ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

THOMAS DELZANT

Sur l'accessibilité acylindrique des groupes de présentation finie

Annales de l'institut Fourier, tome 49, n° 4 (1999), p. 1215-1224

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_4_1215_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 4 (1999), 1215–1224

SUR L'ACCESSIBILITÉ ACYLINDRIQUE DES GROUPES DE PRÉSENTATION FINIE

par Thomas DELZANT

Introduction.

Soient G un groupe, et τ un G-arbre, c'est-à-dire un arbre muni d'une action de G sans inversion d'arêtes. Le *problème d'accessibilité* est celui de donner une borne *a priori* au nombre de sommets de τ/G. Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs : outre le célèbre théorème de Grushko sur les produit libres, citons les travaux de M. Dunwoody [Du], M. Bestvina et M. Feighn [BF], Z. Sela [S] et l'auteur [De1], [DP].

Dans cet article, nous présentons une preuve topologique du théorème « d'accessibilité acylindrique » de Sela [S], valable pour les groupes de présentation finie, ce qui nous permet d'en donner une version quantitative et d'étendre son résultat à une nouvelle classe d'arbres.

DÉFINITION. — *Soient $\mathcal{C}$ une famille de sous-groupes de G stable par conjugaison et passage au sous-groupe, et k un entier. Nous dirons que le G-arbre τ est $(k,\mathcal{C})$-acylindrique si le stabilisateur de tout segment de longueur k de τ est un élément de $\mathcal{C}$.*

Cette définition généralise celle de Z. Sela qui avait étudié le cas où la famille $\mathcal{C}$ est réduite au groupe trivial. Nous étudierons plusieurs exemples ; le cas particulier ou $\mathcal{C}$ est la famille des sous-groupes finis d'ordre donné du groupe G est particulièrement intéressante, car elle satisfait aussi une propriété de « super-accessibilité » ; on l'étudie au paragraphe 3.

Mots-clés : Accessibilité – Groupe opérant dans un arbre.
Classification math. : 20E06.

Nous dirons que le groupe G ne se scinde pas au-dessus d'un groupe de $\mathcal{C}$ si G n'est ni un amalgame non trivial $G = A *_C B$ avec $C \neq A$ et $C \neq B$, ni une HNN extension $G = A*_C$ avec $C \in \mathcal{C}$. D'autre part, on dit que le G-arbre τ est minimal si il ne contient pas de sous-arbre G-invariant.

Si G est de présentation finie, soit $\mathcal{P} = \langle g_1, \ldots, g_n; R_1, \ldots, R_k \rangle$ une présentation de G sans relation de longueur 1 ; notons $T = T(\mathcal{P})$ la somme $\sum(|R_i| - 2)$; T mesure donc la complexité de la présentation $\mathcal{P}$ de G, et si $\mathcal{P}$ est triangulaire, c'est-à-dire composée uniquement de relations de longueur 3, c'est le nombre de ces relations. On note $T(G)$ la borne inférieure des $T(\mathcal{P})$, où $\mathcal{P}$ décrit les présentations de G. Cet invariant étudié dans [De1], intervient de façon très naturelle dans les problèmes liés aux actions de groupes dans des arbres et les espaces hyperboliques [De2].

THÉORÈME 1. — *Soient G un groupe de présentation finie et $\mathcal{C}$ une famille de sous-groupes. On suppose que G ne se scinde pas au-dessus de $\mathcal{C}$; si τ est un G-arbre minimal $(k, \mathcal{C})$-acylindrique, alors le nombre de sommets de τ/G n'excède pas $12kT$.*

Remerciements. — Je remercie P. Papasoglu qui m'a posé le problème d'étendre le résultat de Sela au cadre relatif, ainsi que L. Potyagailo et Z. Sela pour d'utiles conversations.

1. La lamination duale à τ.

On fixe un groupe G de présentation finie et un arbre τ muni d'une action sans inversion du groupe G. Nous étudions dans ce paragraphe le feuilletage transversalement mesuré dual à l'action du groupe G sur τ ; si la méthode suivie est classique, le lemme 1.5 qui interprète la condition d'acylindricité sur ce feuilletage est l'observation la plus originale de cet article.

Comme le groupe G est de présentation finie, il admet une présentation dont toutes les relations sont de longueur 2 ou 3. À partir de celle-ci, on construit le complexe Π de groupe fondamental G ayant un seul sommet, noté s_0, autant d'arêtes que de générateurs, dont les faces sont des triangles représentant les relations triangulaires $ghk = 1$ et des digones représentant des relations $gh = 1$, ou $g^2 = 1$. Nous noterons $\pi : P \to \Pi$ le revêtement universel de Π, et x_0 un point base de P relevant s_0.

1.1. *Construction d'une application $\rho : P \to \tau$.*

Fixant un point base p_0 dans τ, qu'il est commode de choisir *au milieu d'une arête*, on construit d'abord une application équivariante $\rho : P \to \tau$ en trois étapes.

On pose d'abord $\rho(g \cdot x_0) = g \cdot p_0$. Puis on étend ρ au 1-squelette de P de façon affine : on envoie l'arête $\alpha = [x, y]$ sur le segment $[\rho(x), \rho(y)] \subset \tau$, par une application affine. On étend enfin ρ au 2-squelette de $\widetilde{\Pi}$ par l'application dessinée à la figure 1. Cette construction de ρ est équivariante.

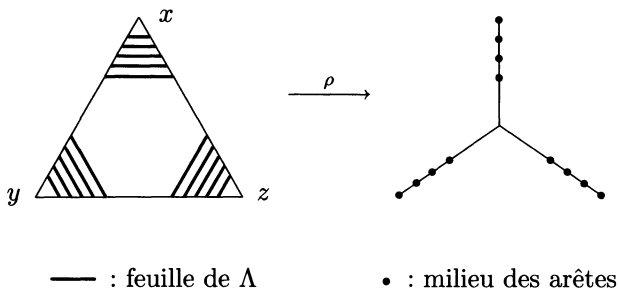

Figure 1

Notons que la restriction de ρ à une arête $[x, y]$ de P est injective, sauf si $\rho(x) = \rho(y)$.

Nous noterons P' le CW-complexe ayant même espace topologique sous-jacent que P, mais dont les sommets sont les points des arêtes de P dont l'image par ρ est le milieu d'une arête de τ, et les arêtes les sous-segments des arêtes de P compris entre deux tels sommets. On note $\Pi' = P'/G$.

1.2. *Définition de $\widetilde{\Lambda}$ et Λ.*

La lamination $\widetilde{\Lambda}$ est le graphe tracé dans P dont les composantes connexes sont les composantes connexes des images réciproques par ρ des milieux des arêtes de T (figure 1). Autrement dit, on joint dans chaque face de P' les sommets ayant même image par ρ; cette image est le milieu d'une arête de τ. Notons que $\widetilde{\Lambda}$ est une lamination mesurée co-orientée par le choix d'une orientation de chaque arête de τ/G. L'équivariance de ρ montre que $\widetilde{\Lambda}$ est l'image réciproque d'une lamination Λ tracée dans Π.

1.3. *L'arbre $\hat{\tau}$ comme résolution de τ.*

La construction utilisée ici est essentiellement celle de [D-D], prop. VI.4.3, p. 230. On considère le graphe abstrait $\hat{\tau}$ dont les sommets sont les composantes connexes de $P' \setminus \widetilde{\Lambda}$, et les arêtes les composantes connexes de $\widetilde{\Lambda}$.

Notons que les composantes connexes de $\widetilde{\Lambda}$ séparent P en deux composantes exactement : en effet celles-ci séparent P localement, et P est simplement connexe. Il en résulte que $\hat{\tau}$ est un arbre, car c'est un graphe connexe dont toutes les arêtes séparent. De plus $\hat{\tau}$ est doté d'une application équivariante $\rho : \hat{\tau} \to \tau$. Utilisant la terminologie de M. Bestvina et M. Feighn [BF], on dit que $\hat{\tau}$ est une *résolution* de τ.

1.4. *Définition de Λ_k.*

L'entier k considéré ici est celui intervenant dans la définition de $(k, \mathcal{C})$-acylindricité.

On définit un graphe $\Lambda_k \subset \Lambda$ par son intersection avec chaque face de Π. Soit $\Delta = [x, y, z]$ l'une des faces de Π; $\Lambda_k \bigcap \Delta$ est obtenu à partir de la lamination $\Lambda \bigcap \Delta$ en y supprimant les feuilles dont l'image par ρ est située à une distance inférieure à $k-1$ de $\rho(x), \rho(y), \rho(z)$ ou du centre de ce triangle dans τ. La figure 2 illustre le cas $k = 3$.

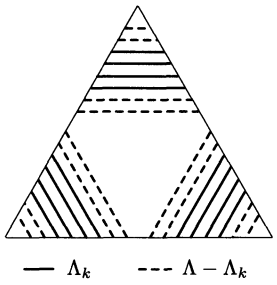

Figure 2

1.5. Lemme. — *Si C est une courbe fermée tracée dans Λ_k et g un représentant de C dans $G = \pi_1(\Pi)$, alors g fixe un segment de k-arêtes consécutives dans τ. Mieux, si Λ_k^0 est une composante connexe de Λ_k, l'image de $\pi_1(\Lambda_k^0)$ dans G fixe un segment de longueur k dans τ.*

Dans ce cas, et si de plus le G-arbre τ est $(k, \mathcal{C})$-acylindrique, l'image de $\pi_1(\Lambda_k^0)$ dans G est un groupe de $\mathcal{C}$.

Démonstration. — Avant de commencer la preuve, remarquons que pour $k = 1$, $\Lambda_k = \Lambda$, et le lemme dit qu'un élément de G représenté par une courbe fermée tracée dans Λ fixe une arête de τ, ce qui résulte de l'équivariance de ρ.

Soit C_1 une telle courbe, basée en un point x_1 du 1-squelette de Π', situé sur une feuille de Λ_k ; dans cette démonstration, il est commode de choisir x_1 comme point base pour calculer le groupe fondamental G de Π. Soit $\hat{x}_1$ un sommet de P' relevant x_1 ; son image par ρ est le milieu d'une arête y_1. L'action de G sur τ est ρ équivariante pour l'action naturelle de G sur P' obtenue par relèvement des chemins.

Notons x_2 l'un quelconque des deux sommets voisins de x_1 sur une même arête A de Π. Dans chaque triangle Δ, C_1 passe à une distance ≥ 1 des sommets et des feuilles de $\Lambda \setminus \Lambda_k$. On peut donc fabriquer une courbe C_2, passant en x_2, en poussant C_1 à une distance 1 en suivant l'holonomie de la lamination Λ ; on voit que C_2 reste dans Λ_{k-1}, et on peut donc repéter cette opération $k-1$ fois, pour obtenir $k-1$ sommets consécutifs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de l'arête A et k courbes C_i, $1 < i \leq k$ tracée dans Λ et parallèles à C_1.

Notons $u_1, u_2, \cdots u_{k-1}$ les segments $[x_i, x_{i+1}]$ de cette arête ; on voit que les courbes $\gamma_i = u_1^{-1} \cdots u_{i-1}^{-1} \cdot C_{i-1}.u_{i-1} \cdots u_1$ sont toutes homotopes.

Le choix effectué d'un point $\hat{x}_1$ de P' relevant x_1, détermine des points $\hat{x}_i$ extrémités des relevés de $u_{i-1}....u_1$ qui sont k sommets de P' situés successivement sur une même arête de P : leurs images par ρ sont les milieux de k arêtes formant un segment de longueur k de T.

Comme la courbe C_i est tracée dans Λ, sa relevée d'origine $\hat{x}_i$ est tracée dans $\widetilde{\Lambda}$, et son image par ρ est le milieu d'une arête de τ : ainsi, dans cet arbre, g fixe non seulement l'arête de milieu $\rho(\hat{x}_1)$ mais un segment constitué des $k-$arêtes successives dont les milieux sont les $\rho(\hat{x}_i)$. On a utilisé ici le fait que sur l'arête A de P, l'application ρ est injective. □

2. Démonstration du théorème 1.

On construit d'abord un CW-complexe P_k en écrasant dans P' toutes les feuilles de Λ_k en un point (figure 3) puis en supprimant tous les digones obtenus. Notons que cette construction est invariante par l'action de G. Ainsi, P_k est muni d'une action de ce groupe, et on a une application continue équivariante $e : P \to P_k$. Les images réciproques des sommets de P_k par e sont les composantes de Λ_k. En particulier les stabilisateurs des

sommets de P_k sous l'action de G sont des sous-groupes de $\mathcal{C}$. D'autre part, les fibres de l'application e sont connexes et P est simplement connexe; donc P_k est simplement connexe.

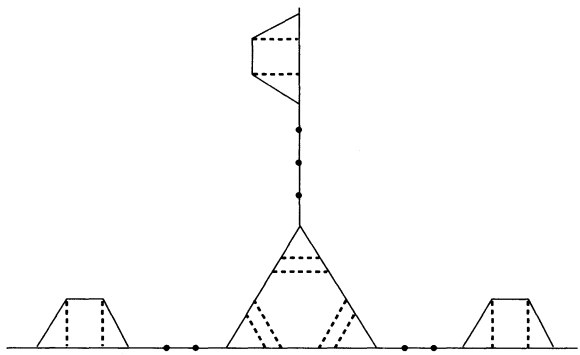

Figure 3

Nous noterons Π_k le quotient de P_k par G; il est commode de penser à Π_k comme à un *orbièdre developpable* de groupe fondamental G et de revêtement universel P_k (voir [Ha] pour la théorie des orbièdres).

Ce polyèdre Π_k est constitué de plusieurs arêtes et sommets, mais il est facile de contrôler le nombre et la combinatoire de ses faces :

2.1. LEMME. — *Le nombres de faces de Π_k est majoré par $4T$; celles-ci sont des n-gones avec $n \leq 12(k-1)$.*

Démonstration. — Chaque face de Π donne naissance à au plus quatre faces; en général celles-ci sont des $2(k-1)$ ou $6(k-1)$-gones, mais certains cas dégénérés peuvent donner des $12(k-1)-$gones. □

Nous dirons qu'une arête de Π_k est *libre* si elle n'est adjacente à aucune face. Notons Y_k l'ensemble des arêtes libres de Π_k, et X_k l'ensemble des composantes connexes du complémentaire $\Pi_k - Y_k$; si $s \in X_k$, on note Π_k^s la composante connexe de $\Pi_k - Y_k$ qu'il représente : c'est un sous-orbièdre de Π_k. On note alors $G_s \subset G$ le groupe fondamental de cet orbièdre Π_k^s : c'est aussi le sous-groupe de G stabilisateur de la composante connexe de $P \setminus (\pi \circ e)^{-1} Y$ se projetant sur Π_k^s.

On peut alors former un graphe de groupe (au sens de Serre [Se]) dont l'ensemble des sommets est X_k, l'ensemble des arêtes Y_k, où l'on marque

chaque sommet s par le groupe G_s, et chaque arête y par son stabilisateur dans Π_k. Par construction, le groupe fondamental de ce graphe de groupe est le groupe G. Notons que les stabilisateurs des arêtes de ce graphe sont des sous-groupes de $\mathcal{C}$.

Jusqu'à présent, nous n'avions pas encore utilisé le fait que G ne se scinde pas comme amalgame ou HNN au-dessus d'un sous-groupe de $\mathcal{C}$. Il est important de noter que, sous cette hypothèse, le groupe G est égal au stabilisateur d'un des sommets du graphe de groupe X_k. On a en particulier :

2.2. LEMME. — *Si G ne se scinde pas comme amalgame ou HNN au-dessus d'un groupe de $\mathcal{C}$, le graphe sous-jacent à X_k est un arbre, et pour l'un des sommets s de ce graphe X_k, $G_s = G$.*

Par construction l'application ρ induit une application $\rho : P_k \to \tau$ dont la restriction au 1-squelette de P_k est simpliciale. Considérant ce 1-squelette comme graphe, on voit que $\rho(P_k^1)$ est un sous-arbre G-invariant de τ ; c'est donc τ, car par hypothèse τ est minimal (ne contient donc pas de sous-arbre G-invariant). On en déduit une majoration du nombre des sommets de τ/G :

Le nombre de sommets de τ/G n'excède pas celui de Π_k.

En comptant le nombre de sommets de ce polyèdre, on a donc le résultat promis dans l'introduction : dans chaque triangle, il y a au plus $6(k-1)T$ feuilles de Λ_k chacune étant adjacente à deux sommets de Π_k au plus ; donc en tout le nombre de sommets de ce polyèdre est majoré par $12(k-1)T$:

2.3. THÉORÈME. — *Soient G un groupe de présentation finie et $\mathcal{C}$ une famille de sous-groupes. On suppose que G ne se scinde pas au-dessus de $\mathcal{C}$; si τ est un G-arbre minimal $(k, \mathcal{C})$-acylindrique, alors le nombre de sommets de τ/G n'excède pas $12(k-1)T$.*

3. Exemples.

Dans le cas ou $\mathcal{C}$ est la famille, notée Φ_n, des sous-groupes de G finis et d'ordre inférieur à un entier n, on peut préciser le résultat principal, en généralisant le théorème de super-accessibililté acylindrique de Sela. Si τ

est un G-arbre et θ un automorphisme de G, nous noterons τ^θ l'arbre τ muni de l'action de G composée avec θ.

3.1. THÉORÈME. — *Soit G un groupe de présentation finie; on suppose que G n'est ni un amalgame ni une HNN extension au-dessus d'un groupe d'ordre inférieur à n. Il existe une famille finie $\tau_1, ..., \tau_{N(n,k)}$ de G-arbres tels que pour tout G-arbre (k, Φ_n)-acylindrique, il existe un automorphisme θ de G et une application G-équivariante $\tau_i^\theta \to \tau$.*

Partant d'un polyèdre Π comme au paragraphe précédent, d'un G-arbre $k-$acylindrique minimal τ dont les stabilisateurs d'arêtes sont finis, on construit l'orbièdre Π_k. L'image de Λ dans Π_k est aussi une lamination, et l'arbre $\hat{\tau}$ est encore l'arbre dual à cette lamination, car les composantes connexes de $P-\Lambda$ sont celles de $P_k-e(\Lambda)$, où e est l'application d'écrasement du paragraphe 2.

L'orbièdre Π_k est donc un polyèdre de dimension 2, dont le nombre de sommets faces et arêtes est borné, et dont les sommets faces et arêtes sont marqués par un groupe fini (leur stabilisateur) qui est un groupe d'ordre inférieur à n. L'ensemble des orbièdres munis d'une lamination ayant toutes ces contraintes combinatoires est évidemment fini. Nous les noterons $\Omega_1, \ldots, \Omega_{M(n,k)}$. Notant $G_i = \pi_1^{\text{orb}}(\Omega_i)$ le groupe fondamental au sens de la théorie des orbièdres, et τ_i le G_i-arbre dual à la lamination de Ω_i, on voit que l'on obtient l'action de G sur $\hat{\tau}$ en composant l'isomorphisme de G et G_i avec l'action de G_i sur τ_i. Ce qui est le résultat promis.

Remarque. — Le cas ou $n = 0$ est le théorème de super-accessibilité acylindrique 2.2 de Sela [S].

Une application. — Le théorème 3.1 permet d'étendre les résultats de [S], § 4, au cas des groupes ayant de la torsion. On dit qu'un groupe est virtuellement cyclique si il est fini ou contient $\mathbb{Z}$ comme sous-groupe d'indice fini.

Soit G un groupe dans lequel tout sous-groupe virtuellement cyclique infini est contenu dans un unique sous-groupe virtuellement cyclique maximal égal à son normalisateur, et dans lequel l'ordre des sous-groupes finis est borné par un entier n; c'est le cas par exemple si G est hyperbolique au sens de Gromov. Supposons que G est de présentation finie et ne se décompose pas comme amalgame ou HNN au-dessus d'un groupe fini. On a alors :

3.2. THÉORÈME. — *À automorphisme près de G, il existe seulement un nombre fini de G-arbres minimaux à stabilisateurs d'arêtes virtuellement cycliques.*

Démonstration. — Le raisonnement présenté (succinctement) est celui de [S]. On note d'abord que l'arbre de Serre de tout scindement de G comme amalgame ou HNN au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique est $(3, \Phi_n)$-acylindrique : en effet, si par exemple $G = A *_C B$ le stabilisateur de trois arêtes consécutives est de la forme $aCa^{-1} \bigcap C \bigcap bCb^{-1} = C_1$ avec $a \in A \setminus C, b \in B \setminus C$. Ce groupe est normalisé par a, b, et donc par ab dont aucune puissance n'est dans A, B et donc C_1 : il est donc fini.

Rappelons alors le fait fondamental suivant (Bestvina-Feighn [BF]) :

Soit $\rho : \widehat{T} \to T$ une résolution ; il existe une suite de *Stallings folds*

$$\widehat{T} = T_0 \to T_1 \to T_2 \to \cdots \to T_n = T.$$

Chacun de ces *Stallings folds* soit diminue strictement la combinatoire de T_i/G (le nombre de sommets ou d'arêtes), soit augmente strictement le stabilisateur d'au moins une arête. On note E le nombre d'arêtes de T_0 et pour chaque arête e_i, $i = 1, \ldots, E$, N_i l'indice du stabilisateur G_{e_i} dans $G_{\rho(e_i)}$; on a $n \leq \sum_i N_i$.

L'arbre T s'obtient donc avec au plus $n \leq \sum_i N_i$ *Stallings folds* à partir de l'un des arbres T_i fournis par le théorème précédent. Par hypothèse, et comme G ne se scinde pas au-dessus d'un groupe fini, les stabilisateurs des arêtes de T_i sont virtuellement cyliques, et contenus dans ceux de T. En particulier, le stabilisateur de chaque arête est d'indice fini dans le sous-groupe élémentaire maximal qui le contient ; donc à chaque étape, il y a au plus un nombre fini de façon de faire le *Stalling fold* (il faut choisir une arête e et augmenter son stabilisateur, ce qui revient à choisir un sous-groupe coincé entre G_e et $G_{\hat{e}}$). On a donc le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[BF] M. BESTVINA, M. FEIGHN, Bounding the complexity of simplicial group actions on trees, Inv. Math., 103 (1991), 449–469.

[Del] T. DELZANT, Décomposition d'un groupe en produit libre ou somme amalgamée, Crelle J., 470 (1996), 153–180.

[De2] T. DELZANT, L'image d'un groupe dans un groupe hyperbolique, Com. Math. Helv., 70 (1995), 267–284.

[DP] T. DELZANT, L. POTYAGAÏLO, Accessibilité hiérarchique des groupes de présentation finie, preprint, 1998.

[DD] W. DICKS, M.J. DUNWOODY, Group acting on graphs, Cambridge Studies in Adv. Math., 17, Cambridge (1989).

[Du] M.J. DUNWOODY, The accessibility of finitely presented groups, Inv. Math., 81 (1985), 449–457.

[Ha] A. HAEFLIGER, Complex of groups and orbihedra, in 'Group theory from a geometric point of view', E. Ghys, A. Haefliger A. Verjovski eds., World Scientific, 1991.

[S] Z. SELA, Acylindrical accessibility, Inv. Math., 129 (1997), 527–565.

[Se] J.-P. SERRE, SL_2, arbres et amalgames, Astérisque, 46 (1977).

Manuscrit reçu le 25 septembre 1998,
accepté le 18 décembre 1998.

Thomas DELZANT,
Université Louis Pasteur
Département de mathématiques
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France).
delzant@math.u-strasbg.fr