perturbations pour une valeur propre simple isolée dans le spectre s'appliquent à Δ_{a,g_t}; par dérivation de $(\Delta_{a,g_t} - \lambda_t)\psi_t = 0$ en $t = 0$, on trouve :

$$(\Delta_{a,g_0} - \lambda)\dot{\psi} = \dot{\lambda}\psi + f\psi,$$

et donc

$$(\Delta_{a,g_0} - \lambda)(\dot{\psi} - h) = \dot{\lambda}\psi.$$

On en déduit $\dot{\lambda} = 0$ et $\dot{\psi} = h + C\psi$, donc $(\dot{\psi}_0) = \lambda h_0 \not\equiv 0$. Pour t

voisin de 0, $t \neq 0$, $\lambda(t)$ est une valeur propre de Δ_{a,g_t} qui n'est pas une valeur propre de Δ_{∞,g_t} : $\lambda(0)$ est une valeur propre de type (I), alors que $\lambda(t)$ $(t \neq 0)$ est de type (II).

6. La propagation des singularités.

Les opérateurs Δ_a étant à résolvante compacte, on peut étudier les singularités de la fonction spectrale comme cela a été fait pour les opérateurs elliptiques sur une variété compacte avec ou sans bord sous le nom de « relation de Poisson » ([4], [11] et [13]); si on pose

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2 \qquad \text{et} \qquad \mu_j(a) = \frac{1}{4} + [r_j(a)]^2,$$

on définit la distribution tempérée

$$Z_a(t) = \sum_n \cos tr_n + \sum_j \cos tr_j(a) = Z_0(t) + W_a(t).$$

L'intérêt de cette écriture est de faire apparaître $Z_0(t)$ dont une expression exacte est donnée dans le cas $X = \Gamma\backslash H$ par la formule des traces de Selberg [15] (et aussi [21] dans le cas où la courbure de X_0 n'est pas constante). Pour déterminer le support singulier de $Z_a(t)$, à défaut d'une formule de traces exactes, qui existe peut-être dans le cas $X = \Gamma\backslash H$, on s'inspire des méthodes de la théorie des équations hyperboliques et du calcul des fronts d'ondes, comme dans le cas d'une variété compacte. Deux difficultés supplémentaires sautent aux yeux :

1) la non-compacité de X empêche d'appliquer sans précautions le calcul du front d'ordre de l'image directe d'une distribution (intégration sur des fibres non compactes);

2) il faut tenir compte des conditions aux limites inusuelles le long de (H_a), qui donnent lieu à un phénomène de « diffraction » des géodésiques orthogonales à (H_a), i.e. celles qui vont à l'infini.

THÉORÈME 8. — *Soit* $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ *une fonction paire et* $h(r) = \int_{\mathbf{R}} g(u)e^{-iru}\,du$ *sa transformée de Fourier. Alors les singularités de la distribution paire* Z_a *définie par*

$$\langle Z_a | g \rangle = \sum_n h(r_n) + \sum_j h(r_j(a))$$

vérifient :

$$\text{Supp. Sing. } (Z_a) \subset \pm (\mathscr{L} \cup \mathscr{L}_a) \cup \{0\},$$

où $\mathscr{L}$ *est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de* X *et, lorsque* $a \geqslant b$, $\mathscr{L}_a$ *est l'ensemble des sommes de longueurs d'arcs géodésiques dont les* 2 *extrémités sont sur* (H_a) *et qui sont orthogonales en ces* 2 *points à* (H_a).

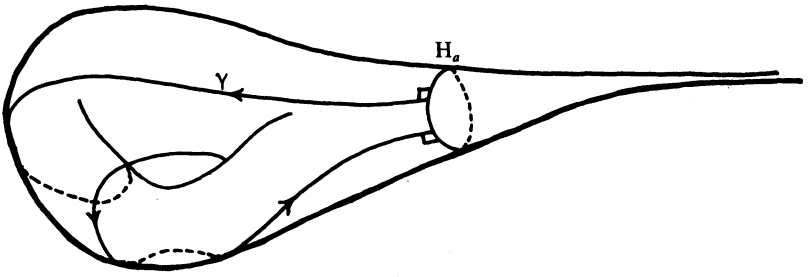

Fig. 1.

Remarques. — *a*) Dans le cas $X = \Gamma\backslash H$ et $a < b$, nous ne savons pas déterminer $\mathscr{L}_a$, voir cependant à ce sujet le § 7. Le cas $a = 0$ peut s'étudier à partir de la formule de Selberg; il ne semble pas que $\mathscr{L}_a$ ait une interprétation géométrique.

b) La détermination explicite de $\mathscr{L}_a$ pour $a \geqslant b$ dans le cas $X = \Gamma\backslash H$ peut se faire simplement à partir du groupe Γ, cf. [12].

Preuve du théorème. — Posons $P_a = \sqrt{\Delta_a - \frac{1}{4}}$; les $r_n, r_j(a)$ sont les valeurs propres de P_a, on obtient ainsi l'écriture

$$\langle Z_a | g \rangle = \mathrm{Tr}\left[\int_{\mathbf{R}} \cos(tP_a).g(t)\,dt\right].$$

Donc, si Support $g \subset [-M,M]$, il suffit de connaître $\cos(tP_a)$ pour $|t| \leqslant M$; cela permet en utilisant la vitesse finie ($\leqslant 1$) de propagation des solutions de l'équation des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\Delta - \frac{1}{4}\right)$ de séparer le calcul de cette trace en deux parties : si $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ est telle que $\varphi(y) = 0$ pour $\log\left(\frac{y}{a}\right) \leqslant M + 1$ et $\varphi(y) = 1$ pour $\log\left(\frac{y}{a}\right) \geqslant M + 2$, on a :

$$\langle Z_a | g \rangle = \mathrm{Tr}\left[\int_{\mathbf{R}} \cos(tP_a)\varphi g(t)\,dt\right] + \mathrm{Tr}\left[\int_{\mathbf{R}} \cos(tP_a)(1-\varphi)g(t)\,dt\right].$$

Si $\text{Support}\,(u_0) \subset \left\{\log\left(\frac{y}{a}\right) \geqslant M+1\right\}$, pour $|t| \leqslant M$, on a

$$\text{Support}\,(\cos(tP_a).u_0) \subset \{y > a\}$$

et donc le calcul de $\cos(tP_a).u_0$ peut se faire sur $\Gamma_\infty\backslash H$. Cela permet de séparer la difficulté près de la pointe de la deuxième intégrale où la trace est une intégrale sur une partie compacte de X.

A. *Étude près de la pointe.*

On reprend ici les calculs classiques dans le cadre de la formule de Selberg [17], [19]. Soit Q définie par $Q(2(\text{ch}\,u-1)) = g(u)$ et $\Phi(t) = -\frac{1}{\pi}\int_t^\infty \frac{dQ(w)}{\sqrt{w-t}}$. Le noyau de $h\left(\sqrt{\Delta_\infty - \frac{1}{4}}\right)$ sur H est $\Phi\left(\frac{|z-z'|^2}{yy'}\right)$; donc sur $\Gamma_\infty\backslash H$, il s'écrit: $\sum_{n\in Z}\Phi\left(\frac{|z-z'+n|^2}{yy'}\right)$, et, en composant avec projection sur le sous-espace des fonctions de zéro-ième coefficient de Fourier égale à 0, on a le noyau:

$$k(z,z') = \sum_{n\in Z}\left(\Phi\left(\frac{|z-z'+n|^2}{yy'}\right) - \int_0^1 \Phi\left(\frac{|z-z'+n+t|^2}{yy'}\right)dt\right),$$

d'où:

$$\text{Tr}\,(h(P_a)\varphi) = \int_0^\infty \varphi(y)\left(\sum_{n\in Z}\Phi\left(\frac{n^2}{y^2}\right) - \int_R \Phi\left(\frac{u^2}{y^2}\right)du\right)\frac{dy}{y^2}.$$

En posant $\{u\} = u - E(u) - \frac{1}{2}$, où $E(u)$ est la partie entière de u, et $y = \frac{u}{\sqrt{v}}$, il vient:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(h(P_a)\varphi) &= \int_0^\infty\left(\int_R \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{v}}\right)\{u\}\frac{du}{u^2}\right)\sqrt{v}\,\Phi'(v)\,dv \\ &= \langle T(v)\,|\,\Phi(v)\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbf{R}^+)}.\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que T est une distribution C^∞ sur $\mathbf{R}^+\backslash\{0\}$. La correspondance $g \mapsto Q$ est un simple changement de variables, régulier sauf en 0, la correspondance $Q \mapsto \Phi$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-\frac{1}{2}$ qui ne modifie pas le support singulier. On en déduit que $g \mapsto \text{Tr}(h(P_a)\varphi)$ est une distribution C^∞ hors de 0.

B. *Étude à distance finie* $(a>b)$.

Considérons le problème

$$(I_a) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\Delta_a - \dfrac{1}{4}\right)u = 0, \\ u(0) = u_1, \qquad \dfrac{du}{dt}(0) = u_2 \end{cases}$$

où $(u_1,u_2) \in C_0^\infty(X) \cap D(\Delta_a)$. Supposons que la solution $u(z,t)$ soit donnée par

$$u(z,t) = \int_X K_1(t,z,z')u_1(z')\,dz' + \int_X K_2(t,z,z')u_2(z')\,dz'.$$

On a alors

$$\mathrm{Tr}(\cos(tP_a).(1-\varphi(y))) = \mathrm{Tr}(\pi_a.\hat{K}_1.(1-\varphi(y)))$$

où $\pi_a : L^2(X) \to \mathscr{H}_a$ est le projecteur orthogonal et $\hat{K}_1$ l'opérateur de noyau K_1. Donc :

$$\mathrm{Tr}(\cos(tP_a)(1-\varphi(y))) = \int_X (1-\varphi(y))K_1(t,z,z)\,dz - \int_{y\geqslant a} (1-\varphi(y))\left[\int_0^1 K_1(t,x+iy,z)\,dx\right]dz.$$

Il suffit donc de déterminer le front d'ordre de $K_1 \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}\times X\times X)$: en fait, on va déterminer les fronts d'ordres de K_1, K_2, $\dfrac{\partial K_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial K_2}{\partial t}$: comme

$$\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{du}{dt} \end{pmatrix}(t) = U_a(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

où $U_a(t)$ est un groupe à un paramètre, il suffit d'étudier ce qui se passe pour t petit.

1^er^ *cas.*

Supposons que Support $(u_1,u_2) \subset \{y<ae^{-T_0}\}$ $(T_0>0)$; pour $0 \leqslant t \leqslant T_0$, la solution du problème (I_∞) a son support dans $y < a$ et

donc est aussi solution de (I_a). Il résulte alors de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier ([4] ou [11]) que les K_i sont des opérateurs intégraux de Fourier associés à la relation canonique $C_\infty \subset T^*X \times T^*(X \times \mathbf{R})$ définie par :

$$C_\infty = \{((z,\zeta);\varphi_{\pm t}(z,\zeta), \pm t, \mp\|\zeta\|)|(z,\zeta) \in T^*X\backslash 0\},$$

où φ_t est le flot géodésique sur $T^*X\backslash 0$.

2^e *cas.*

Si $\text{Support}(u_1,u_2) \subset \{y > be^{T_0}\}$, pour $0 \leqslant t \leqslant T_0$, la solution de (I_a) est à support dans $y > b$: il suffit donc de résoudre le problème (I_a) dans $\Gamma_\infty\backslash H$. On pose $s = \log y$ et pour $v \in \mathscr{D}'(X)$, $\tilde{v}_0(s) = e^{-s/2}v_0(e^s)$. Pour une fonction indépendante de x, on a :

$$\left(\Delta_a - \frac{1}{4}\right)g(s) = -e^{s/2}\cdot\frac{d^2}{ds^2}(g(s)e^{-s/2}).$$

L'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\Delta - \dfrac{1}{4}\right)u = 0$, se transforme donc au niveau des zéro-ième coefficients de Fourier en l'équation : $\dfrac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \tilde{v}_0}{\partial s^2} = 0$: on doit résoudre cette équation avec donnée de Dirichlet en $y = a$, i.e. $s = \log a$. La solution du problème (I_a), avec pour simplifier $u_2 = 0$, est donc donnée par :

$$u(z,t) = u_\infty(z,t) - \frac{e^{s/2}}{2}\begin{cases}\tilde{u}_{1,0}(2\log a - (s+t)), & s \leqslant \log a\\ \tilde{u}_{1,0}(s-t), & s \geqslant \log a\end{cases}$$

où u_∞ est la solution du problème (I_∞).

Donc

$$K_1(t,z,z') = K_{1,\infty}(t,z,z') + \begin{cases}R_\phi^+(t,z,z'), & s \geqslant \log a\\ R_\phi^-(t,z,z'), & s \leqslant \log a,\end{cases}$$

où $R_\phi^\pm$ sont des opérateurs intégraux de Fourier associés aux relations canoniques

$$C_\phi^\pm = \{(\varphi_{-s}(x,0;a,\eta);\varphi_{s'}(x',0,a,\pm\eta), s+s', \pm\|(0,\eta)\|)| \quad s,s' \in \mathbf{R}, x,x' \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}, \eta \in \mathbf{R}\}.$$

On a un phénomène de « diffraction » pour les rayons qui arrivent orthogonalement à l'horicycle (H_a).

De l'étude de ces deux cas, on déduit le cas général : si on note par Γ l'ensemble des arcs géodésiques γ, de longueur $\ell(\gamma)$ qui sont orthogonaux en chacune de leurs extrémités à (H_a),

$$\tilde{\Gamma} = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mid \gamma_i \in \Gamma, n = 0,1,2,\ldots\}$$

et pour

$$\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \qquad |\tilde{\gamma}| = \ell(\gamma_1) + \cdots + \ell(\gamma_n) \quad (=0 \text{ si } n=0).$$

On a la :

PROPOSITION 6.1. — *Pour* $0 \leqslant t \leqslant T$, *on a :*

$$K_1 = K_{1,\infty} + \begin{cases} \sum_{|\tilde{\gamma}| \leqslant T} R^+_{\tilde{\gamma}} & \text{pour} \quad y \geqslant a \\ \sum_{|\tilde{\gamma}| \leqslant T} R^-_{\tilde{\gamma}} & \text{pour} \quad y \leqslant a \end{cases}$$

où $K_{1,\infty}$ *est le noyau de* $\cos\left(t\sqrt{\Delta_\infty - \frac{1}{4}}\right)$ *et où* $R^\pm_{\tilde{\gamma}}$ *sont des opérateurs intégraux de Fourier associés aux relations canoniques*

$$C^\pm_{\tilde{\gamma}} = \{(\varphi_{-s}(x,0,a,\eta); \varphi_{s'}(x',0,a,\pm\eta), s+s'+|\tilde{\gamma}|, \mp\|(0,\eta)\|) \\ s,s' \in \mathbf{R}; x,x' \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}, \eta \in \mathbf{R}^*\}.$$

On est ainsi ramené au calcul de front d'ondes usuel ([4], [11]), compliqué par la présence de formules différentes de part et d'autre de (H_a) : on s'en sort cependant grâce au :

LEMME 6.2. — *Soit* D *un domaine à bord* C^∞ *d'une variété* X, π *une submersion de* X *sur une variété* Y *et* $T \in \mathscr{D}'(X)$ *telle que*

(i) $WF(T) \cap N^*(bD) = \varnothing$,

(ii) $\pi \restriction \text{support}(T) \cap D$ *est propre.*

Alors on peut définir $T\restriction_D = T \times \chi_D$ *et* $\pi_*(T\restriction_D)$, *on a*

$$WF(\pi_*(T\restriction_D)) \subset \{(\pi(x),\eta) \in T^*Y\backslash 0 \mid x \in \mathring{D}, (x, {}^t d\pi(x)(\eta)) \in WF(T)\} \\ \cup \{(\pi(x),\eta) \in T^*Y\backslash 0 \mid x \in bD, {}^t d\pi(x)(\eta) = \xi + \nu, \\ (x,\xi) \in WF(T) \text{ et } (x,\nu) \in N^*(bD)\}.$$

Preuve. — Cela résulte facilement des calculs de front d'ondes du produit de 2 distributions et de l'image directe d'une distribution.

Utilisant la proposition 6.1 et le lemme 6.2, on obtient l'estimation de $WF(\cos(tP_a)(1-\varphi(y)))$ et donc en combinant avec l'étude près de la pointe le résultat annoncé dans le théorème 8.

7. Une conjecture sur les valeurs propres de $\Delta_{\sqrt{3}/2}$ avec $\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$.

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats de D. Hejhal [16] pour formuler une conjecture sur les valeurs propres de type II de $\Delta_{\sqrt{3}/2}$ avec $X = PSL_2(\mathbf{Z})\backslash H$. Si l'on représente le domaine fondamental (domaine modulaire) de la façon usuelle, le point $\rho = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ en est le point le plus bas. On ne peut appliquer le calcul du § 3 que pour $a \geqslant 1 = b$. On a dessiné, sur la figure 2, le domaine modulaire et les horicycles

$$H_{\sqrt{3}/2}, \qquad H_{t'}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} < t' < 1\right) \qquad \text{et} \qquad H_t(t>1).$$

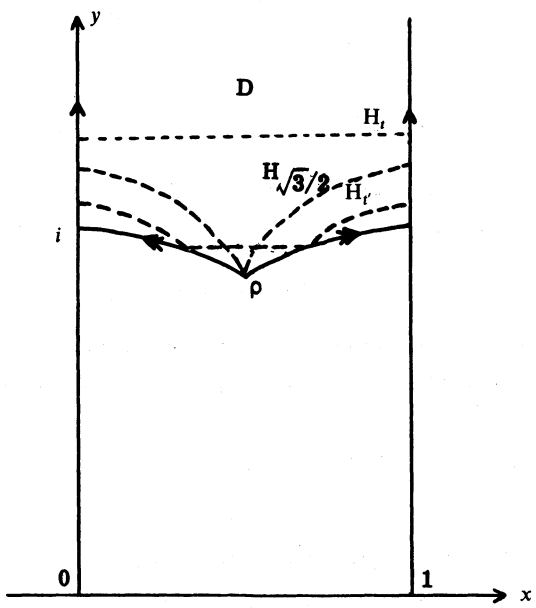

Fig. 2.

Notons $s_1, \ldots, s_j, \ldots$ la suite des zéros vérifiant $\mathrm{Im}(s_j) \geqslant 0$ de $\zeta_K(s)$, fonction zêta de Dedekind du corps $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. Comme on a $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi_3)$, les zéros de la fonction ζ de Riemann font partie de la suite $(s_j)_{j\in\mathbf{N}}$.

CONJECTURE. — *Les valeurs propres de type* II *de* $\Delta_{\sqrt{3}/2}$ *sont les*

$$s_j(1-s_j) = \frac{1}{4} + r_j'^2.$$

Cette conjecture est plus forte que l'hypothèse de Riemann, car les valeurs propres de $\Delta_{\sqrt{3}/2}$ sont des nombres réels $\geqslant 0$, ce qui implique $\mathrm{Re}(s_j) = \frac{1}{2}$.

Nous donnons ci-dessous quelques arguments développés à partir de [16] qui amènent à formuler cette conjecture.

1) D. Hejhal a montré que, si $s = s_j$, le noyau de la résolvante $R(s;\rho,z)$ de Δ_∞ est de carré intégrable sur X. Plus précisément, son zéro-ième coefficient de Fourier

$$[R(s,\rho,\cdot)]_0(y) = \frac{1}{1-2s} E(\rho,s) y^{1-s} \qquad \text{pour} \qquad y > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

s'annule si $s = s_j$, car $E(\rho,s) = C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s (\zeta(2s))^{-1}\zeta_K(s)$.

Soit $\pi_c \in \mathscr{L}(L^2(X))$ le projecteur orthogonal sur la partie absolument continue du spectre de Δ_∞ et soit :

$$f_j = \pi_c(R(s_j,\rho,\cdot)).$$

Les f_j sont des fonctions de la partie absolument continue du spectre de Δ_∞ dont la « transformée de Fourier » $\hat{f}_j(s) = \langle f_j | E(\cdot,s)\rangle$ est donnée par

$$\hat{f}_j(s) = \frac{E(\rho,s)}{s_j(1-s_j) - s(1-s)}.$$

On vient de voir que $f_j \in L^2(X)$, que $(f_j)_0$ est nul pour $y > \frac{\sqrt{3}}{2}$; montrons qu'en fait on a $f_j \in \mathscr{H}_{\sqrt{3}/2}$; il ne reste qu'à vérifier

$\int_X \|df_j\|^2 < +\infty$. Par transformation de Fourier, cela revient à montrer que :

$$\int_0^{+\infty} (1+r^2)\left|\hat{f}_j\left(\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2 dr < +\infty,$$

soit

$$\int_0^{+\infty} |r\zeta(1+2ir)|^{-2}\left|\zeta_K\left(\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2 dr < +\infty.$$

Soit en utilisant la minoration $|\zeta(1+it)|^{-1} \leqslant C.\log t$ de $\zeta(s)$ sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$ ([25], p. 17),

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log r}{1+r^2}\left|\zeta_K\left(\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2 dr < +\infty.$$

Ce qui résulte, par intégration par partie de l'estimation [20] :

$$\int_0^T \left|\zeta_K\left(\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2 dr \sim CT(\log T)^2.$$

Il est ainsi naturel de conjecturer que la suite $(f_j)_{j\geqslant 1}$ ainsi construite est la suite des fonctions propres de type II de $\Delta_{\sqrt{3}/2}$ associée aux valeurs propres $s_j(1-s_j)$.

Soit T la distribution sur X définie pour $\langle T|f\rangle = \pi_c(f)(\rho)$: on a $(\Delta - s_j(1-s_j))f_j = T$, et donc la conjecture formulée plus haut équivaut à dire que T est orthogonale à $\mathscr{H}_{\sqrt{3}/2}$.

Il suffirait en fait de montrer que l'on a $f_j(\rho) = 0$, ou encore que :

$$\forall j \geqslant 1, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\left|E\left(\rho, \frac{1}{2}+ir\right)\right|^2 dr}{s_j(1-s_j) - \left(\frac{1}{4}+r^2\right)} = 0.$$

Malheureusement, ces intégrales convergent très lentement et sont donc difficiles à calculer numériquement.

2) *Application du minimax.*

Si notre conjecture est vraie, on doit vérifier (théorème 5, 2(i)) les inégalités : $\forall j \geqslant 1$, $r'_j \geqslant r_j(1)$. Le calcul numérique de $r_j(1)$ a été fait par H. Cohen. Le calcul des r'_j est donné par différentes tables [16]; on trouve

les résultats résumés dans le tableau suivant :

j	$r_j(1)$	r'_j
1	6,97	8,04
2	10,47	11,24
3	12,43	14,13
4	15,08	15,70
5	16,41	18,26
6	18,68	20,45
7	20,42	

On voit qu'ils sont compatibles avec la conjecture énoncée. Il serait intéressant de pousser plus loin le calcul des $r_j(1)$; cela présente quelques difficultés : si $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, les $r_j(1)$ sont les solutions de $\operatorname{Arg}(\xi(1+2ir)) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Et donc, si $X(r) = \operatorname{Re}(\xi(1+2ir))$, ce sont les solutions $r \geqslant 0$ de $X(r) = 0$. Le calcul classique de $\xi(s)$, en fonction de $\Theta(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\pi n^2 z}$, montre que :

$$X(r) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{irt}\Phi(t)\,dt \qquad \text{où} \qquad \Phi(t) = (\Theta(ie^t)-1)(1+e^{t/2}) - e^{-t/2}$$

est une fonction paire de la classe $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ de Schwartz. Donc $X(r)$ est aussi dans $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, ce qui rend difficile l'évaluation précise des zéros de cette fonction : pour r de l'ordre de 20, $X(r) \sim 10^{-15}$.

3) *Comportement asymptotique des valeurs propres.*

Soit

$$N_a(T) = \operatorname{Card}\{j \mid r_j(a) \leqslant T\}, \qquad N'(T) = \operatorname{Card}\{j \mid r'_j \leqslant T\}.$$

On a vu (§4), que, pour $a \geqslant 1$, on a :

$$N_a(T) = \frac{T}{\pi}\log\frac{Ta}{e\pi} + \begin{cases} O(T \log T) \\ O((\log T)^e) \text{ si on admet l'hypothèse de Riemann.} \end{cases}$$

L'évaluation asymptotique de $N'(T)$ est faite dans [23], on trouve :

$$N'(T) = \frac{T}{\pi}\log\frac{T\sqrt{3}/2}{e\pi} + O(\log T).$$

On constate donc que $N_a(T) \sim N'(T)$ $(T \to +\infty)$ et que sous l'hypothèse de Riemann, $N'(T) \lesssim N_1(T)$, et même plus frappant, les formules pour le terme complémentaire sont de la forme $C(a)T$ où $C(a) = \frac{1}{\pi} \log \frac{a}{e\pi}$ est analytique par rapport à a.

4) *Formules sommatoires.*

Il est intéressant d'obtenir des formules de sommation permettant d'exprimer $\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) + \sum_{j=1}^{\infty} h(r'_j)$: cela peut se faire naïvement en ajoutant la formule de traces de Selberg qui donne $\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n)$ à la formule explicite de sommation de A. Weil [22] qui permet de calculer $\sum_{j=1}^{\infty} h(r'_j)$. Écrivons ces formules sous une forme séparant la singularité à l'origine (voir § 6) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = \langle T_0 | g \rangle + \sum_{\{P\}} \alpha_P g(\log N(P)) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} g(\log n^2),$$

où P parcourt les classes d'éléments hyperboliques de $SL_2(\mathbf{Z})$, $\log N(P)$ étant la longueur de la géodésique périodique associée,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \text{ si } n = p^\alpha \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad T_0 \text{ est } C^\infty \text{ hors de } 0.$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(r'_j) = \langle T_1 | g \rangle - \sum_{\mathscr{P}, m} \frac{\log N(\mathscr{P})}{[N(\mathscr{P})]^{m/2}} g(m \log N(\mathscr{P})),$$

où T_1 est C^∞ hors de 0, $\mathscr{P}$ parcourt les classes d'idéaux premiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et $N(\mathscr{P})$ est la norme de ces idéaux. Les $\mathscr{P}$ peuvent être paramétrés par les nombres premiers : si $p = 3$, $N(\mathscr{P}) = 3$ (multiplicité 1); si $p \equiv 1(3)$, $N(\mathscr{P}) = p$ (multiplicité 2) et si $p \equiv 2(3)$, $N(\mathscr{P}) = p^2$ (multiplicité 1). Il vient ainsi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) + \sum_{j=1}^{\infty} h(r'_j) = \langle T_0 + T_1 | g \rangle + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log 3}{3^m} g(2m \log 3)$$
$$- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\log 3}{3^{m+\frac{1}{2}}} g((2m+1) \log 3) - \sum_{p \equiv 1(3)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \log p}{p^{m+\frac{1}{2}}} g((2m+1) \log p)$$
$$+ \sum_{\{P\}} \alpha_P g(\log N(P)).$$

Et donc, on obtient en posant $Z'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(tr_n) + \sum_{j=1}^{\infty} \cos(tr'_j)$,

$$\text{Supp Sing}(Z') = \{0\} \cup \pm \mathscr{L} \cup \pm \mathscr{L}',$$

où

$$\mathscr{L}' = \{n \log 3 \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{(2n+1) \log p \mid n \in \mathbf{N}, p \equiv 1(3)\}.$$

On est ainsi amené à faire une conjecture sur la propagation des singularités pour $\Delta_{\sqrt{3}/2}$: il y aurait diffraction le long de l'horicycle $H_{\sqrt{3}/2}$ et au point ρ : on trouverait alors que

$$\text{Supp Sing}(Z') \subset \{0\} \cup \pm \mathscr{L} \cup \pm \mathscr{L}_{\sqrt{3}/2}$$

où $\mathscr{L}_{\sqrt{3}/2}$ est l'ensemble des sommes finies de $\log(p^2 + pq + q^2)$ pour $(p,q) = 1$: on a bien $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}_{\sqrt{3}/2}$: tout nombre premier congru à 0 ou 1 modulo 3 s'écrit $p^2 + pq + q^2$, ce qui n'est pas le cas des nombres premiers congrus à 2 modulo 3.

Pour conclure, il semble intéressant de poursuivre dans les directions suivantes :

- Explorer plus loin le calcul numérique des r'_j et $r_j(1)$.
- Étudier la propagation des singularités pour $\Delta_{\sqrt{3}/2}$.
- Voir si on ne peut pas interpréter les f_j comme des quasi-modes : fonctions propres asymptotiques quand $j \to +\infty$ ([9]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BÜSER, On Cheeger's inequality $\lambda_1 \geqslant h^2/4$, *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 36 (1980).

[2] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne, *Lecture Notes in Math.*, 194 (1971). Springer.

[3] P. CARTIER, Analyse numérique d'un problème de valeurs propres à haute précision, preprint IHES (1978).

[4] J. CHAZARAIN, Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes, *Inv. Math.*, 24 (1974), 65-82.

[5] P. CARTIER et D. HEJHAL, Sur les zéros de la fonction zêta de Selberg, Preprint IHES (1979).

[6] E. CODDINGTON et N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill (1965).

[7] Y. COLIN de VERDIÈRE, Pseudo-Laplaciens I, *Ann. Inst. Fourier*, 32, 3 (1982), 275-286.

[8] Y. COLIN de VERDIÈRE, Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein, *C.R.A.S.*, Paris, 293 (1981), 361-363.

[9] Y. Colin de Verdière, Quasi-modes sur les variétés riemanniennes, *Inv. Math.*, 43 (1977), 15-52.
[10] H. Donnelly, On the point spectrum for finite volume symmetric spaces of negative curvature, *Comm. P.D.E.*, 6 (1981), 963-982.
[11] H. Duistermaat et V. Guillemin, The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics, *Inv. Math.*, 29 (1975), 39-79.
[12] V. Guillemin, Sojourn times and asymptotic properties of the scattering matrix, *RIMS Symp.*, Kyoto, 1976.
[13] V. Guillemin et R. Melrose, The Poisson summation formula for manifolds with boundary, *Advances in Math.*, 32 (1979), 204-232.
[14] L. Hörmander, Fourier integral operators I, *Acta Mathematica*, 127 (1971), 79-183.
[15] D. Hejhal, The Selberg trace formula and the Riemann zêta function, *Duke Math. J.*, 43 (1976), 441-482.
[16] D. Hejhal, Some observations concerning eigenvalues of the laplacian and Dirichlet L-series. Recent progress in analytic number theory, *Symp. Durham 1979*, vol. 2 (1981), 95-110.
[17] T. Kubota, *Elementary theory of Eisenstein series*, John Wiley (1973).
[18] S. Lang, $SL_2(\mathbf{R})$, Addison-Wesley (1975).
[19] P. Lax et R. Phillips, Scattering theory for automorphic functions, *Ann. of Math. Studies*, 87 (1976).
[20] Y. Motohashi, A note on the mean-value of the Dedekind zêta function of a quadratic field, *Math. Ann.*, 188 (1970), 123-127.
[21] W. Müller, Spectral theory of non-compact manifolds with cusps and a related trace formula, Preprint IHES, déc. 1980.
[22] G. Poitou, Sur les petits discriminants, séminaire D-P-P (76-77), exposé n° 6.
[23] H. Potter et E. Titchmarsh, The zeros of Epstein zêta functions, *Proc. London Math. Soc.*, 39 (1935), 372-384.
[24] B. Randol, Cylinders in Riemann surfaces, *Comm. Math. Helv.*, 54 (1979), 1-5.
[25] E. Titchmarsh, The theory of Riemann zêta function, *Cambridge tracts in Math. and Math. Phys.* (ed. 1964).
[26] K. Uhlenbeck, Generic properties of eigenfunctions, *Amer. J. Math.*, 98 (1976), 1059-1078.
[27] A. Venkov, *Russian Math. Surveys*, 34 (1979), 79-153.

Manuscrit reçu le 14 mai 1982.

Yves Colin de Verdière,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Institut Fourier
38400 Saint-Martin d'Hères (France).