ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

G. A. HUNT

# La théorie du potentiel et les processus récurrents

*Annales de l'institut Fourier*, tome 15, n° 1 (1965), p. 3-12

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_3_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**15**, 1 (1965), 3-12.

# LA THÉORIE DU POTENTIEL ET LES PROCESSUS RÉCURRENTS

**par G. A. HUNT**

Soit $(X_t)$ un processus de Markoff qui est stationnaire au sens strict; le paramètre $t$ parcourt donc l'ensemble des réels ou celui des entiers et les variables $X_t$ ont la même répartition $\alpha$ sur l'espace de phase E; on n'exclut pas la possibilité que $\alpha(E)$ soit infini, car c'est en effet la plus intéressante. On suppose en outre (c'est la définition de récurrence) que l'intégrale $\int_D f(X_t)\,dt$ soit infinie pour presque toute trajectoire du processus si D est une partie de R (ou de Z) de densité strictement positive et $f$ une fonction positive sur E dont l'intégrale $\int f\,d\alpha$ est strictement positive.

Les exemples classiques sont le mouvement brownien linéaire ou plan, $\alpha$ étant la mesure de Lebesgue, et le mouvement brownien sur une sphère de n'importe quelle dimension, $\alpha$ étant finie. Puisque ces processus sont étroitement liés à des théories du potentiel (le mouvement plan l'étant au potentiel logarithmique, le mouvement linéaire au potentiel de noyau $-|x-y|$) on est tenté de croire que les autres processus mènent également à une théorie du potentiel; c'est ce que montrent les travaux récents de Spitzer, Kemeny et Snell, et Orey sur les chaînes (E dénombrable et $t$ entier). Je vais donner un bref exposé de cette théorie, ensuite j'indiquerai comment on peut aborder le cas général. Il ne s'agit naturellement que d'une orientation où l'on énoncera les définitions, quelques théorèmes et problèmes.

Heureusement les résultats définitifs de Spitzer, sur les chaînes sur Z ou Z × Z invariantes par les translations, se trouvent rassemblés dans son livre [4] qui vient de paraître. Kemeny et Snell, qui s'occupent plutôt de la position du problème, ont fait plusieurs exposés d'ensemble, dont [2], [3] sont les plus importants, et sont aussi en train d'écrire un traité.

## 1. Les chaînes normales.

Admettons jusqu'à l'avis contraire que E soit dénombrable et $t$ entier tandis que $\alpha(x) > 0$ pour tout $x$ de E. On définit alors sans ambiguïté, pour tout $n$ de $Z^+$, la probabilité conditionnelle $P_n(x, B)$ que $X_{t+n} \in B$, étant donné $X_t = x$; c'est la fonction de transition du processus $(X_t)$ au sens croissant du temps. Les hypothèses faites sur le processus s'expriment de la façon suivante:

$$(1.1) \qquad \sum_n P_n(x, y) = \infty \qquad \text{pour tous } x, y \text{ de E.}$$

$$(1.2) \quad P_n(x, y) > 0 \qquad \text{pour } x, y \text{ donnés et } n \text{ suffisamment grand.}$$

$$(1.3) \qquad \alpha P_n = \alpha, \qquad \text{où} \qquad \alpha P_n(B) = \int \alpha(dx) P_n(x, B).$$

On sait en outre que la mesure positive $\beta$ est proportionnelle à $\alpha$ si elle satisfait à la relation $\beta P_n = \beta$.

On se servira des notations que voici, $f$ et $g$ étant des fonctions sur E, $\beta$ une mesure, et $\mathcal{U}$ de la forme $\mathcal{U}(x, dy)$:

$\mathcal{U}f$, $M_g f$, $If$ sont les fonctions $\int \mathcal{U}(x, dy) f(y)$, $gf$, $f$.

$\beta\mathcal{U}$, $\beta M_g$, $\beta I$ sont les mesures $\int \beta(dx)\mathcal{U}(x, B)$, $\beta(dx)g(x)$, $\beta$.

$\langle \beta, f \rangle$ est l'intégrale $\int f \, d\beta$.

$f \otimes \beta$ est le noyau $f(x) \otimes \beta(B)$.

$G_n$ est $I + P_1 + \cdots + P_n$ tandis que $H_C(x, B)$ est la probabilité conditionnelle que $X_T \in B$, étant donné $X_t = x$, la quantité aléatoire T étant la plus petite valeur de $s$ telle que $s \geqslant t$ et $X_s \in C$. A cause de la récurrence, $H_C(x, dy)$ est, pour tout $x$ de E, une mesure positive de masse unité concentrée sur C.

On sait que, pour toute partie finie B de E et tout point $x$, $P_n(x, B)$ tend vaguement vers $\alpha(B)/\alpha(E)$ lorsque $n$ croît vers l'infini. Orey a démontré que, $\beta$ et $\gamma$ étant des mesures de probabilité sur E, la variation totale de $\beta P_n - \gamma P_n$ tend vers zéro; en particulier $P_n$ tend très fortement vers $\dfrac{1}{\alpha(E)} 1 \otimes \alpha$ si $\alpha(E)$ est fini. Cette amélioration de la convergence classique, sans être indispensable, est d'une grande utilité.

On pose les mêmes définitions en regardant $(X_t)$ comme un processus de Markoff au sens décroissant du temps mais on note $\hat{P}_n, \hat{G}_n, \hat{H}_C$. Il est facile de voir que

$$\hat{P}(x, dy) = \alpha(dy)P(y, x)/\alpha(x), \qquad \hat{G}_n(x, dy) = \alpha(dy)G_n(y, x)/\alpha(x),$$

et on verra plus tard qu'en principe il y a une formule semblable pour $\hat{H}_C$.

Puisque les noyaux $G_n$ deviennent infinis avec $n$, c'est un problème central que la définition d'un noyau de potentiel convenable. Ce noyau devant être en quelque sens l'inverse de $I - P_1$, on va expliciter l'opération de $I - P_1$, sur $\mathscr{F}$ et $\mathscr{M}$, où $\mathscr{F}$ est l'espace de Banach des fonctions $f$ sur E avec la norme

$$\|f\| = \sup_E |f| + \int_E |f|\, d\alpha$$

et $\mathscr{M}$ est l'espace de mesures de signe variable sur E normé par

$$\|\beta\| = \sup_E \left|\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right| + \sum_E |\beta(x)|.$$

Evidemment $(I - P_1)f = 0$ équivaut à dire que $f$ est constante (donc nulle si $\alpha(E)$ est infini) tandis que $\beta(I - P_1) = 0$ équivaut à dire que $\beta$ est multiple de $\alpha$ (donc nulle si $\alpha(E)$ est infini). Il s'ensuit que, $\mathscr{F}_0$ étant le sous-espace de $\mathscr{F}$ défini par $\langle \alpha, f \rangle = 0$, l'opérateur $I - P_1$ induit un monomorphisme de $\mathscr{F}_0$ sur une partie dense de $\mathscr{F}_0$.

On peut reformuler le problème. Soit C une partie finie de E; posons $\Pi_C = P_1 H_C$; il est évident que $\Pi_C(x, B)$ est la probabilité d'arriver à C en B après être parti de $x$, donc $\Pi_C(x, B)$ coïncide avec $H_C(x, B)$ si $x$ n'appartient pas à C et, d'autre part, la restriction de $\Pi_C$ à C × C est la fonction de transition (en un pas) d'un processus récurrent sur C dont la répartition stationnaire est la restriction $\alpha_C$ de $\alpha$ à C. D'après la définition il subsiste la relation

$$P_{n+1}H_C = H_C + G_n(H_C - \Pi_C), \tag{1.4}$$

et, d'après le paragraphe précédent (appliqué à $H_C - \Pi_C$ au lieu de $I - P$), les fonctions de la forme $(H_C - \Pi_C)f$, où $f$ est fonction sur C, sont précisément celles qui s'annulent hors C et dont l'intégrale par rapport à $\alpha$ est nulle. En outre, $P_{n+1}H_C 1 = 1$ parce que la masse totale de $H_C$ est l'unité. Par conséquent, la convergence de $P_{n+1}H_C f$ pour toute fonction $f$ sur C équivaut à celle de $G_n g$ pour toute

fonction $g$ qui a son support dans C et satisfait à $\langle \alpha, g \rangle = 0$. (Il s'agit de la convergence simple lorsque $n$ tend vers l'infini.)

L'énoncé dual est le suivant:

La convergence de $\hat{P}_n \hat{H}_C f$ pour tout $f$ sur C équivaut à la convergence vague de $\beta G_n$ pour toute mesure $\beta$ sur C qui satisfait à $\langle \beta, 1 \rangle = 0$.

Soient maintenant $\nu$ une mesure et $h$ une fonction sur C telles que $\langle \nu, 1 \rangle = 1 = \langle \alpha, h \rangle$; admettons que $P_n H_C$ et $\hat{P}_n \hat{H}_C$ convergent lorsque $n$ tend vers l'infini. Il s'ensuit que la suite de fonctions

$$[G_n - (\nu G_n h)1 \otimes \alpha] f \tag{1.5}$$

converge, pour toute fonction $f$ sur C, tandis que la suite de mesures

$$\beta[G_n - (\nu G_n h)1 \otimes \alpha] \tag{1.6}$$

converge vaguement, pour toute mesure $\beta$ sur C. En effet, on n'a qu'à écrire

$$[G_n - (\nu G_n h)1 \otimes \alpha] f(x) = G_n(f - \langle \alpha, f \rangle g)(x) + (\varepsilon_x - \nu) G_n g,$$

où $\varepsilon_x$ est la masse unité en $x$, en observant que $\langle \alpha, f \rangle = \langle \alpha, f \rangle \langle \alpha, g \rangle$ et que $\langle \varepsilon_x - \nu, 1 \rangle = 0$. Réciproquement, la convergence des suites (1.5) et (1.6) pour un seul choix de $\nu$ et $h$ entraîne celle de $P_n H_C$ et $\hat{P}_n \hat{H}_C$.

On dit que la chaîne $(X_t)$ est normale si les suites $P_n H_C$ et $\hat{P}_n \hat{H}_C$ convergent pour tout choix de la partie finie C de E.

Si $(X_t)$ est normale on fixe $\nu$ et $h$, mesure et fonction à support fini qui satisfont à $\langle \nu, 1 \rangle = 1 = \langle \alpha, h \rangle$, et on pose

$$A = \lim_{n \to \infty} [G_n - (\nu G_n h)1 \otimes \alpha]. \tag{1.7}$$

Ce noyau a la propriété que $G_n f \to Af$ et $\beta G_n \to \beta A$ à condition que $\beta$ et $f$ aient leur support fini et satisfassent à $\langle \beta, 1 \rangle = 0 = \langle \alpha, f \rangle$. On démontre facilement que tout autre noyau ayant cette propriété ne diffère de A que par un multiple de $1 \otimes \alpha$; on ne peut évidemment pas éviter cette ambiguïté; d'habitude on prend pour $\nu G_n h$ la valeur $G_n(e, e)$, $e$ étant un point convenable de E.

Relativement au noyau A d'une chaîne normale, les principes du minimum et du balayage, la notion de capacité et même celle d'énergie (lorsque A est symétrique), s'établissent sans peine sous leur forme connue du potentiel logarithmique.

Orey a démontré l'existence de chaînes qui ne sont pas normales. En revanche, son théorème sur la convergence de $P_n$ montre que

$(X_t)$ est normale si $\alpha(A)$ est fini; en effet, $P_n H_C f$ tend vers $\alpha H_C f / \langle \alpha, 1 \rangle$ car $P_n$ tend fortement vers $1 \otimes \alpha / \langle \alpha, 1 \rangle$.

La normalité s'établit aussi facilement lorsque $\alpha(x)$ et $A(x, x)$ ne dépendent pas de $x$ et que $A(x, y) = A(y, x)$. Tel est le cas d'un processus sur un espace homogène si $P_1(x, y) = P_1(y, x)$ et que $P_1(\sigma x, \sigma y) = P_1(x, y)$ pour tout élément $\sigma$ du groupe qui opère.

Spitzer a démontré la normalité de toute chaîne sur Z ou Z × Z dont la fonction de transition satisfait à $P(x + z, y + z) = P(x, y)$; à l'heure actuelle, lui et Kesten semblent être sur le point d'obtenir le même résultat pour tout groupe abélien.

Ce n'est que pour les chaînes normales que l'on a trouvé un noyau convenable. Il est donc un problème de base, celui de caractériser par des propriétés intrinsèques le noyau A d'une chaîne normale parmi tous ceux plus ou moins intimement liés à I − P; ce serait un guide précieux dans l'étude des chaînes générales.

## 2. Les frontières de Martin.

Bien que le processus $(X_t)$ n'ait que des frontières triviales, au sens habituel, Kemeny et Snell ont montré comment on peut compléter E de façon utile en modifiant la fonction de transition.

Notons $M_B$ l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de B, et posons $Q^C = M_{E-C} P$, où C est une partie finie de E. Evidemment $Q^C$ est la fonction de transition d'un processus qui obéit à la même loi que $(X_t)$ sauf que le point mobile disparaît après son premier séjour dans C; elle définit donc un noyau classique $\mathscr{U}^C$ qui, d'après son interprétation, coïncide avec $H_C$ sur E × C de sorte que $\mathscr{U}^C 1_C = 1$ où $1_C$ est la fonction caractéristique de C. Choisissons $1_C$ comme fonction de repère (c'est-à-dire que 1 est la fonction excessive de base) et construisons, par rapport à $Q^C$ et $1_C$, le complété d'entrée de E qu'on note provisoirement ${}^C E$. Une suite de points $x_n$ de E converge dans ${}^C E$ si $\mathscr{U}^C(x_n, dy)$ converge vaguement (et si $x_n$ reste fixé ou bien s'échappe de toute partie finie de E).

Soit B une partie de C. La relation

$$\mathscr{U}^B = \mathscr{U}^C + \mathscr{U}^C M_{C-B} \mathscr{U}^B \tag{2.1}$$

montre immédiatement que la suite de points $x_n$ de E converge dans ${}^B E$ si elle converge dans ${}^C E$, et un peu de calcul montre que la réciproque est vraie.

Il s'ensuit que l'on peut identifier ${}^{A}E$ et ${}^{B}E$ pour n'importe quelles parties finies A et B de E; on notera *E ce complété de E en tant qu'espace topologique compact, et on le nomme l'espace d'entrée. L'espace de sortie E* est défini de la même façon.

La mesure variable $\mu$ sur E converge vaguement sur *E si $\mu\mathscr{U}^{B}f$ converge pour une partie finie et fixe B de E et pour toute fonction $f$ de support compact. Or, $f$ étant donnée, prenons dans (2.1) pour C le support de $f$ et observons que $\mathscr{U}^{C}M_C = H_C$ ; par conséquent la convergence vague de $\mu$ sur *E équivaut à celle de $\mu H_C$ sur E, pour toute partie finie C de E.

Tenant compte des définitions on peut enfin dire que $(X_t)$ est normale si et seulement si $P_n$ converge vaguement sur *E et $\hat{P}_n$ converge vaguement sur E* lorsque $n$ croît indéfiniment. Cette remarque est riche de conséquences: elle entraîne par exemple la normalité lorsque *E − E et E* − E sont réduits à un point, à condition que $\alpha(A)$ soit infini (car $P_n(B)$ et $\hat{P}_n(B)$ tendent alors vers zéro si B est finie).

Kemeny et Snell aussi bien que Orey se sont servi des espaces d'entrée et de sortie dans l'étude des fonctions positives $f$ telles que $(I - P)f$ ait son support fini, et Orey a trouvé une représentation de tous les noyaux qui jouissent de certaines propriétés par rapport à $P_1$.

### 3. Les théorèmes limites.

Soient $f$ une fonction bornée mesurable sur le compact C de $R^2$ et $F(t, x)$ la solution bornée de l'équation de la chaleur sur $R^2 - C$ qui prend la valeur $f$ sur C et la valeur initiale nulle sur $R^2 - C$. Lorsque $t$ tend vers l'infini $F(t, x)$ tend vers une fonction G qui est harmonique hors C.

Depuis 1956 on sait que

$$(3.1) \qquad [G(x) - F(t, x)] \log t \to 2\pi G(\infty)H(x), \qquad t \to \infty,$$

pour tout point $x$ du plan, H étant la fonction de Green de $R^2 - C$ ayant son pôle à l'infini (et nulle en tout point régulier de C).

Le travail récent de Spitzer et Kesten se rapproche de ce théorème, mais s'occupe de processus récurrents et homogènes sur Z ou $Z \times Z$ et se montre bien plus profond. Soient $\Omega$ une partie finie de l'espace de phase, $T_\Omega$ le plus petit indice $t$ tel que $t > 0$ et $X_t \in \Omega$, et T le plus petit indice $t$ tel que $t > 0$ et $X_t = 0$. L'énoncé de Spitzer

et Kesten le plus proche de (3.1) est le suivant, où $g_\Omega$ est une fonction définie par $\Omega$ et la fonction de transition:

$$\frac{P\{T_\Omega > n | X_0 = x\}}{P\{T > n | X_0 = 0\}} \to g_\Omega(x), \qquad n \to \infty. \tag{3.2}$$

En effet, le numérateur de (3.1) correspond à celui de (3.2) si $f = 1$ sur C, et alors $G(\infty) = 1$, tandis que $\log t$ correspond à l'évaluation explicite d'une probabilité semblable au dénominateur de (3.2).

Il serait intéressant d'étudier de tels problèmes pour des chaînes normales plus générales, où on a encore une théorie satisfaisante du potentiel.

## 4. Les processus.

Admettons dès maintenant que $t$ parcourt l'ensemble des réels et que E soit un espace localement compact ayant une base dénombrable. On suppose en outre le processus $(X_t)$ muni de fonctions de transition duales $P_t$ et $\hat{P}_t$ qui possèdent une certaine régularité; il ne s'agit pas de préciser, parce qu'il y a de toute évidence la possibilité de construire de telles fonctions partant du processus (à condition de reformuler la notion de fonction de transition).

On commence par rappeler des faits connus. A fin de simplicité je ne discuterai que des fonctionnelles additives d'un processus qui sont de la forme $\int_r^s a(X_t)\,dt$. Si $a$ est positive et $\langle \alpha, a \rangle$ strictement positif, $\int_r^\infty a(X_t)\,dt$ est infinie pour presque toute trajectoire. Une telle fonction $a$ étant donnée, on pose

$$\mathcal{U}_x^a f = \mathcal{E}_x \int_0^\infty \exp\left[ - \int_0^t a(X_s)\,ds \right] f(X_t)\,dt, \tag{4.1}$$

$\mathcal{E}_x$ étant l'espérance conditionnelle, étant donné $X_0 = x$. On définit aussi pour toute trajectoire un temps d'arrêt T; c'est le plus petit $t$ qui satisfait à

$$t \geqslant 0, \qquad \int_0^t a(X_s)\,ds = Z$$

où Z est une variable aléatoire qui est indépendante de $(X_t)$ et satisfait à $\Pr\{Z > z\} = e^{-z}$; ensuite on pose

$$H_x^a f = \mathcal{E}_x f(X_T). \tag{4.2}$$

Enfin, on fait subir à $(X_t)$ un changement de temps en posant

$$X_t^a = X_s, \qquad \text{où} \qquad t = \int_0^s a(X_r)\, dr. \tag{4.3}$$

Le processus $(X_t^a)$ est de Markoff et c'est un processus récurrent lorsqu'on prend pour espace de phase la partie de E où $a$ est strictement positive (les démonstrations sont faciles lorsque $a$ est strictement positive et continue).

On note $P_t^a$ la fonction de transition de $(X_t^a)$ et on pose provisoirement

$$V^\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t^a\, dt, \qquad \lambda > 0. \tag{4.4}$$

Des relations importantes lient ces quantités. D'abord,

$$H^a = \mathscr{U}^a M_a, \qquad V^\lambda = \mathscr{U}^{\lambda a} a \qquad \lambda V^\lambda = \lambda \mathscr{U}^{\lambda a} a = H^{\lambda a}, \tag{4.5}$$

$H^a$ et $\mathscr{U}^a$ étant les noyaux $H_x^a(dy)$ et $\mathscr{U}_x^a(dy)$. La première égalité se démontre comme il suit :

$$H_x^a \phi = -\mathscr{E}_x \int_0^\infty \phi(X(t))\, d_t \exp\left[ -\int_0^t a(X_s)\, ds \right]$$

$$= \mathscr{E}_x \int_0^\infty \phi(X(t)) a(X(t)) \exp\left[ -\int_0^t a(X_s)\, ds \right] dt = \mathscr{U}_x^a(a\phi),$$

et les autres s'établissent de la même façon.

Soit $b$ une fonction positive telle que $\int_0^\infty [b(X_t) - a(X_t)]\, dt = +\infty$ pour presque toute trajectoire ; c'est le cas lorsque $b \geqslant a$ hors un compact et $\langle \alpha, b - a \rangle$ est strictement positif. Il subsiste alors la relation fondamentale

$$\mathscr{U}^a - \mathscr{U}^b = \mathscr{U}^b M_{b-a} \mathscr{U}^a = \mathscr{U}^a M_{b-a} \mathscr{U}^b, \tag{4.6}$$

qui se réduit à l'équation résolvante lorsque $a$ et $b$ sont des constantes. La démonstration en est une simple intégration par parties.

On définit de la même manière $\hat{H}^a$, $\hat{\mathscr{U}}^a$, $\hat{P}^a$ et ainsi de suite. Si les fonctions de transition sont absolument continues par rapport à $\alpha$, on a les équivalences

$$\hat{P}(x, dy) = \alpha(dy) P(y, dx)/\alpha(dx),$$

$$\hat{H}^a(x, dy) = \alpha(dy) a(y) H^a(y, dx)/(\alpha(dx) a(x)),$$

la seconde étant valable là où $a$ est strictement positive (c'est la relation qui vaut seulement en principe pour $H_C$ au § 1).

On va maintenant esquisser deux ou trois points de la théorie du potentiel.

*a*) La mesure $a(x)\alpha(dx)$ est la répartition stationnaire du processus $(X_t^a)$ défini plus haut.

En voici une démonstration qui ne vaut que pour $a$ bornée. Choisissons $\lambda$ plus grand que $\rho a$, écrivons (4.6) pour $\rho a$ et $\lambda$ au lieu de $a$ et $b$, multiplions ensuite à gauche par $\alpha$. Compte tenu de l'identité $\lambda\alpha\mathcal{U}^\lambda = \alpha$, qui exprime l'invariance de $\alpha$ par $P_t$, on obtient

$$\alpha\mathcal{U}^{\rho a} - \alpha\mathcal{U}^\lambda = \lambda\alpha\mathcal{U}^\lambda\mathcal{U}^{\rho a} - \alpha\mathcal{U}^\lambda M_{\rho a}\mathcal{U}^{\rho a},$$

$$\alpha\mathcal{U}^{\rho a} - \alpha/\lambda = \alpha\mathcal{U}^{\rho a} - \frac{\rho}{\lambda}\alpha M_a\mathcal{U}^{\rho a},$$

$$\alpha = \rho(\alpha M_a)\mathcal{U}^{\rho a}.$$

Cette dernière égalité équivaut à $\alpha M_a = \rho(\alpha M_a)V^\rho$, relation qui exprime l'invariance de $a(x)\alpha(dx)$ par $P_t^a$.

La répartition stationnaire de $(X_t^a)$ est donc finie lorsque $\langle\alpha, a\rangle$ est fini; l'exemple classique de tel changement de temps est la transformation du mouvement brownien plan en mouvement brownien sur la sphère.

D'après (4.5), la mesure $a(x)\alpha(dx)$ est également la répartition stationnaire d'un processus récurrent à temps discret et qui admet $H^a$ comme fonction de transition en un pas. C'est plutôt cette interprétation qui entre en théorie du potentiel.

*b*) On peut définir de façon invariante les espaces d'entrée et de sortie.

Soit $\mathcal{M}_a$ l'espace des mesures $\beta$ sur E qui sont excessives par rapport à $\mathcal{U}_a$ et satisfont à $\langle\beta, a\rangle \leqslant 1$. On plonge E dans $\mathcal{M}_a$ moyennant l'application $x \to \mathcal{U}_x^a$ et on prend ensuite pour ${}^aE$ l'adhérence de E dans $\mathcal{M}_a$ selon la topologie vague. On montre sans peine, à l'aide de (4.6), que ${}^aE$ est canoniquement isomorphe à ${}^bE$ à condition que $a$ et $b$ soient continues et aient leur support compact; la démonstration est même plus facile que celle du § 2 où on ne s'est appuyé que sur la seule relation (2.1).

Cette méthode de compléter E sert les buts envisagés par Kemeny et Snell, mais il y en a d'autres liées à la structure du processus.

*c*) Posant $b = \lambda$ en (4.6) et multipliant à droite par $a$, on obtient

$$\lambda\mathcal{U}^\gamma H^a = H^a + \mathcal{U}^\lambda M_a(H^a - I) \tag{4.7}$$

qui est à rapprocher de (1.4). Puisqu'on s'intéresse à la limite $\lambda \to 0$,

on suppose $a$ fonction continue positive ayant son support compact ; si $\alpha(E)$ est finie, on se sert d'une relation plus conforme à (1.4).

A l'aide de (4.7) on retrouve la moitié des équivalences établies au § 1, mais on se heurte au problème d'étudier l'image de l'opérateur $M_a(H^a - I)$ quand on essaie de démontrer que l'existence de la limite de $\lambda \mathscr{U}^\lambda H^a f$ pour toutes $a$ et $f$ entraîne celle de $\mathscr{U}^\lambda g$ pour toute $g$ continue qui a son support compact et satisfait à $\langle \alpha, g \rangle = 0$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] S. OREY, Potential kernels for recurrent Markoff chains, *Journal of Math. Anal. Appl.*, 8 (1964), 104-132.

[2] J. G. KEMENY et J. L. SNELL, Boundary theory for recurrent Markoff chains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106 (1963), 495-520.

[3] J. G. KEMENY et J. L. SNELL, Potentials for denumerable Markov chains, *J. Math. Anal. Appl.*, 3 (1961), 196-260.

[4] F. SPITZER, *Principles of random walks*, Princeton, 1964.

[5] H. KESTEN et F. SPITZER, Ratio theorems for random walk, *Journ. d'Anal. Math.*, 9 (1963), 285-379.

G. A. HUNT,
Department of Mathematics,
Cornell University,
Ithaca, N.Y. (U.S.A.).