ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROSE-MARIE HERVÉ

Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0$

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n° 2 (1965), p. 215-223

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_215_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 215-224.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS SURHARMONIQUES ASSOCIÉES A UNE ÉQUATION UNIFORMÉMENT ELLIPTIQUE DE LA FORME

$$Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

par Rose-Marie HERVÉ

Dans un précédent article [5], dont les notations sont conservées ici, j'ai montré que les solutions locales d'une équation uniformément elliptique $Lu = 0$, dans un domaine borné Ω de R^n, forment un système de fonctions harmoniques dans Ω satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot. Je démontre ici quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à ce système (dites L-surharmoniques lorsqu'il y a ambiguïté) :

— La proportionnalité des potentiels de support ponctuel donné dans Ω résulte d'une étude des fonctions harmoniques > 0 possédant une singularité isolée, inspirée de celle qu'ont faite Gilbarg et Serrin [3] dans le cas où les coefficients sont localement lipschitziens.

— La notion d'effilement ne dépend pas de l'opérateur L considéré, donc coïncide avec la notion d'effilement classique.

— Une fonction surharmonique dans Ω, minorée au voisinage de la frontière par une fonction $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (c'est-à-dire par une fonction [1] $\in W^{1,2}(\Omega)$ et « nulle à la frontière »), est $\geqslant 0$ dans Ω : ce principe du minimum pour les fonctions surharmoniques améliore celui que j'avais démontré dans [5] (théorème 2), en levant la restriction φ s.c.s. dans Ω.

[1] $f \in W^{1,2}(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$ ainsi que ses dérivées partielles 1res.

— La solution du problème de Dirichlet, au sens de Perron-Wiener-Brelot, dans un ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, quand la donnée sur la frontière est la trace sur $\partial\omega$ d'une fonction V surharmonique dans Ω et $\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, est la solution L^{ω}_{V} de $Lu = 0$ telle que $V - L^{\omega}_{V} \in W^{1,2}_{0}(\omega)$: cette propriété étend celle que j'avais démontrée dans [5] (théorème 3), où la donnée était la trace sur $\partial\omega$ d'une fonction $\in C^0(\overline{\omega}) \cap W^{1,2}(\omega)$. Elle a pour conséquence :

— Une fonction V surharmonique dans Ω et $\in W^{1,2}(\Omega)$ a une plus grande minorante harmonique dans Ω, qui est L^{φ}_{V}.

Les hypothèses sur l'opérateur L sont les mêmes que dans [5].

1. Proportionnalité des potentiels de support ponctuel donné dans Ω.

Soit $\beta(O, R)$ la boule ouverte de centre O et de rayon R.

LEMME. — *Pour toute solution locale* $u \geqslant 0$ *dans* $\beta(O, R) - \{0\}$ *et tout nombre* r *tel que* $0 < r \leqslant \frac{R}{2}$, *on a* $\sup_{\partial\beta(0,r)} u \leqslant c \inf_{\partial\beta(0,r)} u$, *où* c *est une constante* > 0 *ne dépendant que de* n (*dimension de l'espace*) *et* λ (*coefficient d'uniforme ellipticité*).

Considérons la fonction $v(x) = u(rx)$ définie sur l'ouvert $\omega\left(0, \frac{R}{r}\right) = \beta\left(0, \frac{R}{r}\right) - \{0\}$, et montrons qu'elle est solution locale dans $\omega\left(0, \frac{R}{r}\right)$ de l'équation

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) = 0, \tag{1}$$

où $b_{ij}(x) = a_{ij}(rx)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}\left(\omega\left(0, \frac{R}{r}\right)\right)$; en posant $y = rx$ et $\psi(y) = \varphi\left(\frac{y}{r}\right)$:

$$\int_{\omega\left(0,\frac{R}{r}\right)} \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = r^2 \int_{\omega(0,R)} \sum_{i,j} a_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(y) \frac{dy}{r^n}$$

$$= 0 \quad \text{puisque } \psi \in \mathcal{D}(\omega(0, R)).$$

On applique alors à v, solution locale $\geqslant 0$ de (1) dans l'ouvert fixe $\omega(0, 2)$, l'inégalité de Harnack due à Moser [7] : étant donné

le compact $\partial\beta(0, 1)$, il existe une constante $c > 0$, ne dépendant que de n et λ, telle que

$$\sup_{\partial\beta(0,1)} v \leqslant c \inf_{\partial\beta(0,1)} v,$$

ou encore

$$\sup_{\partial\beta(0,r)} u \leqslant c \inf_{\partial\beta(0,r)} u.$$

THÉORÈME 1. — *Les potentiels dans Ω, de support ponctuel donné $y \in \Omega$, sont proportionnels.*

On considère le cône convexe des potentiels dans Ω de support y : soient p et q deux éléments extrémaux de ce cône, supposés non proportionnels. Rappelons d'abord le principe du minimum suivant ([4], n° 3, propriété 3) : si v est surharmonique dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, $\geqslant -\infty$ un potentiel dans Ω, et satisfait à $\liminf_{\substack{x\in\omega \\ x\to y}} v(x) \geqslant 0$ pour tout $y \in \partial\omega \cap \Omega$, alors $v \geqslant 0$ dans ω.

S'il existait $\alpha > 0$ tel que $p \geqslant \alpha q$ dans un voisinage de y diminué de y, ce principe du minimum étendrait l'inégalité $p \geqslant \alpha q$ à $\Omega - \{y\}$, puis $p - \alpha q$ serait prolongeable surharmoniquement au point y, d'où $p = \alpha q +$ un potentiel dans Ω de support y, ce qui est contraire à p extrémal non proportionnel à q.

Je dis que $\inf_{\partial\beta(y,r)} p = o\left(\sup_{\partial\beta(y,r)} q\right)$ quand $r \to 0$: s'il n'en était pas ainsi, il existerait $\alpha > 0$ et une suite r_n strictement décroissante, tendant vers 0, telle que, pour chaque n,

$$\inf_{\partial\beta(y,r_n)} p \geqslant \alpha \sup_{\partial\beta(y,r_n)} q,$$

donc $p \geqslant \alpha q$ sur $\partial\beta(y, r_n)$; d'après le principe classique du minimum appliqué dans chaque couronne $\beta(y, r_n) - \overline{\beta}(y, r_{n+1})$, on aurait $p \geqslant \alpha q$ dans un voisinage de y diminué de y, ce qui est impossible.

Le lemme prouve alors que l'on a même $\sup_{\partial\beta(y,r)} p = o\left(\inf_{\partial\beta(y,r)} q\right)$ quand $r \to 0$, en particulier $p \leqslant q$ sur $\partial\beta(y, r)$ pour r assez petit, d'où la même contradiction.

Cas particulier de la boule.

Pour chaque point y d'une boule ouverte β, on sait [6] qu'il existe une fonction de Green dans β de pôle y, notée g_y,

harmonique dans $\beta - \{y\}$, ayant pour limite $+\infty$ au point y et 0 en tout point $\in \partial\beta$; en outre $g_y(x)$ est symétrique en x et y. Par suite g_y est un potentiel dans β de support y, et tout potentiel dans β admet une représentation intégrale unique à l'aide de g_y et d'une mesure $\geqslant 0$ sur β([4], théorème 18.2). Autre propriété de la fonction de Green : pour tout compact $K \subset \beta$, de diamètre < 1 si $n = 2$, il existe deux constantes A et $B > 0$ telles que $x, y \in K$ entraîne

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{|x-y|^{n-2}} \leqslant g_y(x) \leqslant \dfrac{B}{|x-y|^{n-2}} & \text{si} \quad n > 2, \\ A \log \dfrac{1}{|x-y|} \leqslant g_y(x) \leqslant B \log \dfrac{1}{|x-y|} & \text{si} \quad n = 2. \end{cases}$$

2. Comparaison du L-effilement et du Δ-effilement d'un ensemble.

Rappel sur les ensembles effilés [1, 4].

a) Définition : Un ensemble $E \subset \Omega$ est effilé en un point $x_0 \in \Omega - E$ si $x_0 \notin \overline{E}$ ou s'il existe une fonction ρ surharmonique dans un voisinage de x_0 telle que

$$\liminf_{\substack{x \in E \\ x \to x_0}} \rho(x) > \rho(x_0).$$

b) Un critère d'effilement : Pour que E soit effilé en $x_0 \in \overline{E} - E$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction ρ surharmonique > 0 dans un voisinage de x_0, finie en x_0, telle que $\lim_{\substack{x \in E \\ x \to x_0}} \rho(x) = +\infty$.

c) Soit E effilé en x_0 : si $\rho_{x_0}^{\omega}$ est la mesure harmonique en x_0 d'un ouvert $\omega \ni x_0$, $\rho_{x_0}^{\omega}(E \cap \partial\omega) \to 0$ selon l'ordonné filtrant décroissant des ouverts $\omega \ni x_0$.

THÉORÈME 2. — *Étant donné un ensemble* $E \subset \Omega$ *et un point* $x_0 \in \Omega - E$, *les conditions* E L-*effilé en* x_0 *et* E Δ-*effilé en* x_0 *sont équivalentes.*

Cela résulte du critère d'effilement *b*) et de la double inégalité (1) terminant le n° 1 : E L-effilé en x_0 équivaut à l'existence d'un L-potentiel p dans une boule β de centre x_0 ayant, au point x_0, une valeur finie et une limite sur E égale à $+\infty$;

si $p = \int_\beta g_y \, d\mu(y)$, et si μ est portée par un compact $\subset \beta$, de diamètre < 1 si $n = 2$, cela équivaut à dire que la fonction Δ-surharmonique $\int_\beta \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}$ si $n > 2$,

$$\int_\beta \log \frac{1}{|x-y|} \, d\mu(y) \qquad \text{si} \qquad n = 2,$$

a au point x_0 une valeur finie et une limite sur E égale à $+\infty$.

Conséquence. — Soit E L-effilé en x_0 : si $d\sigma$ est la mesure superficielle sur une sphère de rayon r, il résulte de la propriété *c*) que $\frac{\sigma(E \cap \partial\beta(x_0, r))}{\sigma(\partial\beta(x_0, r))} \to 0$ quand $r \to 0$.

3. Un théorème d'approximation pour les fonctions surharmoniques localement bornées.

Soit $\rho_n(x)$ une suite « régularisante » formée de fonctions $\geqslant 0$, indéfiniment différentiables, dépendant seulement de $|x|$, nulles pour $|x| \geqslant \frac{1}{n}$ et telles que $\int \rho_n(x) \, dx = 1$.

THÉORÈME 3. — *Soit* V *une fonction surharmonique localement bornée dans* Ω : *alors* $V * \rho_n \to V$ *en tout point* $\in \Omega$.

Soit $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$: on a $V(x) \geqslant V(x_0) - \varepsilon$ sur un voisinage de x_0, donc $V * \rho_n(x_0) \geqslant V(x_0) - \varepsilon$ pour n assez grand.

Pour majorer $V * \rho_n(x_0)$, on considère l'ensemble

$$E = \{x \in \Omega : V(x) > V(x_0) + \varepsilon\},$$

effilé au point x_0, et l'on écrit

$$V * \rho_n(x_0) = \int_{x_0 - \complement E} V(x_0 - t)\rho_n(t) \, dt + \int_{x_0 - E} V(x_0 - t)\rho_n(t) \, dt :$$

la première intégrale est $\leqslant V(x_0) + \varepsilon$. Pour majorer la seconde, soit I, on l'écrit, en posant $|t| = r$ et $\rho_n(t) = f_n(r)$:

$$I = \int_0^{1/n} \left[\int_{(x_0 - E) \cap \partial\beta(0, r)} V(x_0 - t) \, d\sigma(t) \right] f_n(r) \, dr;$$

puisque $V \leqslant M$ sur un voisinage de x_0, on a, pour n assez grand,

$$I \leqslant M \int_0^{1/n} \sigma(E \cap \partial\beta(x_0, r)) f_n(r)\, dr$$
$$\leqslant \varepsilon M \int_0^{1/n} \sigma(\partial\beta(0, r)) f_n(r)\, dr = \varepsilon M$$

d'après la conséquence du théorème 2.

Ainsi $V * \rho_n(x_0) \leqslant V(x_0) + \varepsilon(M + 1)$ pour n assez grand.

Conséquence. — Soient V surharmonique localement bornée dans Ω, ω un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$: la solution H_V^ω du problème de Dirichlet dans ω est limite de $H_{V*\rho_n}^\omega$.

En effet, $V * \rho_n \to V$ en tout point $\in \partial\omega$ et $|V * \rho_n|$ est borné sur $\partial\omega$ indépendamment de n.

Remarque. — Si en outre $V \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, la solution L_V^ω de $Lu = 0$ dans ω telle que $V - L_V^\omega \in W_0^{1,2}(\omega)$ est limite, dans $W^{1,2}(\omega)$, de $L_{V*\rho_n}^\omega$.

En effet, $V * \rho_n \to V$ dans $W^{1,2}(\omega)$ et l'application $f \to L_f^\omega$ de $W^{1,2}(\omega)$ dans lui-même est continue.

Rappelons aussi que cette application est croissante; comme d'autre part $f = 0$ p.p. dans ω au voisinage de $\partial\omega$ entraîne $L_f^\omega = 0$ dans ω, $f \geqslant 0$ p.p. dans ω au voisinage de $\partial\omega$ entraîne $L_f^\omega \geqslant 0$ dans ω.

4. Un principe du minimum pour les fonctions surharmoniques (2).

THÉORÈME 4. — *Une fonction surharmonique dans Ω, minorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est $\geqslant 0$ dans Ω.*

Soient V surharmonique dans Ω, $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \leqslant V$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$: en remplaçant au besoin V et φ par $\inf(V, 0)$ et $\inf(\varphi, 0)$, on peut supposer V localement bornée dans Ω.

Montrons d'abord que, pour tout ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ tel que

(2) Les résultats de Littman, Stampacchia et Weinberger [6] permettent de comparer le théorème 4, comme principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques, à celui démontré pour les sous-solutions locales dans [5], et de constater que le théorème 4 est plus général : en effet, la régularisée s.c.s. ess. d'une sous-solution locale dans Ω lui est égale p.p., et elle est sous-harmonique dans Ω.

$V \geqslant \varphi$ p.p. sur un voisinage de $\partial\omega$, on a $H_V^\omega \geqslant L_\varphi^\omega$ dans ω. Pour cela, on considère une suite « régularisante » ρ_p : pour p assez grand, $V * \rho_p \in C^\infty(\overline{\omega})$, donc ([5], théorème 3)

$$H^\omega_{V*\rho_p} = L^\omega_{V*\rho_p};$$

d'autre part $V \geqslant \varphi$ p.p. sur un voisinage de $\partial\omega$ entraîne, pour p assez grand, $V * \rho_p \geqslant \varphi * \rho_p$ au voisinage de $\partial\omega$, donc

$$L^\omega_{V*\rho_p} \geqslant L^\omega_{\varphi*\rho_p}$$

dans ω; enfin $H^\omega_{V*\rho_p} \to H^\omega_V$ et il existe une suite partielle p' telle que $L^\omega_{\varphi*\rho_{p'}} \to L^\omega_\varphi$ p.p. dans ω; d'où $H^\omega_V \geqslant L^\omega_\varphi$ p.p., donc partout, dans ω.

Soit alors une suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \overline{\omega}_n \subset \Omega$ dont la réunion est Ω : pour n assez grand on a $H^{\omega_n}_V \geqslant L^{\omega_n}_\varphi$ dans ω_n; quand $n \to +\infty$, $L^{\omega_n}_\varphi$ prolongée par φ dans $\Omega - \omega_n$ a pour limite faible 0 dans $W^{1,2}(\Omega)$ ([5], proposition 5), tandis que la suite décroissante $H^{\omega_n}_V$ a pour limite h, harmonique dans Ω ou $-\infty$; pour tout ensemble mesurable $E \subset \overline{E} \subset \Omega$, on a $\lim \int_E H^{\omega_n}_V \, dx \geqslant 0$, d'où h harmonique $\geqslant 0$ dans Ω et $V \geqslant h \geqslant 0$ dans Ω.

5. Le problème de Dirichlet dans ω, pour une donnée sur $\partial\omega$ qui est la trace d'une fonction surharmonique dans $\Omega \supset \overline{\omega}$ et $\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$.

THÉORÈME 5. — *Soit* V *surharmonique dans* Ω *et* $\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$: *si l'ouvert* ω *est tel que* $\overline{\omega} \subset \Omega$, *la solution* H^ω_V *du problème de Dirichlet dans* ω, *pour la donnée* V *sur* $\partial\omega$, *est la solution* L^ω_V *de* $Lu = 0$ *dans* ω *telle que* $V - L^\omega_V \in W^{1,2}_0(\omega)$.

Soit d'abord V localement bornée dans Ω : en reprenant la suite régularisante ρ_p de la démonstration précédente, on a $H^\omega_{V*\rho_p} = L^\omega_{V*\rho_p}$ pour p assez grand, $H^\omega_{V*\rho_p} \to H^\omega_V$ dans ω et, pour une suite partielle p', $L^\omega_{V*\rho_{p'}} \to L^\omega_V$ p.p. dans ω.

Soit maintenant V quelconque : si $V_n = \inf(V, n)$, on a $H^\omega_{V_n} = L^\omega_{V_n}$; la suite V_n étant croissante, $H^\omega_{V_n} \to H^\omega_V$ dans ω. Il suffit alors de montrer que $V_n \to V$ dans $W^{1,2}(\omega)$, et cela résulte de grad $V_n \to$ grad V en tout point où V est fini, c'est-à-dire p.p., joint à $|\text{grad } V_n| \leqslant |\text{grad } V|$.

6. La plus grande minorante harmonique d'une fonction surharmonique dans Ω et $\in W^{1,2}(\Omega)$.

Soient une fonction V surharmonique dans Ω et une suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \overline{\omega}_n \subset \Omega$ dont la réunion est Ω : la suite $H_V^{\omega_n}$ est décroissante et sa limite h est harmonique dans Ω ou $-\infty$. Dans la première éventualité, V admet une plus grande minorante harmonique dans Ω qui est h : en effet, $V \geqslant H_V^{\omega_n}$ dans ω_n pour chaque n entraîne $V \geqslant h$ dans Ω et, si h' est une minorante harmonique de V dans Ω, on a $h' \leqslant H_V^{\omega_n}$ dans ω_n pour chaque n, donc $h' \leqslant h$ dans Ω.

THÉORÈME 6. — *Si* V *est surharmonique dans* Ω *et* $\in W^{1,2}(\Omega)$, *alors* V *admet une plus grande minorante harmonique dans* Ω, *qui est* L_V^{Ω}.

On reprend la suite ω_n ci-dessus : pour chaque n, $H_V^{\omega_n} = L_V^{\omega_n}$ dans ω_n; quand $n \to +\infty$, $H_V^{\omega_n}$ tend en décroissant vers h et $L_V^{\omega_n}$ prolongée par V dans $\Omega - \omega_n$ a pour limite faible L_V^{Ω} dans $W^{1,2}(\Omega)$. Par suite, pour tout ensemble mesurable $E \subset \overline{E} \subset \Omega$, $\int_E h\,dx = \int_E L_V^{\Omega}\,dx$; alors h est harmonique dans Ω et égale à L_V^{Ω}.

COROLLAIRE 1. — *Soit* V *surharmonique dans* Ω *et* $\in W^{1,2}(\Omega)$: *alors* V *est un potentiel dans* Ω *si et seulement si* $V \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* V *surharmonique dans* Ω *et* $\in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$: *pour tout ouvert* $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, *la plus grande minorante harmonique de* V *dans* ω *est* H_V^{ω}.

Remarque. — Dans l'axiomatique de M. Brelot, cette dernière propriété n'est pas vraie pour V et ω quelconques; elle est vérifiée pour V localement bornée dans Ω, moyennant l'axiome D, qui est d'ailleurs satisfait ici. Il suffit en effet de le vérifier pour les potentiels dans une boule (de diamètre $\leqslant 1$ si $n = 2$), en utilisant la double inégalité (1) à la fin du n° 1 et un énoncé de G. Choquet [2] sur le principe du maximum « λ-dilaté ».

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Introduction axiomatique de l'effilement, *Ann. di Mat.*, 57 (1962), 77-95.

[2] G. Choquet, Les noyaux réguliers en théorie du potentiel, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 243 (1956), p. 635.

[3] D. Gilbarg et J. Serrin, On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations, *Journal d'Anal. math.*, 4 (1954-1955), 309-340.

[4] R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. *Ann. Inst. Fourier*, 12 (1962), 415-571.

[5] R. M. Hervé, Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme

$$Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Ann. Inst. Fourier, 14 (1964), 493-508.

[6] W. Littman, G. Stampacchia et H. F. Weinberger, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 17 (1963), 45-79.

[7] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. pure appl. Math.*, 14 (1961), 577-591.

Manuscrit reçu le 17 novembre 1964.

M^me R.-M. Hervé,
Institut Mathématique,
Faculté des Sciences,
Nancy (M.-et-M.).