ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RUTGER NOOT

Classe de conjugaison du frobenius des variétés abéliennes à réduction ordinaire

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 5 (1995), p. 1239-1248

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_5_1239_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 5 (1995), 1239–1248

CLASSE DE CONJUGAISON DU FROBENIUS DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES À RÉDUCTION ORDINAIRE

par Rutger NOOT

1. Introduction.

1.1. Soit X une variété abélienne sur un corps de nombres E. Pour tout nombre premier ℓ on peut alors considérer la représentation galoisienne

$$\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell))$$

associée à X. Les représentations ρ_ℓ et la façon dont elles varient avec ℓ ont été étudiées depuis longtemps. Un résultat classique est le suivant. Soit v une place finie de E de caractéristique résiduelle p et soit $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$ un élément de Frobenius en v. Si la variété X a bonne réduction en p, alors, pour $\ell \neq p$, le polynôme caractéristique de $\rho_\ell(\tau)$ ne dépend que de v et est à coefficients dans $\mathbf{Z}$. En outre, ce polynôme ne dépend pas de $\ell \neq p$. Finalement on sait que dans ce cas, l'automorphisme $\rho_\ell(\tau)^{-1}$ est semi-simple. On voit que la classe de conjugaison (géométrique) de $\rho_\ell(\tau)^{-1}$ dans $\mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell))$ est définie sur $\mathbf{Q}$. En invoquant l'isomorphisme canonique (ou en effet n'importe quel autre isomorphisme)

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell),$$

on déduit qu'il existe une classe de conjugaison C dans $\mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}))_{\bar{\mathbf{Q}}}$, définie sur $\mathbf{Q}$, telle que $\rho_\ell(\tau)^{-1} \in C(\mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $\ell \neq p$.

Mots-clés : Représentation galoisienne – (élément de) Frobenius – (groupe de) Mumford-Tate – Motif.
Classification math. : 14K15 – 14G25 – 11G10 – 14F99.

En considérant la cohomologie cristalline $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(X_v/W(\overline{\mathbf{F}}_p))$ de la réduction de X en v, on trouve un analogue p-adique de cet énoncé. Soient E_v le corps résiduel de E en v et $a = [E_v : \mathbf{F}_p]$. Soit Frob la puissance a-ième du frobenius σ-linéaire de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(X_v/W(E_v))$. On sait que Frob est semi-simple et que son polynôme caractéristique est égal au polynôme caractéristique commun des $\rho_\ell(\tau)^{-1}$. On conclut alors que Frob $\in C(W(E_v) \otimes \mathbf{Q})$ pour tout isomorphisme

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes W(E_v) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(X_v/W(E_v)) \otimes \mathbf{Q}.$$

Soit $G \subset \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}))$ le groupe de Mumford–Tate de X, voir 2.1 pour la définition exacte. Si on indentifie $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ à $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell$ par l'isomorphisme canonique qui les relie, alors ρ_ℓ se factorise par un morphisme $\rho_\ell \colon \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E) \to G(\mathbf{Q}_\ell)$. Pour tout nombre premier $\ell \neq p$, soit $C_\ell \subset G_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}$ la classe de conjugaison de $\rho_\ell(\tau)^{-1}$. Comme le fait Serre dans [Se], 12.6, on peut se demander si les C_ℓ sont définies sur $\mathbf{Q}$ et si cela est le cas, si elles dépendent de ℓ. Dans cet article on montrera que si la réduction de X en v est *ordinaire*, alors C_ℓ est définie sur $\mathbf{Q}$ et indépendant de ℓ. En effet, on montrera même qu'il existe $F \in G(\mathbf{Q})$ tel que $\rho_\ell(\tau)^{-1}$ et F sont conjugués par un élément de $G^0(\mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $\ell \neq p$. Il y a des énoncés analogues pour la cohomologie cristalline, voir 2.1 et 2.2. Remarquons par ailleurs qu'en général on ne peut pas s'attendre à ce qu'il existe un tel élément $F \in G(\mathbf{Q})$. Il existe des courbes elliptiques pour lesquelles la classe C_ℓ, bien que définie sur $\mathbf{Q}$, ne contienne pas de points à valeurs dans $\mathbf{Q}$. Une conséquence du théorème est une réponse affirmative à [Se], 12.5 pour un motif M découpé par une classe de Hodge dans le motif d'une variété abélienne à réduction ordinaire, *cf.* 2.4 : on montre que le polynôme caractéristique du frobenius d'un tel motif est le même pour toutes les réalisations ℓ-adiques et pour la réalisation p-adique.

Pour la démonstration de ce résultat on s'inspire des méthodes utilisées par Deligne dans [De]. On construit une variété de Shimura qui correspond au groupe de Mumford–Tate de X. On utilise cette variété pour comparer la cohomologie de X à la cohomologie d'une variété abélienne de type CM, pour laquelle le théorème est plus facile à montrer. Parce qu'on veut aussi comparer l'action de frobenius sur la cohomologie des deux variétés, on cherche en effet une variété abélienne correspondant à un point spécial de la variété de Shimura dont la réduction en v soit isomorphe à X_v. Pour montrer qu'une telle variété existe, on aura besoin des résultats de [No] sur la réduction des variétés de Shimura.

Remerciements. Cet article doit son existence à J.-P. Wintenberger.

En particulier, l'idée du théorème principal (2.2) est due à lui. Je l'en remercie cordialement. Je remercie également le referee pour l'idée d'utiliser *Zarhin's trick* dans la démonstration du théorème 2.2, ce qui simplifie l'argument original.

1.2. *Notations.* Dans tout l'article, $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes et $\bar{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Pour chaque nombre premier p, soit $\mathbf{Q}_p$ le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valuation p-adique et soit $\bar{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. On fixe une inclusion $\bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$. Un corps de nombres est un sous-corps $E \subset \bar{\mathbf{Q}}$ tel que $[E : \mathbf{Q}]$ est fini. Si E est un corps de nombres, on écrit $\mathcal{O}_E$ pour l'anneau des entiers de E, $\mathfrak{p}_E$ pour l'idéal premier déterminé par l'inclusion $E \subset \bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$ et k_E pour le corps résiduel $\mathcal{O}_E/\mathfrak{p}_E$. Le localisé de $\mathcal{O}_E$ en $\mathfrak{p}_E$ est noté $\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ et le complété de E en $\mathfrak{p}_E$ est noté $E_\mathfrak{p}$. On note $\mathfrak{p}_E$ l'idéal de $E_\mathfrak{p}$ défini par $\mathfrak{p}_E$. On écrit $\bar{\mathcal{O}}$ pour l'anneau des entiers de $\bar{\mathbf{Q}}$, $\bar{\mathfrak{p}} \subset \bar{\mathcal{O}}$ pour l'idéal défini par l'inclusion $\bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$ et $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ pour le localisé de $\bar{\mathcal{O}}$ en $\bar{\mathfrak{p}}$.

Pour tout corps de nombres E, on désigne par $E_\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}} \subset \bar{\mathbf{Q}}_p$ l'extension maximale non-ramifiée de $E_\mathfrak{p}$ contenue dans $\bar{\mathbf{Q}}_p$. On écrit $\widehat{E}_\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}}$ pour le complété de $E_\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}}$. Dans le cas où $E = \mathbf{Q}$ on désigne ces corps par $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et $\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ respectivement. On note $\bar{\tau} \in \mathrm{Gal}(\bar{k}_E/k_E)$ l'automorphisme de Frobenius et $\tau \in \mathrm{Gal}(E_\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}}/E_\mathfrak{p})$ le relèvement unique de $\bar{\tau}$. Enfin on choisit une fois pour toutes un élément $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$ dont la restriction à $E_\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}} \cap \bar{\mathbf{Q}}$ induit $\tau|_{E_\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}} \cap \bar{\mathbf{Q}}}$.

Pour un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et soit $P(k)$ le corps des fractions de $W(k)$. On écrit $\bar{\sigma}$ pour le frobenius absolu de k et σ pour l'automorphisme de $W(k)$ induit par $\bar{\sigma}$. Si E est un corps de nombres, l'inclusion $E \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$ détermine une inclusion $P(k_E) \hookrightarrow \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} \subset \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ via laquelle on considère $P(k_E)$ comme un sous-corps de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et de $\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$. On identifie $P(\bar{k}_E) = \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$. Si $a = [k_E : \mathbf{F}_p]$, alors on remarquera que, avec cette identification, $\tau|_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} = \sigma^a|_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$.

Pour chaque corps K, Vect_K est la catégorie des K-espaces vectoriels.

2. La réalisation de Betti de l'action de frobenius.

2.1. Soit E un corps de nombres et soit X une variété algébrique, propre et lisse sur E. On note $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ la cohomologie de Betti de

$X(\mathbf{C})$, $\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ la cohomologie étale ℓ-adique de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ et $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X/E)$ la cohomologie de De Rham de X/E. Il y a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong \mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ via lequel on identifie $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ avec un sous-espace de $\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$.

Soient Mot_E et $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}$ les catégories de motifs sur E et sur $\bar{\mathbf{Q}}$ respectivement, définies par les cycles de Hodge absolus, comme en [DM]. Dans cet article, une classe de Hodge est supposée avoir une composante dans chacune des réalisations de Betti, étale et de De Rham. Soient $h(X) \in \mathrm{Mot}_E$ et $h(X_{\bar{\mathbf{Q}}}) \in \mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}$ les objets définis par X et par $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ respectivement et soient $\mathrm{Mot}_E(X)$ et $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}})$ les $\otimes$-sous-catégories de Mot_E et de $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}$ engendrées par l'objet de Tate et $h(X)$ respectivement $h(X_{\bar{\mathbf{Q}}})$, comme dans [DM], 1.14.

Le foncteur $X \mapsto \mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ définit un foncteur fibre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}$ à valeurs dans $\mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}}$ sur chacune des catégories Mot_E, $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}$, $\mathrm{Mot}_E(X)$ et $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X)$. Soit G le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}$ de $\mathrm{Mot}_E(X)$ et soit $G^0 \subset G$ la composante connexe de l'identité. Dans [DM], 6.23(b), il est montré que G^0 est le groupe des $\otimes$-automorphismes de la restriction de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}$ à $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X)$. On dit que G et G^0 sont les *groupes de Mumford–Tate* de X et de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ respectivement. Si X est une variété abélienne, ce qui sera le cas dans cet article, alors $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $\wedge^* \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ et G s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})) \times \mathbf{G}_m$. Dans ce cas, on sait grâce à [De], 2.11 que G^0 est le groupe de Mumford–Tate de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ (ou de $X_{\mathbf{C}}$) au sens habituel.

Comme on a identifié $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$, le groupe $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre $\mathrm{H}^*_\ell \colon \mathrm{Mot}_E(X) \to \mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}_\ell}$ défini par la cohomologie étale ℓ-adique. Il s'ensuit de [DM], 6.23(d) que la représentation ℓ-adique $\rho_\ell \colon \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell))$ induit une application $\rho_\ell \colon \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E) \to G(\mathbf{Q}_\ell)$.

Supposons désormais que X ait bonne réduction en $\mathfrak{p}_E$, c'est-à-dire qu'il existe un schéma propre et lisse $\mathcal{X}/\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ tel que $\mathcal{X}_E = X$. Soit $k = k_E$. Dans ce cas, on peut considérer la cohomologie cristalline $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ et l'on inclut alors une composante cristalline dans la donnée d'une classe de Hodge. Le frobenius absolu $\mathrm{Fr}_{\mathrm{abs}} \colon \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}_k$ induit une application σ-linéaire

$$\mathrm{F}_{\mathrm{cris}} \colon \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k)).$$

Par abus de notation, on note toujours $\mathrm{F}_{\mathrm{cris}}$ l'extension σ-linéaire de $\mathrm{F}_{\mathrm{cris}}$ à

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) = \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes W(\bar{k}).$$

Si $a=[k:\mathbf{F}_p]$, alors on pose $\mathrm{Frob}:=\mathrm{F}^a_{\mathrm{cris}}\colon \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k))$. C'est une application $W(k)$-linéaire. On note Frob son extension $W(\bar{k})$-linéaire à $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))$.

La cohomologie cristalline $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ définit un foncteur fibre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}$ de $\mathrm{Mot}_E(X)$ à valeurs dans $\mathrm{Vect}_{P(k)}$. De même, on définit un foncteur fibre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}$ de $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X)$ à valeurs dans $\mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$. Soit G_{cris} le groupe des $\otimes$-endomorphismes de

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}\colon \mathrm{Mot}_E(X) \to \mathrm{Vect}_{P(k)}\,.$$

D'après un théorème de Blasius, [Og], 4.1, $\mathrm{Frob} \in \mathrm{End}(\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k)))$ définit un élément $\mathrm{Frob} \in G_{\mathrm{cris}}(P(k))$ si X est une variété abélienne.

Finalement on définit I_X comme le $G^0_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$-$(G^0_{\mathrm{cris}})_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$-torseur des $\otimes$-isomorphismes des foncteurs fibres $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}$ et $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}$ de $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X)$.

2.2. THÉORÈME. — *Supposons, avec les notations et définitions du 2.1, que X soit une variété abélienne et que X ait bonne réduction ordinaire en $\mathfrak{p}_E$, donc que $\mathcal{X}_k$ soit une variété abélienne ordinaire. Alors il existe $F \in G(\mathbf{Q})$ tel que*

- *pour tout nombre premier $\ell \neq p$, il existe $g_\ell \in G^0(\mathbf{Q}_\ell)$ tel que $\rho_\ell(\tau)^{-1} = g_\ell F g_\ell^{-1}$ et*
- *il existe $g_p \in I_X(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ tel que $\mathrm{Frob} = g_p F g_p^{-1}$.*

Démonstration. — On se ramène d'abord au cas ou X est principalement polarisée. Par [M-B], IX, 1.1, la variété abélienne $Y = (X \times X^*)^4$ admet une polarisation principale et est isogène sur E à X^8. Clairement, $\mathrm{Mot}_E(X^8)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mot}_E(X)$ et comme $\mathrm{Mot}_E(X)$ est engendrée par $h^1(X)$ (cf. [DM], §6) et comme $h^1(X)$ est un sous-objet de $h^1(X^8)$, on a en effet une égalité. De même, $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X) = \mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X^8)$. Il s'ensuit que le groupe de Mumford–Tate G_Y de Y (resp. le groupe G^0_Y, $G_{\mathrm{cris},Y}$, $G^0_{\mathrm{cris},Y}$, le torseur I_Y) est isomorphe à $G = G_X$ (resp. à G^0, G_{cris}, G^0_{cris}, I_X). Dans chaque cas, un isomorphisme est donné par conjugaison avec i^*, où $i\colon X^8 \to Y$ désigne une E-isogénie. Comme i est définie sur E, ces isomorphismes commutent aux représentations ℓ-adiques et respectent les éléments de Frobenius cristallins. Ceci montre qu'il suffit de montrer le théorème sous la condition supplémentaire que X est principalement polarisée, une condition qu'on supposera satisfaite dans ce qui suit.

Pour définir l'application $\rho_\ell(\tau)$, on considère l'application

$$\varphi_\tau = \mathrm{id} \times \mathrm{Spec}\,\tau\colon X_{\bar{\mathbf{Q}}} \longrightarrow X_{\bar{\mathbf{Q}}},$$

qu'on peut considérer comme un endomorphisme τ-linéaire de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$. On définit $\rho_\ell(\tau)$ comme étant le morphisme φ_τ^*. Soient $k = \mathcal{O}_E/\mathfrak{p}_E$ et $\bar{k} = \bar{\mathcal{O}}/\bar{\mathfrak{p}}$ et soit $\mathrm{Fr}_\tau\colon \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}_k$ le morphisme de Frobenius relatif associé à $\bar{\tau}$. On continue d'écrire Fr_τ pour l'endomorphisme de $\mathcal{X}_{\bar{k}}$ obtenu par extension du corps de base. On sait ([Mi], 13.5) que

$$\mathrm{Fr}_\tau^* \varphi_\tau^*\colon \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$$

est l'identité. Il s'ensuit que l'isomorphisme $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ transforme l'action de $\rho_\ell(\tau) = \varphi_\tau^*$ en $(\mathrm{Fr}_\tau^*)^{-1}$.

Soit $\mathrm{Fr}_{\mathrm{abs}}\colon \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}_k$ le frobenius absolu de $\mathcal{X}_k$. Rappelons de 2.1 que si $a = [k{:}\mathbf{F}_p]$, alors $\mathrm{Frob}\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ est par définition égale à $(\mathrm{Fr}_{\mathrm{abs}}^a)^*$. Après extension des scalaires à $\bar{k}$, on trouve que $(\mathrm{Fr}_{\mathrm{abs}}^a)_{\bar{k}} = \mathrm{Fr}_\tau$, donc on voit que

$$\mathrm{Frob}\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))$$

(l'extension $W(\bar{k})$-linéaire de Frob à $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))$) est égale à Fr_τ^*.

On se propose de comparer la cohomologie de X à celle d'une variété abélienne Z de type CM. Parce qu'on veut montrer un lemme sur les classes de Hodge sur X, il faut trouver une telle Z munie des mêmes classes de Hodge que X. En s'inspirant de [De], on est ainsi amené à étudier la variété de Shimura définie par le groupe de Mumford–Tate de X. On cherche un point sur cette variété correspondant à une variété abélienne de type CM. Comme l'énoncé porte aussi sur l'élément de Frobenius en $\mathfrak{p}$, il est souhaitable que la réduction de Z soit isomorphe à celle de X. Ce qu'on cherche est donc un point spécial de cette variété de Shimura dont la réduction est égale à la réduction du point correspondant à X. Une fois qu'on a trouvé la variété Z cherchée, on utilise la cohomologie du schéma abélien universel sur la variété de Shimura pour trouver des identifications de la cohomologie de X avec la cohomologie de Z qui respectent les classes de Hodge.

On écrira $H := \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ et $H_{\mathbf{Z}} := \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \subset H$. Soit $h\colon S \to G^0_{\mathbf{R}}$ le morphisme qui définit la structure de Hodge sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{R}) = H \otimes \mathbf{R}$. Pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset G^0(\mathbf{A}^f)$, on peut considérer le modèle faiblement canonique ${}_K M(G^0, h)/\bar{\mathbf{Q}}$ de la variété de Shimura définie par ces données. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $(p, N) = 1$ et soit $K_N \subset \mathrm{GL}(H_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{A}^f) \cap G^0(\mathbf{A}^f)$ le sous-groupe de congruence des éléments congrus à id modulo N. Soit A_N l'espace de modules de variétés abéliennes principalement polarisées sur $\bar{\mathbf{Q}}$, de dimension $\dim X$, munies d'une structure de niveau N. On sait (cf. [MF], 7.9)

que pour N assez grand tel que $(p,N)=1$, A_N est un espace de modules fin et qu'il admet un modèle lisse $\mathcal{A}_N \to \operatorname{Spec}\bar{\mathcal{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$. Il s'ensuit de [No], 3.3 qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ avec $(p,N)=1$ tel que l'application canonique $M_N := {}_{K_N}M(G^0,h) \to A_N$ soit une immersion fermée. On suppose que N soit assez grand pour qu'en plus A_N et M_N soient des espaces de modules fins et que K_N agisse trivialement sur l'espace des cycles de Hodge absolus sur $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$. Par construction de M_N, on a une structure de niveau N sur X telle que X, munie de cette structure, correspond à un point de M_N. Les hypothèses entraînent que A_N et M_N sont lisses, qu'il existe des schémas abéliens universels sur A_N et sur M_N et que tout cycle de Hodge sur $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ s'étend à un cycle de Hodge sur le schéma abélien universel sur M_N. Tout ceci est encore vrai pour la composante connexe de M_N contenant le point correspondant à X. On remplace M_N par cette composante, donc dans la suite on pourra supposer que M_N soit connexe. Soit $\widetilde{M}'$ l'adhérence de M_N dans $\mathcal{A}_N$ et soit $\widetilde{M}$ le normalisé de $\widetilde{M}'$. On note α l'application canonique $\widetilde{M} \to \mathcal{A}_N$, composée de l'application naturelle $\widetilde{M} \to \widetilde{M}'$ et l'immersion $\widetilde{M}' \to \mathcal{A}_N$. Le schéma abélien $\mathcal{X}$ correspond à un point $x \in \mathcal{A}_N(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}})$ et comme $x_{\bar{\mathbf{Q}}} \in M_N(\bar{\mathbf{Q}})$, il existe un point $\tilde{x} \in \widetilde{M}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}})$ tel que $\alpha(\tilde{x}) = x$.

D'après [No], 3.9, il existe un point $\tilde{z} \in \widetilde{M}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}})$ dont la réduction modulo $\bar{\mathfrak{p}}$ est égale à la réduction de $\tilde{x}$ et tel que le schéma abélien $\mathcal{Z}$ correspondant à $\alpha(\tilde{z})$ est de type CM. Soit $Z/\bar{\mathbf{Q}}$ la fibre générique de $\mathcal{Z}$. Parce que $\mathcal{Z}_{\bar{k}} = \mathcal{X}_{\bar{k}}$, la variété abélienne $\mathcal{Z}_{\bar{k}}$ est ordinaire et on a donc une égalité $\operatorname{End}^0(\mathcal{Z}_{\bar{k}}) = \operatorname{End}^0(Z)$. Cela implique que $\operatorname{Fr}_\tau^{-1} \in \operatorname{End}^0(\mathcal{X}_{\bar{k}}) = \operatorname{End}^0(\mathcal{Z}_{\bar{k}})$ se relève en $F_Z \in \operatorname{End}^0(Z)$. Via l'isomorphisme

$$\iota_\ell \colon \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(Z, \mathbf{Q}_\ell),$$

l'action de $\rho_\ell(\tau) = \varphi_\tau^*$ se transforme en F_Z^*. On a trivialement que

$$\operatorname{Fr}_\tau^* = (F_Z^{-1})^*_{\bar{k}} \colon \mathrm{H}^1_{\text{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\text{nr}} \to \mathrm{H}^1_{\text{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\text{nr}}.$$

On peut maintenant définir la transformation F. Comme M_N est connexe, il existe un chemin γ dans $M_N(\mathbf{C})$ reliant $\alpha(\tilde{x}_{\mathbf{C}})$ et $\alpha(\tilde{z}_{\mathbf{C}})$. Soit

$$\iota_B \colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(Z(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$$

l'isomorphisme défini par γ. On pose $F := \iota_B^{-1} \circ (F_Z^{-1})^* \circ \iota_B$. Avec cette définition, il est évident que, pour que $\varphi_\tau^* = g_\ell F^{-1} g_\ell^{-1}$, il faut définir $g_\ell \in \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)) = \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell)$ comme $g_\ell := \iota_\ell^{-1} \circ (\iota_B)_{\mathbf{Q}_\ell}$. Pour ce qui concerne la cohomologie cristalline et l'application g_p, il s'ensuit de [Wi], 4.2.2 qu'il existe un élément $g_Z \in I_Z(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\text{nr}})$ et comme g_Z respecte les classes de Hodge, on a

$$g_Z \circ (F_Z^{-1})^* \circ g_Z^{-1} = (F_Z^{-1})^*_{\bar{k}} = \operatorname{Fr}_\tau^* \in \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{cris}}(\mathcal{Z}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\text{nr}}).$$

Le fait que $\mathcal{X}_{\bar{k}} = \mathcal{Z}_{\bar{k}}$ implique que $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{Z}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))$, donc pour avoir $\mathrm{Fr}^*_\tau = g_p F g_p^{-1}$, on peut prendre $g_p = g_Z \circ (\iota_B)_{\widehat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{nr}}_p}$. Pour achever la démonstration du théorème 2.2, il reste à montrer le lemme suivant.

2.3. LEMME. — *Avec les notations ci-dessus, on a* $F \in G(\mathbf{Q})$, $g_\ell \in G^0(\mathbf{Q}_\ell)$ *et* $g_p \in I_X(\widehat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{nr}}_p)$.

Démonstration. — Soit c_x un cycle de Hodge absolu dans la cohomologie de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$. Par construction de M_N, il existe un cycle de Hodge c dans la cohomologie du schéma abélien universel $f\colon \mathcal{U} \to M_N$ dont la spécialisation en x est c_x (ce qui justifie la notation). On remarque d'abord que $\iota_{\mathrm{B}}(c_{x,\mathrm{B}}) = c_{z,\mathrm{B}}$, où l'indice B désigne la composante dans la cohomologie de Betti d'une classe de Hodge : c'est évident parce que c_{B} est une section globale d'un système local $\otimes_i \mathbf{R}^{n_i} f^{\mathrm{an}}_* \mathbf{Q}(n)$ sur $M_N(\mathbf{C})$ et on a identifié deux fibres de ce système via le chemin γ.

On montre un énoncé analogue pour la cohomologie étale. Soit $\tilde{f}\colon \widetilde{\mathcal{U}} \to \widetilde{M}$ l'image inverse par $\alpha\colon \widetilde{M} \to \mathcal{A}_N$ du schéma abélien universel sur $\mathcal{A}_N$. Comme M_N est lisse, M_N est la fibre générique de $\widetilde{M}$ et la restriction de $\widetilde{\mathcal{U}}$ à M_N est égale à $\mathcal{U}$. On considère le produit tensoriel $\otimes_i \mathbf{R}^{n_i} \tilde{f}^{\text{ét}}_* \mathbf{Q}_\ell(n)$ sur $\widetilde{M}$. La réalisation étale ℓ-adique c_ℓ de c est une section de ce système sur la fibre générique de $\widetilde{M}$. Soit $\widetilde{M}^{\mathrm{hs}}$ le henselisé strict du localisé $\widetilde{M}_{\tilde{x}_{\bar{k}}}$ et soit $\mathcal{H}_\ell$ la restriction à $\widetilde{M}^{\mathrm{hs}}$ de $\otimes_i \mathbf{R}^{n_i} \tilde{f}^{\text{ét}}_* \mathbf{Q}_\ell(n)$. Comme $\mathcal{H}_\ell$ est constant, la restriction de c_ℓ à la fibre générique de $\widetilde{M}^{\mathrm{hs}}$ s'étend à une section $\tilde{c}_\ell$ de $\mathcal{H}_\ell$. Les identifications

$$\bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)(n) \cong \bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell)(n) \cong \bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\text{ét}}(Z, \mathbf{Q}_\ell)(n)$$

proviennent de l'identification de trois fibres de $\mathcal{H}_\ell$. Il s'ensuit que ces isomorphismes et donc leur composé ι_ℓ envoient la valeur de $\tilde{c}_\ell$ en chacun des points sur sa valeur en tout autre point, ce qui montre que $\iota_\ell(c_{x,\ell}) = c_{z,\ell}$.

Les observations ci-dessus nous permettent de montrer que $g_\ell \in G^0(\mathbf{Q}_\ell)$. On se rappelle qu'on a identifié $\mathrm{H}^i_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$. Cette identification envoie $c_{x,B} \otimes 1$ sur $c_{x,\ell}$, donc il suffit de montrer que $g_\ell(c_{x,\ell}) = c_{x,\ell}$. Mais cela est évident après ce qui précède parce que $g_\ell = \iota_\ell^{-1} \circ (\iota_B)_{\mathbf{Q}_\ell}$.

Pour montrer que $g_p \in I_X(\widehat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{nr}}_p)$ il faut montrer que $g_p(c_{x,B}) = c_{x,\mathrm{cris}}$, où $c_{x,\mathrm{cris}}$ est la composante de c_x dans la cohomologie cristalline. Il suffit en effet de montrer ceci pour

$$(g_p)_{\mathbf{C}_p}\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C}_p \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \mathbf{C}_p,$$

où $\mathbf{C}_p$ est le complété de $\bar{\mathbf{Q}}_p$. Soient $\widehat{M}$ le complété de $\widetilde{M}_{\tilde{x}_{\bar{k}}}$ et $\widehat{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\widehat{M}}$. La réalisation de De Rham c_{DR} de c est une section horizontale du produit tensoriel $\otimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{U}/M_N)(n)$. Il s'ensuit de [No], 3.5, 3.7 et 3.8 que $\widehat{M}$ est régulier et que, quitte à la remplacer par un multiple, la classe c_{DR} donne, par changement de base, une section horizontale $\hat{c}_{\mathrm{DR}} \in \otimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\mathrm{DR}}(\widehat{\mathcal{U}}/\widehat{M})(n)$. Comme l'identification

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X_{\mathbf{C}_p}/\mathbf{C}_p) \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \mathbf{C}_p = \mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}(\mathcal{Z}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \mathbf{C}_p \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(Z_{\mathbf{C}_p}/\mathbf{C}_p)$$

identifie les valeurs en $\tilde{x}_{\mathbf{C}_p}$ et $\tilde{z}_{\mathbf{C}_p}$ d'une section horizontale de $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(\widehat{\mathcal{U}}/\widehat{M})$, l'isomorphisme

$$\bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\mathrm{DR}}(X_{\mathbf{C}_p}/\mathbf{C}_p)(n) \cong \bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\mathrm{DR}}(Z_{\mathbf{C}_p}/\mathbf{C}_p)(n)$$

envoie $c_{x,\mathrm{DR}} = \hat{c}_{x,\mathrm{DR}}$ sur $c_{z,\mathrm{DR}} = \hat{c}_{z,\mathrm{DR}}$. Ceci implique que l'identification des tenseurs cristallins envoie $c_{x,\mathrm{cris}}$ sur $c_{z,\mathrm{cris}}$. Parce que $g_Z \in I_Z(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$, on a $g_Z(c_{z,B}) = c_{z,\mathrm{cris}}$. On avait déja vu que $\iota_B(c_{x,B}) = c_{z,B}$, donc $g_p(c_{x,B}) = c_{x,\mathrm{cris}}$ comme il fallait montrer.

Il reste à montrer que $F \in G(\mathbf{Q})$. On sait que $\rho_\ell(\tau) \in G(\mathbf{Q}_\ell)$ donc le fait que $g_\ell \in G^0(\mathbf{Q}_\ell)$ implique que $F \in G(\mathbf{Q}_\ell)$. Comme on a également que $F = \iota_B^{-1} \circ (F_Z^{-1})^* \circ \iota_B \in \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}))$, il s'ensuit que $F \in G(\mathbf{Q})$. □□

2.4. Corollaire. — *Soit X/E une variété abélienne ayant bonne réduction ordinaire en $\mathfrak{p}_E$, comme dans le théorème 2.2 et soit $M \in \mathrm{Mot}_E(X)$. Pour tout nombre premier $\ell \neq p$, le polynôme caractéristique de l'automorphisme $\rho_\ell(\tau)^{-1}$ de $\mathrm{H}^*_\ell(M)$ est à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Ces polynômes ne dépendent pas du nombre premier $\ell \neq p$. L'automorphisme* Frob *de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(M)$ a le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. — L'isomorphisme canonique $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(M) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong \mathrm{H}^*_\ell(M)$. L'élément $F \in G(\mathbf{Q})$ induit ainsi un automorphisme de $\mathrm{H}^*_\ell(M)$ qui est conjugué à $\rho_\ell(\tau)^{-1}$, ce qui montre le corollaire pour les $\rho_\ell(\tau)^{-1}$. De même, tout élément $g_p \in I_X(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(M) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}} \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(M) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ et l'automorphisme de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(M)$ induit par F est conjugué à Frob. □

BIBLIOGRAPHIE

[De] P. Deligne, Hodge cycles on abelian varieties, Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties (P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus and K.-y. Shih), Chapter I, pp. 9–100, Lecture Notes in Math. 900, Springer-Verlag, 1982.

[DM] P. DELIGNE, J. S. MILNE, Tannakian categories, Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties (P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus and K.-y. Shih), Chapter II, pp. 101–228, Lecture Notes in Math. 900, Springer-Verlag, 1982.

[Mi] J. S. MILNE, Etale Cohomology, Princeton University Press, 1980.

[M-B] L. MORET-BAILLY, Pinceaux de variétés abéliennes, Astérisque, Soc. Math. France, 129 (1985).

[MF] D. MUMFORD, J. FOGARTY, Geometric Invariant Theory, Second enlarged edition, Springer-Verlag, 1982.

[No] R. NOOT, Models of Shimura varieties in mixed characteristic, à paraître dans J. Algebraic Geom.

[Og] A. OGUS, A p-adic Analogue of the Chowla–Selberg Formula, p-adic Analysis (F. Baldassarri, S. Bosch and B. Dwork editors), pp. 319–341, Lecture Notes in Math. 1454, Springer-Verlag, 1990.

[Se] J.-P. SERRE, Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ-adiques, Motives (U. Jansen, S. Kleiman, J.-P. Serre editors), pp. 377–400, Proc. Sympos. Pure Math. 55, Part 1, Amer. Math. Soc., 1994.

[ST] J.-P. SERRE, J. TATE, Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math., 88 (1968), 492–517.

[Wi] J.-P. WINTENBERGER, Torseur entre cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline, le cas abélien, Duke Math. J., 62 (1991), 511–526.

Manuscrit reçu le 18 avril 1995,
accepté le 13 juin 1995.

Rutger NOOT,
I.R.M.A.R.
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).
noot@univ-rennes1.fr