ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANNE BERTRAND-MATHIS

Nombres normaux dans diverses bases

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 5 (1995), p. 1205-1222

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_5_1205_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 5 (1995), 1205–1222

NOMBRES NORMAUX DANS DIVERSES BASES

par Anne BERTRAND-MATHIS

1. Qu'est-ce qu'un nombre normal?

Étant donné un nombre β strictement supérieur à 1, nous appellerons $B(\beta)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ soit équirépartie modulo un; notons que presque tout x (au sens de la mesure de Lebesgue) se trouve dans $B(\beta)$ ([C]). Lorsque g est un entier naturel il est bien connu que pour tout entier p non nul ([M]) :

$$B(g^p) = B(g).$$

Mendès-France [MF] a posé la question suivante : les propositions "θ est un nombre de Pisot" et "pour tout $p \neq 0$, $B(\theta^p) = B(\theta)$" sont-elles équivalentes?

Nous dirons que les nombres réels u et v sont multiplicativement équivalents s'il existe m et p appartenant à $\mathbb{N}^*$ tels que $u^m = v^p$. Wolfang Schmidt [Sc] a montré que si les deux entiers naturels g et h ne sont pas équivalents alors

$$B(g) \neq B(h).$$

Pearce et Keane [PK] ont donné une autre preuve de ce résultat, preuve qui se généralise un peu, par exemple au cas où $g = 10$ et $h = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Feldman et Smorodinsky [FS] donnent également une preuve

Mots-clés : Nombres normaux – Systèmes de numérotation.
Classification math. : 11K16 – 58F11.

du résultat de Schmidt, preuve que nous désirons étendre ici à des cas où g et h ne sont plus entiers naturels et relier à d'autres notions de normalité. La plupart des preuves de cet article s'inspirent de Feldman et Smorodinsky.

Brown, Moran et Pollington ([BMP], [MP]) ont montré qu'étant donné un réel $\beta > 1$ la propriété $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $B(\beta) = B(\beta^p)$ est toujours fausse sauf si β est un entier et que $B(\theta) = B(\beta)$ si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que θ^r et β^r appartiennent tous deux à $\mathbb{N}$, $\dfrac{\operatorname{Ln}\theta}{\operatorname{Ln} b}$ soit rationnel et $\mathbb{Q}(\theta)$ égal à $\mathbb{Q}(\beta)$. Leur preuve utilise des produits de Riess et ils n'hésitent pas à considérer des mesures non invariantes. Nous ne détaillerons pas ici leurs résultats mais il faut remarquer que, confrontés à ceux que nous prouvons ici, ils permettent d'établir aisément un certain nombre de résultats nouveaux qui seront publiés ultérieurement.

Lorsque g est un entier il est équivalent de dire que :

– la suite $(xg^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo 1;

– étant donné la transformation T de $[0,1[$ dans lui-même : $Tx = \{gx\}$, la suite $(T^n x)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un (étant donné un nombre réel y, $\{y\}$ désignera la partie fractionnaire de g et $[y]$ sa partie entière);

– pour tout entier k, tout bloc de k chiffres compris entre 0 et $g-1$ apparaît dans le développement en base g de x avec la fréquence $1/g^k$.

Tout ceci se vérifie aisément. Un nombre de $B(g)$ est dit "normal en base g". La normalité est donc liée à trois notions :

- la répartition modulo un de la suite $(xg^n)_{n\geq 0}$;
- l'itération de la transformation $T : x \to \{gx\}$;
- la répartition des chiffres dans le g-développement de x.

Ces trois notions correspondent au même phénomène; mais lorsque β n'est plus un entier naturel, ces trois notions s'étendent dans trois directions différentes : on peut s'intéresser à :

1) La répartition modulo un de la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$; nous appellerons encore $B(\beta)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ soit équirépartie modulo un. Mais si T_β est la transformation de $[0,1[$ dans lui-même qui à x associe $\{\beta x\}$ alors $(T_\beta)^n x$ n'est plus du tout égal à $\{x\beta^n\}$ bien que ce soit le cas si β est un entier naturel.

2) La répartition modulo un de la suite du tore de dimension k, $([0,1[)^k$, $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \ldots, x\beta^{n+k-1})_{n\geq 0}$, pour diverses valeurs de k;

lorsque g est entier, déjà pour $k = 2$ la suite $(xg^n, xg^{n+1})_{n\geq 0}$ n'est jamais équirépartie modulo un; mais lorsque β est algébrique de degré r, pour presque tout x la suite $(x\beta^n, \ldots, x\beta^{n+r-1})_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un (il y a alors équirépartition de $(x\beta^n, \ldots, x\beta^{n+k-1})_{n\geq 0}$ pour tout $k \leq r$ mais jamais pour $k > r$ car alors $x\beta^{n+k-1}$ est combinaison linéaire de $x\beta^n, \ldots, x\beta^{n+k-2}$; nous appellerons $T(\beta)$ l'ensemble de ces nombres et nous dirons qu'ils sont normaux au sens géométrique.

Lorsque β est entier algébrique de degré r, la suite $(\{x\beta^n\}, \{x\beta^{n+1}\}, \ldots, \{x\beta^{n+r-1}\})_{n\geq 0}$ est l'itérée de $(\{x\}, \{x\beta\}, \ldots, \{x\beta^{r-1}\})$ par une transformation ergodique $\mathcal{C}_\beta$ du tore $([0,1[)^r$ muni de la mesure de Lebesgue, de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \\ a_1 & & \cdots & & & a_r \end{pmatrix}$$

où l'on suppose que $\beta^r = a_1\beta^{r-1} + \cdots + a_r$ est l'équation minimale de β sur $\mathbb{Z}$. Si β est algébrique mais pas entier algébrique, nous ne voyons pas apparaître de transformation du tore associée à β de façon naturelle.

Lorsque β est transcendant, pour presque tout x, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les suites $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \ldots, x\beta^{n+k-1})_{n\geq 0}$ sont équiréparties modulo un; on dit alors que la suite $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \ldots, x\beta^{n+k}, \ldots)_{n\geq 0}$ du tore $([0,1[)^{\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo un; $(\{x\beta^n\}, \{x\beta^{n+1}\}, \ldots)$ est l'itéré du point $(\{x\}, \{\beta x\}, \ldots)$ par la transformation $\mathcal{C}$ de $([0,1[)_{\mathbb{N}}$ dans lui-même : $(y_1, y_2, y_3, \ldots) \to (y_2, y_3, y_4, \ldots)$.

3) Une troisième voie est celle des développements en base β et de la dynamique symbolique. Tout nombre réel x s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \varepsilon_1\beta^s = \varepsilon_2\beta^{s-1} + \cdots + \varepsilon_{s+1} + \frac{\varepsilon_{s+2}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{s+3}}{\beta^2} + \frac{\varepsilon_i}{\beta^{i-s-1}} + \frac{\varepsilon_{i+1}}{\beta^{i-s}} + \cdots$$

où $\varepsilon_i \in \mathbb{N}$ avec la condition suivante : pour tout $i \geq 1$

$$\varepsilon_{i+1}\beta^{s-i-1} + \varepsilon_{i+2}\beta^{s-i-2} + \cdots < \beta^{s-i}$$

et la suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ est assujettie à certaines conditions ([P],[B]); (on pourrait écrire $x = [x] + \frac{\eta_1}{\beta} + \frac{\eta_2}{\beta^2} + \cdots$ mais c'est l'écriture précédente que nous utiliserons).

Remarquons que $x \in [\beta^s, \beta^{s+1}[$; par ailleurs la suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ appartient à $([0,1,2,\ldots,[\beta])^{\mathbb{N}}$ si $\beta \notin \mathbb{N}$, (à $[0,\ldots,\beta-1])^{\mathbb{N}}$ sinon) et si nous

munissons $([0,1,\dots,[\beta])^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit de la topologie discrète sur $(0,1,\dots,[\beta])$ alors la fermeture $\overline{X}$ de l'ensemble X des β-développements $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ forme un système dynamique symbolique (*i.e.* un fermé de $(0,\dots,[\beta])^{\mathbb{N}}$ invariant par la transformation $T : q_1q_2\cdots \to q_2q_3\cdots$). Ce système dynamique est appelé β-shift. Si par exemple $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, les β-développements $(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots)$ sont les suites sur $[0,1]$ vérifiant pour tout $i \geq 1$, $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = 0$. Les blocs de chiffres figurant dans au moins un β-développement sont dits β-admissibles (si $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 00 et 1001 sont admissibles, 11 et 01101 ne le sont pas).

Si l'on se restreint au cas où $x \in [0,1[$ on peut définir une transformation T_β de $[0,1[$ dans lui-même :

$$T_\beta = \{\beta x\}$$

et lorsque $x = \dfrac{\varepsilon_1}{\beta} + \dfrac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots + \dfrac{\varepsilon_n}{\beta^n} + \cdots$ alors $T_\beta^n x = \dfrac{\varepsilon_n}{\beta} + \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\beta^2} + \cdots$.

Mais $\{\beta^n x\} = \{\varepsilon_1\beta^{n-1} + \varepsilon_2\beta^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \cdots)$ et n'est pas égal à $T_\beta^n x$, sauf si $\beta \in \mathbb{N}$.

La transformation T_β conserve une unique mesure μ_β absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ([R], [P]); on en déduit aisément que pour presque tout x de $[0,1[$, puis pour presque tout x de $\mathbb{R}$, chaque bloc β-admissible de L chiffres $b_1\cdots b_L$ apparaît dans le β-développement de x avec une fréquence $\mu_{[b_1\cdots b_L]}$ indépendante de x, égale à la mesure $\mu_\beta(I)$ où I est l'intervalle :

$$I = \left\{x \in [0,1[;\ x = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots \ \text{ avec } \ \varepsilon_1\cdots\varepsilon_L = b_1\cdots b_L\right\}.$$

Lorsque $\beta = 10$ par exemple, $\mu_{[94]} = \mu_{10}\left(\left[\dfrac{9}{10} + \dfrac{4}{100}, \dfrac{9}{10} + \dfrac{5}{100}\right[\right) = \dfrac{1}{100}$. La mesure $\mu_{[b_1\cdots b_L]}$ est de l'ordre de $\dfrac{1}{\beta^L}$.

Les réels x dans le β-développement desquels tous les blocs figurent avec la bonne fréquence sont dits "à β-développement normal" et nous appellerons $N(\theta)$ l'ensemble de ces nombres.

De façon évidente, on a toujours $T(\beta) \subseteq B(\beta)$ mais l'inclusion inverse n'est pas nécessairement vraie. Les rapports entre $N(\beta)$, $T(\beta)$ et $\beta(\beta)$ sont en général assez flous sauf dans le cas où $\beta \in \mathbb{N}$: alors $B(\beta) = N(\beta)$ ($T(\beta)$ n'est pas pertinent dans ce cas puisque $r = 1$). Dans ce cas où β est un nombre de Pisot $N(\beta) = T(\beta) \subset B(\beta)$ ([Be3]).

Lorsque la suite $(\beta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un (ce qui arrive à presque tout β!) l'inclusion $B(\beta) \subset N(\beta)$ est fausse ($1 \in B(\beta)$ et $1 \notin N(\beta)$) [Be1].

L'inclusion $T(\theta) \subset N(\theta)$ est de même presque partout fausse.

Les résultats que nous prouvons ici – au moyen d'ensembles de Cantor – comparent $N(\theta)$ et $B(\beta)$ lorsque θ est un nombre de Pisot et β un réel entier algébrique, et $N(\theta)$ et $N(\beta)$ lorsque θ et β sont tous deux des nombres de Pisot.

2. Énoncé des résultats.

Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1, soit $[0,1[$ muni de la transformation $T_\beta : x \to \{\beta x\}$. Une mesure $\dot{\mu}$ invariante par T_β définit une mesure μ invariante sur le β-shift muni de la transformation $T : (\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots) \to (\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots)$, image de $\dot{\mu}$ par l'application f qui à $x = \dfrac{\varepsilon_1}{\beta} + \dfrac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$ associe $(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots)$. Étant donné une mesure $\dot{\mu}$ T_β-invariante sur $[0,1[$, nous dirons que $\dot{\mu}$ est une mesure de Bernoulli pour T_β si pour tout bloc β-admissible $b_1\cdots b_2$

$$\mu([b_1\cdots b_2]) = \mu([b_1])\cdot\mu([b_2])\cdots\mu([b_L]),$$

où $[b_1\cdots b_L]$ désigne l'ensemble des suites $(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots)$ du β-shift vérifiant $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_L = b_1\cdots b_L$ et où $\mu = f^{-1}(\dot{\mu})$, *i.e.* $\mu([b_1\cdots b_L]) = \dot{\mu}(I)$ où I désigne l'intervalle β-adique $\left\{x :\ x = \dfrac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots;\ \varepsilon_1\cdots\varepsilon_L = b_1\cdots b_L\right\}$. Nous dirons que $\dot{\mu}$ est "faiblement de Bernoulli pour T_β" si

$$\sum \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\mu(T^{-n}[b_1\cdots b_k]\cap[a_1\cdots a_k]) - \mu([b_1\cdots b_k])\cdot\mu([a_1\cdots a_k])\right| < \infty$$

où la somme est prise sur l'ensemble des couples $(b_1\cdots b_k, a_1\cdots a_k)$ de blocs de k chiffres admissibles. Les mesures markoviennes en particulier sont faiblement de Bernoulli.

Dans la suite nous identifierons μ et $\dot{\mu}$ (la correspondance est bi-univoque et nous qualifierons indifféremment μ ou $\dot{\mu}$ de "Bernoulli" ou "faiblement Bernoulli".

THÉORÈME. — *Soient β et θ deux nombres réels strictement supérieurs à 1 non équivalents multiplicativement; on suppose de plus que β est un entier naturel ou un nombre de Pisot et que θ est entier algébrique.*

1. *Soit $\dot{\mu}$ une mesure de Bernoulli (ou plus généralement faiblement de Bernoulli) pour T_β, non dégénérée (i.e. aucun chiffre n'admet la probabilité 1). Alors $\dot{\mu}$-presque tout x de $[0,1[$ appartient à $T(\theta)$ (et donc à $B(\theta)$). Autrement dit, lorsque les chiffres de x sont répartis dans la base β selon une mesure μ suffisamment régulière, alors avec la probabilité 1 la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.*

Plus généralement, étant donné $\gamma \in \mathbb{R}^*$ et la même mesure $\dot{\mu}$, pour μ-presque tout x la suite $(\gamma x\theta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

Remarque. — Il est par contre clair que, si μ n'est pas la mesure maximale de Parry μ_β, $\dot{\mu}$-presque aucun x n'appartient à $N(\beta)$; de plus un ensemble de μ-mesure 1 contient un ensemble T_β-invariant de μ-mesure 1.

2. *$B(\theta)$ n'est pas inclus dans $B(\beta)$; la dimension de Hausdorff de $B(\theta) \setminus B(\beta)$ est strictement positive et $B(\theta) \setminus B(\beta)$ contient un ensemble T_β-invariant.*

3. *$T(\theta)$ n'est pas inclus dans $N(\beta)$ et la différence $T(\theta) \setminus N(\beta)$ a pour dimension de Hausdorff 1 et contient un ensemble T_β-invariant. Il s'ensuit que $B(\theta)$ n'est pas inclus dans $N(\beta)$, que $B(\theta) \setminus N(\beta)$ a pour dimension de Hausdorff 1 et contient un ensemble T_β-invariant de $\dot{\mu}$-mesure 1.*

Il existe donc $x \in B(\beta)$ tel que pour tout n, $T_\beta^n(x)$ ne soit jamais dans $B(\theta)$.

Brown, Moran et Pollington [BMP] montrent que si β et θ ne sont pas équivalents multiplicativement, alors $B(\beta)$ n'est pas inclus dans $B(\theta)$.

Comme lorsque β est entier naturel $T(\beta) = B(\beta) = N(\beta)$ l'assertion 3 du théorème implique les résultats de W. Schmidt et A. Pollington :

COROLLAIRE 1. — *Soient g et h deux entiers naturels non équivalents. Alors $B(g) \neq B(h)$ et la dimension de Hausdorff de $B(g) \setminus B(h)$ est égale à 1.*

Comme lorsque β est un nombre de Pisot, $N(\beta) = T(\beta)$ on déduit immédiatement de l'assertion 3 du théorème, le résultat suivant qui concerne les développements en base β et θ :

COROLLAIRE 2. — *Soient β et θ deux nombres de Pisot non multiplicativement équivalents.*

1) *Soit μ une mesure de Bernoulli non dégénérée pour T_β (ou encore une mesure faiblement de Bernoulli).*

Alors μ-presque tout x est dans $N(\theta)$. Plus généralement pour tout réel α non nul, μ-presque tout x vérifie $\alpha x \in N(\theta)$. Autrement dit si les chiffres de x en base β sont répartis selon une mesure μ convenable, ils sont répartis dans la base θ selon la mesure maximale de Parry μ_θ avec la probabilité 1.

2) *$N(\theta)$ n'est pas inclus dans $N(\beta)$ et la différence $N(\theta) \setminus N(\beta)$ est de dimension de Hausdorff* 1 *et contient un ensemble T_β-invariant de μ-mesure 1.*

De plus

$$T(\theta) \not\subset T(\beta), \quad B(\theta) \not\subset B(\beta)$$

avec la même remarque pour les dimensions de Hausdorff.

Autrement dit, si β et θ sont deux nombres de Pisot non équivalents, il y a des nombres dont le développement est normal en base θ et pas en base β et des nombres x tels que la suite $(x\theta^n, \dots, x\theta^{n+\deg\theta-1})_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un mais pas la suite $(x\beta^n, \dots, x\beta^{n+\deg\beta-1})_{n\geq 0}$.

Il est certain que la distinction faite entre les trois notions de normalité présentées ici rend assez confuse la description des phénomènes – autrement dit les énoncés des résultats – et concourt à introduire dans l'esprit du lecteur un regrettable mélange. Le mélange est excellent pour les mesures mais pas pour la digestion. Néanmoins ces distinctions sont tout à fait pertinentes. En résumé, $N(\beta)$ est lié aux chiffres des développements, $B(\beta)$ à la répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, c'est la notion la plus aisée à définir mais la moins maniable et la plus instable, $T(\beta)$ concerne la répartition dans le tore de dimension $\deg\beta$ et est plus facile à étudier (voir [C] et [S2]) et il est remarquable que dans le cas où β est un nombre de Pisot, alors $N(\theta) = T(\theta) \subset B(\theta)$ ([Be1]), mais cependant pour la plupart des Pisot $N(\theta) \neq B(\theta)$ ([Be4]).

Le développement de $\gamma\theta^n$ en base β.

Dans ce paragraphe nous supposerons θ et β réels strictement supérieurs à 1 et $\alpha = \dfrac{\operatorname{Ln}\theta}{\operatorname{Ln}\beta}$ irrationnel; γ désignera un réel non nul.

Développons $\gamma\theta^n$ en base β :

$$\gamma\theta^n = c_1\beta^k + c_2\beta^{k-1} + \cdots + c_{k+1} + \frac{c_{k+2}}{\beta} + \cdots \tag{1}$$

avec à chaque étape $\displaystyle\sum_{i>j} c_i\beta^{k-i+1} < \frac{1}{\beta^j}$.

PROPOSITION 1. — *Soient θ et β des réels > 1 vérifiant $\dfrac{\operatorname{Ln}\theta}{\operatorname{Ln}\beta} \notin \mathbb{Q}$, soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Soit $b = b_1 \cdots b_L$ une suite de chiffres β-admissibles avec $b_i \neq 0$ pour un i au moins appartenant à $(1, \ldots, L)$.*

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier M_0 tel que pour $M > M_0$, l'ensemble β des entiers naturels n pour lesquels b apparaît parmi les M premiers chiffres $c_1 \cdots c_M$ du β-développement de $\gamma\theta^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est un ensemble D dont la densité inférieure est supérieure à $1 - \varepsilon$.

COROLLAIRE 3. — *Soient β et θ deux nombres réels strictement supérieurs à 1, non multiplicativement équivalents, $b_1 \cdots b_L$ un mot β-admissible, γ un réel non nul; alors l'ensemble des entiers n tels que $b_1 \cdots b_L$ apparaisse au moins une fois avant la virgule dans le β-développement de $\gamma\theta^n$ a pour densité 1.*

Convergence faible vers la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 2. — *Soit β un nombre de Pisot, μ une mesure de Bernoulli (ou encore faiblement de Bernoulli) pour T_β; soit r un entier, soit $\theta > 1$ un nombre transcendant ou algébrique de degré r, vérifiant $\dfrac{\operatorname{Ln}\beta}{\operatorname{Ln}\theta} \notin \mathbb{Q}$, et soit A une réunion finie d'intervalles du tore (resp. de parallélépipèdes du tore $[0,1[^r$). Alors, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, tout $\varepsilon_2 > 0$ et tout réel d non nul il existe un ensemble N' d'entiers de densité au moins $1 - \varepsilon_2$ tel que*

$$\forall n \in N', \quad |\mu(\{x \in [0,1[;\ \{dx\ \theta^n\} \in A\}) - \lambda(A)| < \varepsilon_1$$

(resp. $|\mu(\{x \in [0,1[;\ (dx\ \theta^n, \ldots, dx\ \theta^{n+r-1}) \in A \bmod 1\}) - \lambda(A)| < \varepsilon_1$), λ désignant la mesure de Lebesgue.

La proposition 3 est conséquence du :

LEMME 1. — *Soit β un nombre de Pisot de degré r; soit μ une mesure de Bernoulli pour le shift T_β (ou encore une mesure faiblement de Bernoulli) : soit s un entier strictement positif et d un nombre réel non nul de la forme $a_1 + a_2\beta + \cdots + a_r\beta^{r-1}$ où $a_i \in \mathbb{Z}$ pour $i = 1, \ldots, r$.*

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe K_0 tel que pour tout $K > K_0$ il existe J_0 tel que $\forall J > J_0$, si $b = \beta^J + \beta^{2J} + \cdots + \beta^{KJ}$ et si m admet un développement en base β de la forme

$$m = c\beta^{N+(K+1)J} + b\beta^N + a \quad \text{avec} \quad a < \beta^N$$

où N est un entier quelconque alors :

$$\left| \int_0^1 e^{2i\pi r d m x} dr(x) \right| < \varepsilon.$$

La condition sur m signifie que le mot $b = 10\cdots010\cdots01\cdots10\cdots1$ apparaît dans le développement de m (avant la virgule).

Enfin voici une remarque sur la T_β-invariance :

LEMME 2. — *Soit (E,T) un système dynamique, μ une mesure T-invariante, S un ensemble mesurable vérifiant $\mu(S) = 1$. Alors S contient un ensemble S_1 T-invariant vérifiant $\mu(S_1) = 1$.*

En effet, pour tout n $\mu(T^{-n}S) = 1$ d'où $\mu\Big(\bigcap_{n\geq 0} T^{-n}S\Big) = 1$ et $S_1 = \bigcap T^{-n}S$ convient.

3. Démonstrations.

Preuve de la proposition 1 (cf. [FS]). — Soit C le complémentaire de D ; montrons que la densité supérieure de C est inférieure à ε si M est assez grand. Fixons M et fixons un entier $N = hM$ multiple de M ; considérons l'ensemble $C(N)$ des entiers n de C tels que $\gamma\theta^n > \beta^N$; il existe un entier $i \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma\theta^n \in \{\beta^{iN}, \beta^{(i+1)N}[$ et donc tel que $\gamma\theta^n$ s'écrive :

$$\gamma\theta^n = c_1\beta^{iN+a} + c_2\beta^{iN+a-1} + \cdots + c_{a+1}\beta^{iN} + c_{a+2}\beta^{iN-1} + c_{a+3}\beta^{iN-2} + \cdots$$

et $\gamma\theta^n$ s'écrit :

$$\gamma\theta^n = K' + K''\beta^{iN}$$

avec

$$K' = c_{a+2}\beta^{iN-1} + c_{a+3}\beta^{iN-2} + \cdots \in [0, \beta^{iN}[$$
$$K'' = c_1\beta^a + c_2\beta^{a-1} + \cdots + c_{a+1} \in [1, \beta^N[.$$

Les nombres K' et K'' ainsi définis sont déterminés de façon unique.

Si b n'apparaît pas dans les M premiers chiffres $b_1\cdots b_M$ de $\gamma\theta^n$ c'est qu'il n'apparaît pas dans les M premiers chiffres de K''. Soit $E = E(N)$ l'ensemble des nombres réels de $[1,\ldots,\beta^N[$ tels que b n'apparaît pas parmi les M premiers chiffres de leur β-développement ; soit $F_j = E \cap [\beta^{M+j}, \beta^{M+j+1}[$ pour $j = 0,1,\ldots,N-M-1$.

Montrons que, λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

LEMME 2. — *Il existe une constante $\delta < \beta$ telle que*

$$\lambda(F_j) < \beta^j \delta^M.$$

Montrons pour cela que

LEMME 3. — *Soit $b_1 \cdots b_L$ un mot β-admissible. Il existe une constante $\delta < \beta$ telle que le nombre ω_r de mots $c_1 \cdots c_r$ de longueur r admissibles pour le β-shift et ne contenant pas le mot $b_1 \cdots b_L$ vérifie pour tout r assez grand*

$$\omega_r < \delta^r.$$

Preuve du lemme 3. — Fixons le mot $c_1 \cdots c_r$. L'ensemble des suites $(d_i)_{i \geq 1}$ β-admissibles dans lesquelles $c_1 \cdots c_r$ n'apparaît jamais forme un fermé T-invariant, et donc un sous-shift A du β-shift; celui-ci étant intrinsèquement ergodique ([H]), et d'entropie $\operatorname{Ln}\beta$, A est d'entropie $\operatorname{Ln} u$ avec $u < \beta$. Or $\operatorname{Ln} u = \lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{\operatorname{Ln} \omega_r}{r}$ et donc pour un certain $\delta \in]u, \beta[$ il existe r_0 tel que

$$\forall r > r_0, \quad \omega_r < \delta^r.$$

Nous supposerons dans la suite $b_1, \ldots, b_L$ fixé, δ fixé et $M > r_0$.

Preuve du lemme 2. — F_j est réunion d'intervalles "β-adique" de la forme

$$\left[\beta^{M+j}\left(\frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{c_M}{\beta^M}\right);\ \beta^{M+j}\left(\frac{d_1}{\beta} + \cdots + \frac{d_M}{\beta^M}\right)\right[$$

où $c_1 \cdots c_M$ est un mot β-admissible de longueur M et $d_1 \cdots d_M$ le plus petit mot admissible de même longueur qui lui est strictement supérieur pour l'ordre lexicographique; la longueur de cet intervalle est donc majorée par $\beta^{M+j-M} = \beta^j$, le nombre de mots $c_1 \cdots c_M$ est majoré par δ^M d'après le lemme 1, et ainsi

$$\lambda(F_j) < \beta^j \delta^M.$$

Preuve de la proposition 1. — Un entier n est dans C si $n \operatorname{Ln}\theta + \operatorname{Ln}\gamma \in \dfrac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln}\beta}$ où $\dfrac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln}\beta}$ désigne l'ensemble $\left\{\dfrac{x}{N \operatorname{Ln}\beta};\ x \in E\right\}$. Quelle est la proportion de $[0, N]$ occupée par $\operatorname{Ln} E$? D'après le théorème des accroissements finis, étant donné que $\operatorname{Ln} x$ admet pour dérivée $\dfrac{1}{x}$:

$$\lambda(\operatorname{Ln} F_j) \leq \frac{1}{\beta^{M+1}} \lambda(F_j) \leq \frac{\beta^j \delta^M}{\beta^{M+1}} < \left(\frac{\delta}{\beta}\right)^M.$$

Réunissant les F_j pour $j = 0, 1, \ldots, N-M-1$, comme

$$E = \Big(\bigcup_{j=0}^{N-M-1} F_j \Big) \cup (E \cap [0, M])$$

$$\lambda\Big(\frac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln} \beta}\Big) \leq \frac{1}{N} \frac{M + (N-M)\big(\frac{\delta}{\beta}\big)^M}{\operatorname{Ln} \beta}.$$

Fixons ε; comme δ ne dépend pas de M, il existe M_0 tel que

$$\forall M > M_0,\ \forall N \text{ tel que } \frac{M}{N \operatorname{Ln} \beta} < \frac{\varepsilon}{2},\ \lambda\Big(\frac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln} \beta}\Big) < \varepsilon.$$

La suite $n\alpha + \operatorname{Ln} \gamma$ étant équirépartie modulo un et $\dfrac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln} \beta}$ étant une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est majorée par ε, la suite $n\alpha + \operatorname{Ln} \gamma$ tombe dans $\dfrac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln} \beta}$ avec une fréquence inférieure ou égale à ε et K'' tombe dans E avec une fréquence inférieure ou égale à ε, d'où la proposition.

Preuve du lemme 1. — Nous ferons la démonstration dans le cas où μ est Bernoulli et $d = 1$. Le cas général se traite de même. Nous montrerons tout d'abord le lemme suivant : pour tout nombre réel y, $\|y\|$ désignera la distance à l'entier le plus proche. La preuve du lemme 1 découle du lemme 4 :

LEMMA 4. — *Soit β un nombre de Pisot de degré r et soit $d = a_1 + a_2\beta + \cdots + a_r\beta^{r-1}$ où $a_i \in \mathbb{Z}$. Il existe une constante $H = H(d)$ dépendant de d et un nombre $\zeta \in]0,1[$ tel que si $x \in]0,1[$ a pour β développement*

$$x = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$$

alors pour tout entier q et tout entier h

$$\Big\| dx\ \beta^q - d\Big(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \varepsilon_q + \frac{\varepsilon_{q+1}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h}\Big)\Big\| < H\zeta^h.$$

C'est-à-dire qu'on peut approcher $dx\ \beta^n$ en tronquant

$$x\beta^n = \varepsilon_1\beta^q + \cdots + \varepsilon_{q-h+1}\beta^{h+1} + \varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h} + \frac{\varepsilon_{q+h+1}}{\beta^{h+1}} + \cdots$$

la précision dépendant du nombre $2h+1$ de termes considérés. En réalité il s'agit de la continuité de Hölder d'une certaine application. Nous ferons la démonstration dans le cas où $d = 1$.

Soient $\beta_1, \ldots, \beta_r$ les conjugués de β différents de β; ils sont de module strictement supérieur à 1; soit $\zeta = \sup\left(\left|\frac{1}{\beta}\right| + |\beta_1|, \ldots, |\beta_r|\right)$. Nous avons $0 < \zeta < 1$. Soit $h \in \mathbb{N}$:

$$x\ \beta^n = \varepsilon_1\beta^{q-1} + \varepsilon_2\beta^{q-2} + \cdots + \varepsilon_{q-h+1}\beta^{h+1} + \varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \varepsilon_q + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h} + \frac{\varepsilon_{q+h+1}}{\beta^{h+1}} + \cdots$$

Comme $\|y+z\| \leq \|y\| + \|z\|$,

$$\left\|x\ \beta^n - \left(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h}\right)\right\| \leq \|\varepsilon_1\beta^{q-1}\| + \cdots + \|\varepsilon_{q-h+1}\beta^{h+1}\| + \left\|\frac{\varepsilon_{q+h+1}}{\beta^{h+1}} + \frac{\varepsilon_{q+h+2}}{\beta^{h+2}} + \cdots\right\|.$$

D'après les formules de Newton, pour $e \in \mathbb{N}$, $\beta^e + \beta_2^e + \cdots + \beta_r^e \in \mathbb{Z}$ et donc

$$\|\beta^e\| \leq \|\beta_2^e\| + \cdots + \|\beta_r^e\| \leq (r-1)\zeta^e.$$

Ainsi, comme $\zeta > \frac{1}{\beta}$ et comme ε_i est majoré par β, il existe H tel que

$$\left\|x\ \beta^n - \left(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h}\right)\right\| < \beta(r-1)\sum_{e>h}\zeta^e + \beta\sum_{e>h}\zeta^e \leq \frac{\beta r\zeta}{1-\zeta}\zeta^h = H\ \zeta^h.$$

Montrons maintenant le lemme 1 (toujours avec $d = 1$). Soient b et m comme dans l'énoncé et s un entier fixé.

$$e^{2i\pi smx} = e^{2i\pi s(c\beta^{(N+(K+1)J)x})} \cdot e^{2i\pi b\beta^N x} \cdot e^{2i\pi ax}$$

et

$$e^{2i\pi sbx} = \prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi s\beta^{N+iJ}x}.$$

D'une façon générale $|e^{2i\pi\eta} - 1| \leq 2\pi\eta$ et pour tout y

$$|e^{2i\pi(y+\eta)} - e^{2i\pi y}| < 2\pi\eta.$$

Nous en déduisons aisément que

$$\left|\prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi(y_i+\eta_i)} - \prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi y_i}\right| \leq 2\pi|\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k|$$

et que pour tout $h \in \mathbb{N}$:

$$\left|\prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi sx\beta^{N+iJ}} - \prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi s\left(\varepsilon_{N+iJ+h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{N+iJ-h}}{\beta^h}\right)}\right| \leq KH \cdot 2\pi \cdot \zeta^h.$$

Supposons $J > 2h$. Les fonctions f_i définies ainsi :

$$f_i(x) = f_i((\varepsilon_n)_{n\geq 1}) = e^{2i\pi s\left(\varepsilon_{N+iJ+h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{N+iJ-h}}{\beta^h}\right)}$$

sont, pour $i = 1, \ldots, K$, des fonctions indépendantes et donc

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \cdots f_K(x)\, d\mu(x) = \prod_{i=1}^{K} \int_0^1 f_i(x)\, d\mu(x).$$

Comme μ conserve T_β qui induit le shift sur $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ les intégrales $\int_0^1 f_i d\mu$ sont égales à $\int_0^1 f_1\, d\mu$ ou encore à $\int_0^1 e^{2i\pi s\left(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h}\right)} d\mu$; or μ est non atomique (à cause de la non dégénérescence et de l'invariance) et donc il existe η avec $\left|\int_0^1 e^{2i\pi sx} d\mu(x)\right| < \eta < 1$ et comme $\left|x\ \beta^n - \left(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q-h}}{\beta^h}\right)\right| < H\cdot 2\pi\cdot\zeta^h$ il vient

$$\left|\int_0^1 f_i(x)\, d\mu(x) - \int_0^1 e^{2i\pi nx}\, d\mu(x)\right| < \int_0^1 H\cdot 2\pi\cdot\zeta^h\, d\mu < H\cdot 2\pi\cdot\zeta^h$$

$$\left|\int_0^1 f_i(x)\, d\mu(x) < \eta + H\cdot 2\pi\cdot\zeta^h.\right.$$

Fixons $\eta_1 < 1$ et h_0 tel que $\eta + H\cdot 2\pi\cdot\zeta^{h_0} = \eta_1 < 1$. Alors $\forall h > h_0$

$$\left|\int_0^1 f_i(x)\, d\mu(x)\right| < \eta_1 < 1 \quad \text{et} \quad \left|\prod_{i=1}^{K} f_i(x)\, d\mu(x)\right| < \eta_i^K.$$

D'autre part

$$\int e^{2i\pi s(c\beta^{N+(K+1)J} + b\beta^N + a)x} d\mu = \int e^{2i\pi sb(\beta^{N+J})x}.B$$

où B est l'intégrale conditionnelle de $e^{2i\pi s(c\beta^{N+(K+i)J}+a)x}$ sachant $e^{2i\pi sb\beta^N x}$. Cette intégrale est majorée par 1 et donc

$$\left|\int_0^1 e^{2i\pi s(c\beta^{N+(K+1)J} + b\beta^N + a)x}\, d\mu\right| \leq \int_0^1 e^{2i\pi sb\beta^N x}\, d\mu \leq \eta_1^K + KH\cdot 2\pi\cdot\zeta^h$$

où h_0 est fixé tel que $\eta + H\cdot 2\pi\cdot\zeta^{h_0} = \eta_1 < 1$ et $J > 2h_0$. Soit $\varepsilon > 0$; fixons K_0 tel que $\eta_1^{K_0} < \varepsilon/2$ et fixons $K \geq K_0$. Fisons $h_1(K)$ supérieur à h_0 tel que

$$K\cdot H\cdot 2\pi\cdot\gamma^{h_1} < \varepsilon/2.$$

Alors si $J > 2h_1(K)$, on a

$$\left|\int_0^1 e^{2i\pi s(c\beta^{N+(K+1)J} + b\beta^N + a)x}\, d\mu\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Preuve de la proposition 2. — Soit A comme dans l'énoncé et $\varepsilon > 0$; θ est supposé algébrique de degré r. Soit $s = h_1 + h_2\beta + \cdots + h_r\beta^{r-1}$ avec $h_i \in \mathbb{Z}$ et $|h_i| < H$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Fixons d, ε et ε_2; le lemme 1 nous dit qu'étant donné $\varepsilon > 0$ et $H \in \mathbb{N}^*$, il existe J et K et un nombre b tels que

$$\left| \int e^{2i\pi sdmx} \, d\mu(x) \right| < \varepsilon$$

dès que m est de la forme $a + b\beta^N + c\beta^{N+(K+1)J}$ où $a < \beta^N$, c'est-à-dire

$$\left| \int e^{2i\pi dm(h_1x + h_2x\theta + \cdots + h_rx\theta^{r-1})} \, d\mu(x) \right| < \varepsilon.$$

La fonction caractéristique χ de A étant approchée convenablement par des combinaisons linéaires de caractères du tore $\mathbb{T}^r(x_1, \ldots, x_2) \to e^{2i\pi(h_1x_1 + \cdots + h_rx_r)}$ il vient si ε est assez petit que

$$|(\mu\{x; (x, x\theta, \ldots, x\theta^{r-1}) \in A \bmod \text{un}\}) - \lambda(A)| < \varepsilon_1.$$

Prenant pour bloc de chiffres le bloc obtenu à partir de b, la proposition 1 nous dit qu'il existe un ensemble N' de densité inférieure supérieure à $1 - \varepsilon_2$ tel que tous les mots m de la forme $\{d\theta^n;\ n \in N'\}$ sont aussi de la forme $a + b\beta^N + c\beta^{N+(K+1)J}$, d'où le résultat.

LEMME 5. — *Soit θ un nombre réel strictement supérieur à 1; étant donné un intervalle I du tore, un réel $\varepsilon > 0$ et un entier K, χ la fonction caractéristique de I, désignons par $A_{K,I,\varepsilon}$ l'ensemble des $x \in [0, 1[$ tels que*

$$\left| \frac{\chi(x) + \chi(\{\theta x\}) + \cdots \chi(\{\theta^K x\})}{K} - \lambda(I) \right| < \varepsilon.$$

Alors $\forall I$, $\forall \eta > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_0$, $\forall K > K_0$, $\lambda(A_{K,I,\varepsilon}) \geq 1 - \eta$.

De même, lorsque θ est algébrique de degré r et que I est un parallélogramme du tore $\mathbb{T}^r$: soit $A_{K,I,\varepsilon}$ l'ensemble des $x \in [0, 1[$ tels que, χ désignant encore la fonction caractéristique de I

$$\left| \frac{\left(\chi \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{x\theta\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{r-1}\} \end{pmatrix} + \chi \begin{pmatrix} \{x\theta\} \\ \{x\theta^2\} \\ \vdots \\ \{x\theta^r\} \end{pmatrix} + \cdots + \chi \begin{pmatrix} \{x\theta^K\} \\ \{x\theta^{K+1}\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{K+r-1}\} \end{pmatrix} \right)}{K} - \lambda(I) \right| < \varepsilon.$$

Alors $\forall I$, $\forall \eta > 0$, $\forall \varepsilon$, $\exists K_0$, $\forall K > K_0$, $\lambda(A_{K,I,\varepsilon}) \geq 1 - \eta$.

Montrons-le dans le cas d'un intervalle du tore : presque tout x est normal en base θ et vérifie donc

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N}(\chi(\{x\}) + \cdots + \chi(\{\theta^N x\})) = \lambda(I)$$

et l'ensemble B est nombres de $[0,1[$ normaux en base θ vérifie

$$B \subset \varlimsup_{K_1\to\infty} \Big(\bigcap_{K>K_1} A_{K,I,\varepsilon} \Big).$$

Comme $\lambda(B) = 1$, il vient $\varlimsup\limits_{K\to\infty} \lambda(A_{K,I,\varepsilon}) = 1$. Il en va de même si I est un parallélogramme du tore $\mathbb{T}^r$ dans le cas où θ est algébrique de degré r, car pour presque tout x la suite

$$\left(\mathcal{C}_\theta^n \begin{pmatrix} x \\ x\theta \\ \vdots \\ x\theta^{r-1} \end{pmatrix} \right)_{n\geq 0} = \begin{pmatrix} \{x\theta^n\} \\ \{x\theta^{n+1}\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{n+r-1}\} \end{pmatrix}_{n\geq 0}$$

est répartie selon la mesure de Lebesgue dans le tore $\mathbb{T}^r$.

Preuve du théorème 1. — Montrons que l'ensemble W des nombres x de $[0,1[$ tels que la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ ne soit pas équirépartie modulo un dans le tore $\mathbb{T}^r$ est de μ-mesure nulle.

Si $x \in W$ c'est qu'il existe un parallélogramme I et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, χ désignant la fonction caractéristique de I

$$\forall N_0,\ \exists N{>}N_0 \left| \frac{1}{N} \left(\chi \begin{pmatrix} \{x\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{r-1}\} \end{pmatrix} + \cdots + \chi \begin{pmatrix} \{x\theta^N\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{N+r-1}\} \end{pmatrix} \right) - \lambda(I) \right| > \varepsilon.$$

Soit $B_{K,I,\varepsilon,d}$ l'ensemble des x tels que pour un ensemble $N'(x)$ de densité inférieure au moins égale à d on ait :

$$\forall n \in N',\ T_\theta^n \begin{pmatrix} \{c\} \\ \{x\theta\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{r-1}\} \end{pmatrix} \in A_{K,I,\varepsilon}$$

et soit $\overline{B}_{K,I,\varepsilon,d}$ le complémentaire de $B_{K,I,\varepsilon,d}$.

Notons que si $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\overline{B}_{K,I,\varepsilon,d} \subseteq \overline{B}_{K,I,\varepsilon_1,d}$ et que si $d < d_1 \overline{B}_{K,I,\varepsilon,d_1} \subseteq \overline{B}_{K,I,\varepsilon,d}$. Lorsque $x \in B_{K,I,\varepsilon,d}$, si on note $\bar{x}$ le vecteur $\begin{pmatrix} \{x\} \\ \{x\theta\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{r-1}\} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\varlimsup_{N\to\infty} \left| \left(\frac{1}{N} (\chi(\bar{x}) + \cdots + \chi T_\theta^N(\bar{x})) \right) - \lambda(I) \right| \\ &\quad = \varlimsup_{N\to\infty} \left| \frac{K}{N} \left(\frac{\chi(\bar{x}) + \cdots + \chi(T_\theta^K \bar{x})}{K} + \frac{\chi - T_\theta^{K+1}\bar{x} + \cdots + T_\theta^{2K}(\bar{x}))}{K} + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. \cdots + \frac{\chi(T_\theta^{N-K+1}(\bar{x})) + \cdots + \chi(T_\theta^N(\bar{x}))}{K} \right) - \lambda(I) \right| \leq \varepsilon + d \end{aligned}$$

(on a supposé N multiple de K ce qui ne restreint pas la généralité de la preuve).

En effet sur les N/K facteurs tous sont majorés par ε sauf dN au plus qui sont majorés par 1 en valeur absolue, et en fait $\bar{x} \in A_{K,I,\varepsilon+d}$ (notons que c'est ici qu'intervient l'hypothèse : θ entier algébrique : si on étudie

$$\frac{1}{K}\left[\chi\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN}\}\\ \vdots \\ \{x\theta^{HN+r-1}\}\end{pmatrix}+\cdots+\chi\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN+K}\}\\ \vdots \\ \{x\theta^{HN+K+r-1}\}\end{pmatrix}\right]$$

l'appartenance de $\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN}\}\\ \{x\theta^{HN+1}\}\\ \vdots \\ \{x\theta^{HN+r-1}\}\end{pmatrix}$ à $A_{K,I,\varepsilon}$ nous renseigne sur $\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN}\}\cdot\{\theta_i\}\\ \vdots \\ \{x\theta^{HN+r-1}\}\cdot\{\theta^i\}\end{pmatrix}$ qui n'a rien à voir avec $\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN+i}\}\\ \vdots \\ \{x\theta^{HN+r-1+i}\}\end{pmatrix}$ alors que si θ est entier algébrique de degré r

$$\begin{pmatrix}\{x\theta^{t+s}\}\\ \vdots \\ \{x\theta^{t+s+r-1}\}\end{pmatrix}=C_\alpha^t\begin{pmatrix}\{x\theta^{s}\}\\ \vdots \\ \{x\theta^{s+r-1}\}\end{pmatrix}\quad (cf.\ §1).$$

Donc si x n'est pas dans $T(\theta)$ c'est que $\exists I$, $\exists \varepsilon>0$, $\exists K_0$, $\forall K>K_0$, $\exists d$ et ε_1 avec $\varepsilon_1+d<\varepsilon$ tels que $x\in \overline{B}_{I,K,\varepsilon_1,d}$; ainsi

$$[0,1[\setminus T(\theta)\subseteq \bigcup_I\Big(\bigcup_\varepsilon \bigcup_{\substack{d,\varepsilon_1\\ d+\varepsilon_1<\varepsilon}}\Big(\varinjlim_{K_0\to\infty}\bigcap_{K>K_0}\overline{B}_{I,K,\varepsilon,d}\Big)\Big).$$

Les réunions et intersections ci-dessus peuvent être ramenées à une quantité dénombrable de réunions et intersections.

Or d'après la proposition 2 et le lemme 5

$$\forall I,\forall\varepsilon>0,\forall\eta>0,\exists K_0,\forall K>K_0,\quad \lambda(A_{K,I,\varepsilon})\geq 1-\eta$$

et $\forall\varepsilon_1>0$ et $d>0$, $\exists N'$ de densité supérieure à $1-d$ tels que

$$\forall n\in N',\ |\mu(\{x,T_\theta^n(\bar{x})\in A_{K,I,\varepsilon}\})-\lambda(A_{K,I,\varepsilon})|<\varepsilon_1$$

et en réunissant ces deux inégalités $\forall I$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\varepsilon_1$, $\forall d$, $\exists N'\subset\mathbb{N}$ de densité supérieure à $1-d$ tel que

$$\forall n\in N',\ |\mu(\{x,T_\theta^n(\bar{x})\in A_{K,I,\varepsilon}\})-1|<\eta+\varepsilon_1$$

et donc $\forall I$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\eta$, $\forall\varepsilon_1$, $\forall d$, $\exists K_0=K_0(\eta)$, $\forall K>K_0$, $|\mu(\overline{B}_{K,I,\varepsilon,d})<\eta+\varepsilon_1|$ d'où $\mu\Big(\varinjlim\bigcap_{K>K_0}\overline{B}_{K,I,\varepsilon_1,d}\Big)=0$ et $\mu([0,1[\setminus T(\theta))=0$.

Nous avons donc prouvé que μ-presque tout x est dans $T(\theta)$, donc dans $B(\theta)$ et plus généralement que si $d \neq 0$ est un nombre réel fixé d'avance, pour μ-presque tout x, dx est dans $T(\theta)$, et donc dans $B(\theta)$. Ceci prouve l'assertion 1 du théorème.

L'assertion 2 se déduit de l'assertion 1. En effet, si β est un nombre de Pisot de β développement en base β: $\beta = a_0 + \dfrac{a_1}{\beta} + \dfrac{a_2}{\beta} + \cdots$ et si μ est la mesure de Bernoulli telle que $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$ alors μ-presque partout x est dans $T(\theta)$ mais presque aucun x n'est dans $B(\beta)$, ([BE1], théorème 14) et presque aucun dans $N(\beta)$: $B(\theta)$ n'est pas inclus dans $B(\beta)$ ni dans $N(\beta)$ et $T(\theta) \not\subset B(\beta)$, $T(\theta) \not\subset N(\beta) = T(\beta)$. Un raisonnement un peu plus général permet d'obtenir l'assertion concernant les dimensions de Hausdorff.

Soit δ le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $\delta = a_0 + \dfrac{a_1}{\delta} + \cdots + \dfrac{a_K}{\delta^K}$; δ est un entier algébrique et lorsque K tend vers l'infini δ tend vers β; soit μ_δ la mesure de Parry-Rényi sur le δ-shift : elle induit sur les chiffres des β-développements une mesure de masse 1, d'entropie $\operatorname{Ln}\delta$, et qui est faiblement de Bernoulli (elle est la mesure associée à un système sofique [BE1], th. I). Elle induit sur le β-shift une mesure μ possédant les mêmes propriétés; cette mesure μ vérifie d'après l'assertion 1 "μ-presque tout x est dans $T(\theta)$".

Comme les δ-développements sont des β-développements non normaux en base β (pour mille et une raison, par exemple parce que l'entropie $\operatorname{Ln}\delta$ est trop petite, ou alors parce que certains mots β-admissibles manquent à l'appel) "μ-presque aucun x n'est dans $N(\beta)$" et la dimension de Hausdorff du support de μ est au moins $\dfrac{\operatorname{Ln}\delta}{\operatorname{Ln}\beta}$ [BM1]. La dimension de Hausdorff de $T(\theta) \setminus N(B)$ est donc 1.

Preuve du corollaire. — Preuve de l'assertion 1 : lorsque θ est un nombre de Pisot $N(\theta) = T(\theta)$ et donc si μ-presque partout x est dans $T(\theta)$ alors μ-presque partout est dans $N(\theta)$ et il vient

$$\begin{aligned} T(\theta) \subseteq N(\beta) \Longrightarrow & N(\theta) \not\subset N(\beta) \\ & N(\theta) \not\subset T(\beta) \\ & N(\theta) \not\subset B(\beta). \end{aligned}$$

Les questions de dimensions de Hausdorff se traitent de même.

BIBLIOGRAPHIE

[BE1] A. BERTRAND-MATHIS, Développements en base de Pisot et répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, langages codés et θ-shift, Bull. Soc. Math. France, 114 (1986), 271–323.

[BE2] A. BERTRAND-MATHIS, Le θ-shift sans peine, preprint.

[BE3] A. BERTRAND-MATHIS, Répartition modulo un et développements en base θ, C. R. Acad. Sci. Paris, 289 (1979), 1–4.

[BE4] A. BERTRAND-MATHIS, Preprint, Université de Poitiers.

[BMP] G. BROWN, W. MORAN, A. POLLINGTON, Normality to non-integer bases, C. R. Acad. Sci. Paris, 316, Série I (1993), 1241–1244.

[C] J.W.S. CASSELS, An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, London, 1957.

[FS] J. FELDMAN, M. SMORODINSKY, Normal numbers from independent Process, Ergod. Th. and Dynam. Syst., 12 (1992), 707–712.

[H] F. HOFBAUER, Maximal measures for simple piecewise monotonic transformations, Z. Wahrschein Verw. Gebiete, 52, n° 3 (1980).

[M] J. MAXFIELD, Normal k-uples, Pacific J. Math., 3 (1953), 189–196.

[MF1] M. MENDÈS-FRANCE, Thèse, Journal of Analysis (1986).

[MF2] M. MENDÈS-FRANCE, Les ensembles de Bésineau, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres, fasc. 7, Paris 1975.

[P] W. PARRY, On the β-expansions of real numbers, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., 11 (1960), 401–416.

[Po] A. POLLINGTON, The Hausdorff dimension of a set of normal numbers, Pacific J. Math., 95 (1981), 193–204.

[PK] C.E.M. PEARCE, M. KEANE, Normal numbers, Journal of Australian Math. Soc., (1988).

[R] A. RENYI, Representations for real numbers, Acta. Math. Sci. Hungar., 8 (1957), 447–495.

[S1] W. SCHMIDT, On normal numbers, Pacific J. of Math., 10 (1960), 661–672.

[S2] W. SCHMIDT, Uber die Normalität von Zahlen zu verschiedenen basen, Acta. Arith., 7 (1962), 299–301.

[Sm] M. SMORODINSKY, β-shifts are Bernoulli shifts, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., 24 (1973), 273–278.

Manuscrit reçu le 21 décembre 1993,
révisé le 9 novembre 1994,
accepté le 10 juillet 1995.

Anne BERTRAND-MATHIS,
Université de Poitiers
Département de Mathématiques
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex (France).