ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE DOERAENE
DANIEL TANRÉ

Axiome du cube et foncteurs de Quillen

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 4 (1995), p. 1061-1077
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_4_1061_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 4 (1995), 1061–1077

AXIOME DU CUBE ET FONCTEURS DE QUILLEN

par J.-P. DOERAENE et D. TANRÉ

La LS-catégorie a été définie par Lusternik et Schnirelmann en 1934 dans [7] pour minorer le nombre de points critiques d'une variété compacte sans bord. Plusieurs caractérisations équivalentes montrent qu'il s'agit d'un invariant du type d'homotopie; leur extension au cadre des catégories à modèles fermées, $\mathcal{M}$, fait l'objet de [3] et [5].

Dans [3], le premier auteur a montré que les présentations de Whitehead et Ganea sont équivalentes lorsqu'un axiome supplémentaire est requis : l'axiome du cube. La philosophie de ce dernier axiome est que les sommes amalgamées homotopiques sont préservées par les produits fibrés homotopiques.

Le cadre choisi dans [3] pour cette démonstration présente deux restrictions importantes :

- L'axiome du cube est un axiome global sur toute la catégorie. Or il peut exister des catégories à modèles ne vérifiant pas l'axiome du cube et dans lesquelles les définitions de Whitehead et Ganea coïncident pour une certaine classe d'objets. Seule une caractérisation au niveau des morphismes de la catégorie peut permettre d'appréhender cette situation.

- Un axiome supplémentaire, la propreté, est requis pour $\mathcal{M}$ alors que plusieurs catégories à modèles fermées ne le vérifient pas, par exemple, la catégorie des ensembles simpliciaux r-réduits, $(\mathcal{S}_r)$.

Dans ce travail, nous nous affranchissons de ces deux restrictions, en définissant d'abord les produits fibrés homotopiques dans le cas d'une catégorie à modèles sans axiome de propreté. Nous introduisons ensuite les familles «de flèches du cube» qui permettent d'obtenir l'équivalence

Mots-clés : Catégorie de Lusternik-Schnirelmann – Catégorie homotopique – Axiome du cube.
Classification math. : 55M30 – 55U35.

entre les définitions de Whitehead et Ganea. Enfin, nous montrons que les foncteurs de Quillen « conservent » les flèches du cube.

En particulier, bien que la catégorie $\mathcal{S}_r$ ne vérifie pas l'axiome du cube et ne soit pas propre, notre approche permet de montrer que l'équivalence des définitions de Whitehead et Ganea pour une classe d'ensembles simpliciaux de $\mathcal{S}_r$ s'étend à une sous-catégorie de la catégorie des algèbres de Lie différentielles $(r-1)$-réduites. Cet exemple de la catégorie $\mathcal{S}_r$ est développé en appendice aux deux premiers paragraphes.

1. Produit fibré homotopique.

Cette section est une présentation des principaux objets ; elle contient notamment la définition et les principales propriétés des produits fibrés homotopiques. Les démonstrations sont regroupées à la fin du paragraphe. En appendice, un exemple de produit fibré homotopique dans la catégorie des ensembles simpliciaux r-réduits est développé.

Rappelons qu'une *catégorie à modèles fermée* est une catégorie $\mathcal{M}$ munie de trois classes de flèches, appelées respectivement fibrations (fib, $\twoheadrightarrow$), cofibrations (cof, $\hookrightarrow$), équivalences faibles (we, $\xrightarrow{\sim}$), vérifiant les axiomes suivants :

(CM_1) : $\mathcal{M}$ est fermée pour les limites inductives et projectives finies.

(CM_2) : Si le composé gf est défini dans $\mathcal{M}$ et si deux quelconques de f, g, gf sont des équivalences faibles, le troisième l'est également.

(CM_3) : Un rétracte d'une fibration, (resp. d'une cofibration, resp. d'une équivalence faible), est une fibration, (resp. cofibration, resp. équivalence faible).

(CM_4) : Tout diagramme commutatif en trait plein

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

peut être complété en un diagramme commutatif par une flèche en pointillé si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

a) i est une cofibration et une équivalence faible, p est une fibration ;

b) i est une cofibration, p est une fibration et une équivalence faible.

(CM_5) : Toute flèche f peut se factoriser de deux façons :

a) $f = pi$, où i est une cofibration et une équivalence faible, p est une fibration ;

b) $f = qj$, où j est une cofibration, q est une fibration et une équivalence faible.

Dans la catégorie $\mathcal{M}$, deux objets A et B sont *faiblement équivalents* s'ils sont reliés par une suite finie d'équivalences faibles.

Rappelons également qu'un objet A est *fibrant* si l'application $A \to e$ est une fibration, où e est un élément final dans $\mathcal{M}$. Remarquons que toute fibration de but un objet fibrant a un objet fibrant en source. L'axiome (CM_5) a) implique que tout objet A admet un modèle fibrant E, $A \xrightarrow{\sim} E$.

Considérons la catégorie $\mathcal{M}^2$ des flèches de $\mathcal{M}$; ses objets sont les flèches de $\mathcal{M}$ et ses morphismes sont les carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \qquad \text{représentés par } (a; f \mid g; b).$$

Notons $b \downarrow g$ le produit fibré de b et g ainsi que $(a, f) : A \to b \downarrow g$ la flèche obtenue par propriété universelle.

Remarque 1. — À partir des axiomes précédents de catégorie à modèles fermée, il est facile de montrer (voir [1], [9]) que, si le carré

$$\begin{array}{ccc} b \downarrow f & \xrightarrow{f'} & B \\ {\scriptstyle b'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

est un produit fibré dans lequel b est une fibration (resp. fibration et équivalence faible), alors b' est une fibration (resp. fibration et équivalence faible).

On munit $\mathcal{M}^2$ d'une structure de catégorie à modèles fermée, (voir [1], II, 1.5.), en choisissant :

• pour *équivalences faibles* les flèches $(a; f \mid g; b)$ telles que f et g sont des équivalences faibles ;

• pour *fibrations* les flèches $(a; f \mid g; b)$ telles que f, g et (a, f) sont des fibrations.

Remarque 2.

• La catégorie des cubes, $\mathcal{M}^3$, peut être considérée comme la catégorie des flèches de $\mathcal{M}^2$.

• Un objet fibrant dans $\mathcal{M}^2$, (resp. $\mathcal{M}^3$), est une fibration entre objets fibrants de $\mathcal{M}$, (resp. $\mathcal{M}^2$). Par conséquent, tout carré commutatif (c'est-à-dire un objet de $\mathcal{M}^3$) admet un modèle constitué de fibrations entre objets fibrants.

• Deux flèches de $\mathcal{M}$ sont dites *faiblement équivalentes* si elles le sont comme objets de $\mathcal{M}^2$.

DÉFINITION 1. — *Un carré dans $\mathcal{M}$ est appelé fibrant-fibré, s'il est un produit fibré constitué de fibrations entre objets fibrants, c'est-à-dire s'il est à la fois un produit fibré dans $\mathcal{M}$ et un objet fibrant dans $\mathcal{M}^2$.*

DÉFINITION 2. — *Un carré dans $\mathcal{M}$ est appelé produit fibré homotopique (pfh) si, comme objet de $\mathcal{M}^3$, il est faiblement équivalent à un carré fibrant-fibré.*

PROPOSITION 1. — *Soit (f, f') un couple de flèches de $\mathcal{M}$ de même but. Considérons des décompositions $f = p\,i = \tilde{p}\,\tilde{\imath}$ et $f' = p'\,i' = \tilde{p}'\,\tilde{\imath}'$ de f et f', dans lesquelles $p, \tilde{p}, p', \tilde{p}'$ sont des fibrations, $i, \tilde{\imath}, i', \tilde{\imath}'$ des équivalences faibles. Alors les produits fibrés $p \downarrow p'$ et $\tilde{p} \downarrow \tilde{p}'$ sont faiblements équivalents.*

DÉFINITION 3. — *Avec les hypothèses de la proposition* 1, *le produit fibré $p \downarrow p'$ est un produit fibré homotopique de f et f'. Par abus de notation, il sera désigné par $f \downarrow_h f'$.*

Cette notion est un invariant du type d'homotopie, comme le montre :

PROPOSITION 2. — *Considérons deux couples de flèches de $\mathcal{M}$, de même but, faiblement équivalents, (f, f') et $(\tilde{f}, \tilde{f}')$. Alors les produits fibrés homotopiques $f \downarrow_h f'$ et $\tilde{f} \downarrow_h \tilde{f}'$ sont faiblement équivalents.*

Les objets définis ci-dessus sont reliés par :

PROPOSITION 3. — *Considérons un carré commutatif* $(a; f \mid g; b)$ *dans* $\mathcal{M}$:

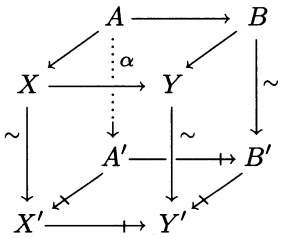
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) *le carré* $(a; f \mid g; b)$ *est un pfh*;

2) *pour tout produit fibré homotopique de* g *et* b, *la flèche universelle de* A *dans* $g \downarrow_h b$ *est une équivalence faible*;

3) *pour tout cube*



dont la base $(a'; f' \mid g'; b')$ *est un carré fibrant-fibré et dont les arêtes latérales* $B \to B'$, $X \to X'$, *et* $Y \to Y'$ *sont des équivalences faibles, alors la dernière arête latérale* $\alpha : A \to A'$ *est aussi une équivalence faible.*

COROLLAIRE 4. — *Considérons un carré commutatif* $(a; f \mid g; b)$ *de modèle fibrant* $(a'; f' \mid g'; b')$ *dans* $\mathcal{M}^2$. *Alors* $(a; f \mid g; b)$ *est un pfh si et seulement si la flèche universelle* (a', f') *est une équivalence faible.*

COROLLAIRE 5. — *Considérons le diagramme commutatif suivant* :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \bullet & \xrightarrow[h]{} & \bullet & \xrightarrow[k]{} & \bullet \end{array}$$

où le carré $(b; g \mid k; c)$ *est un pfh. Alors le carré* $(a; f \mid h; b)$ *est un pfh si et seulement si le carré* $(a; gf \mid kh; c)$ *est un pfh.*

COROLLAIRE 6. — *Tout carré faiblement équivalent à un pfh est un pfh.*

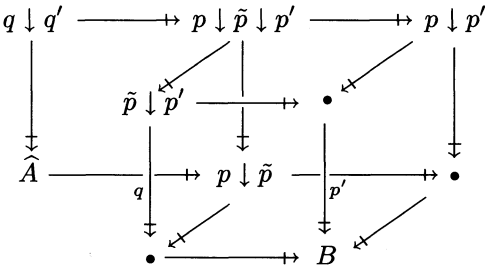
COROLLAIRE 7. — *Un carré* $(a; f \mid g; b)$, *où* b *est une équivalence faible, est un pfh si et seulement si* a *est une équivalence faible.*

Remarque 3. — Si la catégorie $\mathcal{M}$ est propre (voir [1], I.2), la définition de pfh introduite ici coïncide avec celle de Bousfield-Friedlander (voir [2] et aussi [1], I.1.9).

Preuve de la proposition 1. — Soit $f : A \to B$. Il suffit de démontrer le résultat pour $f' = p' = \tilde{p}'$. Décomposons la flèche $(i, \tilde{\imath}) : A \to p \downarrow \tilde{p}$, obtenue par propriété universelle des produits fibrés, en

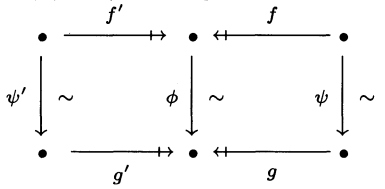
$$A \xrightarrow{\sim j} \widehat{A} \xrightarrow{q} p \downarrow \tilde{p}$$

où q est une fibration et j une équivalence faible; nous obtenons ainsi le diagramme commutatif :



En utilisant la remarque 1, on constate que les deux flèches $q \downarrow q' \to p \downarrow p'$ et $q \downarrow q' \to \tilde{p} \downarrow p'$ sont des équivalences faibles. □

Preuve de la proposition 2. — Il suffit de démontrer la proposition lorsque f et f' sont des fibrations, $\tilde{f} = \phi f$, $\tilde{f}' = \phi f'$, où ϕ est une équivalence faible. Considérons des décompositions $\tilde{f} = g\psi$, $\tilde{f}' = g'\psi'$, où g et g' sont des fibrations, ψ et ψ' des équivalences faibles, on obtient ainsi :



Le résultat est alors une conséquence du dual du *gluing lemma* (*cf.* [1], II.1.2). □

Remarque 4. — Comme le montre la preuve précédente, l'équivalence faible induite entre les pfh provient des flèches universelles entre les produits fibrés.

Preuve de la proposition 3.

1) $\Rightarrow$ 2). Par hypothèse, $(a; f \mid g; b)$ admet une modèle fibrant-fibré $(a'; f' \mid g'; b')$. Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 2 et la remarque 4.

2) $\Rightarrow$ 3). Soit $g \downarrow_h b$ un pfh de g et de b. D'après la proposition 2 et la remarque 4, la flèche universelle de $g \downarrow_h b$ vers A' est une équivalence faible. Par hypothèse, la flèche universelle $A \to g \downarrow_h b$ est une équivalence faible. Le résultat en découle par composition.

3) $\Rightarrow$ 1). À partir des propriétés de catégorie à modèles fermée de $\mathcal{M}^3$, (*cf.* remarque 2), il est facile de construire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & Y & \xleftarrow{b} & B \\ \sim\downarrow & & \sim\downarrow & & \sim\downarrow \\ X' & \xrightarrow[g']{} & Y' & \xleftarrow[b']{} & B' \end{array}$$

où g' et b' sont des fibrations entre objets fibrants, les flèches verticales sont des équivalences faibles. D'après 3), la flèche universelle $(a, f) : A \to b' \downarrow g'$ est une équivalence faible. Ainsi, par définition, $(a; f \mid g; h)$ est un pfh. □

La preuve des corollaires de la proposition 3, ainsi que la justification de la remarque 3, sont laissées au lecteur. Nous laissons également au lecteur la transcription de ce paragraphe en terme de sommes amalgamées homotopiques :

DÉFINITION 4. — *Un carré dans $\mathcal{M}$ est appelé cofibrant-cofibré s'il est une somme amalgamée de cofibrations entre objets cofibrants.*

DÉFINITION 5. — *Un carré dans $\mathcal{M}$ est appelé somme amalgamée homotopique* (sah) *si, comme objet de $\mathcal{M}^3$, il est faiblement équivalent à un carré cofibrant-cofibré.*

Appendice : un exemple de pfh dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}_r$.

La catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux est une catégorie à modèles fermée définie par (voir [10], p. 236) :

- les équivalences faibles sont les applications dont la réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie;
- les cofibrations sont les applications injectives;
- les fibrations sont les fibrés de Kan.

Soit $\mathcal{S}_r$ la catégorie des ensembles simpliciaux r-réduits, $r \geq 1$, et soit S un système multiplicatif dans $\mathbb{Z}$ (avec $S = \{1\}$ si $r = 1$). Une application $f \in \mathcal{S}_r$ est appelée *S-équivalence* si l'application induite $S^{-1}H_*(f)$ est un isomorphisme. Considérons la catégorie à modèles fermée, $\mathcal{S}(r, S)$ définie ainsi (voir [10], p. 237) :

- les équivalences faibles sont les S-équivalences;
- les cofibrations sont les applications injectives dans $\mathcal{S}_r$;
- les fibrations sont obtenues par relèvement (axiome (CM_4) a).

Si $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, nous obtenons la catégorie donnant le type d'homotopie rationnelle et la notons $\mathcal{S}_{r,0}$.

Rappelons (voir [10], prop. 2-12, p. 243) qu'une flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{S}_r$, de but un complexe de Kan, est une fibration dans $\mathcal{S}_r$ si, et seulement si, l'application canonique $X \to Y \times_{K(\pi_r Y, r)} K(\pi_r X, r)$ de but le produit fibré, est une fibration dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 8. — *Notons $S^3_{\mathbb{Q}}$ le rationalisé de la sphère S^3, 0 l'ensemble simplicial réduit à un point, Σ et Ω (resp. $\Sigma_{(3)}$ et $\Omega_{(3)}$) les foncteurs suspension et lacets calculés dans $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_3$).*

1) *L'application diagonale $\Delta : S^3_{\mathbb{Q}} \to S^3_{\mathbb{Q}} \times S^3_{\mathbb{Q}}$ et l'application canonique $0 \to S^3_{\mathbb{Q}}$ sont des fibrations de $\mathcal{S}_{3,0}$.*

2) *Les pfh de $\Delta : S^3_{\mathbb{Q}} \to S^3_{\mathbb{Q}} \times S^3_{\mathbb{Q}}$ et de l'injection $j : S^3_{\mathbb{Q}} \vee S^3_{\mathbb{Q}} \to S^3_{\mathbb{Q}} \times S^3_{\mathbb{Q}}$, calculés dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}_r$, coïncident. La valeur commune est le type d'homotopie de $\Sigma\Omega S^3_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve.

1) Le résultat est immédiat à partir de la caractérisation rappelée avant l'énoncé. Pour l'application diagonale, par exemple, l'application induite de $S^3_{\mathbb{Q}}$ dans

$$(S^3_{\mathbb{Q}} \times S^3_{\mathbb{Q}}) \times_{K(\mathbb{Q},3)\times K(\mathbb{Q},3)} K(\mathbb{Q}, 3) \cong S^3_{\mathbb{Q}}$$

est l'identité.

2) D'après la proposition 2.5, p. 238, de [10], l'injection j se décompose en

$$S^3_{\mathbb{Q}} \vee S^3_{\mathbb{Q}} \xrightarrow[\sim]{i} X \xrightarrow{p} S^3_{\mathbb{Q}} \times S^3_{\mathbb{Q}}$$

où i est une cofibration triviale de $\mathcal{S}_r$ (donc de $\mathcal{S}$) et p est une fibration dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}_r$. Le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S^3_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\Delta} & S^3_{\mathbb{Q}} \times S^3_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

est un pfh dans $\mathcal{S}$ (car $\mathcal{S}$ est propre et p est une fibration de $\mathcal{S}$) et dans $\mathcal{S}_r$ (car p et Δ sont des fibrations de $\mathcal{S}_r$). D'après [4], on sait que P a le type d'homotopie de $\Sigma\Omega S^3_{\mathbb{Q}}$. □

Remarque 5. — Le produit fibré

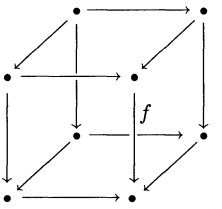
$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & S^3_{\mathbb{Q}} \vee S^3_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ S^3_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\Delta} & S^3_{\mathbb{Q}} \times S^3_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

est un exemple de produit fibré dans une catégorie non propre, $\mathcal{S}_{3,0}$, dont l'une des flèches est une fibration et qui n'est pas un pfh.

2. Flèches du cube.

L'importance de l'axiome du cube pour l'équivalence des définitions de Whitehead et de Ganea est établie dans [3]. Pour ce paragraphe, nous transformons cet axiome global en une propriété au niveau des flèches et donnons des exemples de classes de flèches possédant cette propriété.

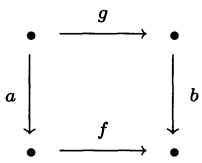
DÉFINITION 6. — *Une flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{M}$ est une* flèche du cube *si pour tout diagramme*



dont la base est une sah et les quatre faces verticales sont des pfh, alors la face supérieure est une sah.

Remarque 6. — En utilisant les propriétés établies dans le premier paragraphe, on constate que :

- les équivalences faibles sont des flèches du cube ;
- dans le diagramme commutatif suivant



si g et f sont des équivalences faibles et b une flèche du cube, alors a est une flèche du cube ; si g et f sont des fibrations et des équivalences faibles et si a est une flèche du cube, alors b est une flèche du cube.

DÉFINITION 7. — *La catégorie $\mathcal{M}$ vérifie l'axiome du cube si toute flèche de $\mathcal{M}$ est une flèche du cube.*

Des exemples de catégories à modèles fermées vérifiant l'axiome du cube sont donnés dans [3] ; citons la catégorie des espaces topologiques bien pointés, des complexes de chaînes de R-modules, etc.

PROPOSITION 9. — *Une catégorie à modèles fermée $\mathcal{M}$ vérifie l'axiome du cube si, et seulement si, toutes les fibrations entre objets fibrants sont des flèches du cube.*

Preuve. — En appliquant l'existence de modèles fibrants à la catégorie à modèles fermée $\mathcal{M}^3$, on constate que tout cube est faiblement équivalent à un cube dont toutes les arêtes sont des fibrations et tous les sommets des objets fibrants. Le résultat découle alors du corollaire 7 de la proposition 3 et de son analogue pour les sah. □

Une lecture attentive du théorème 7.5 de [3] montre :

PROPOSITION 10. — *Supposons qu'il existe une classe $\mathcal{A}$ de flèches de $\mathcal{M}$ telle que :*

1) *$\mathcal{A}$ est saturée pour la relation d'équivalence faible* ;

2) *$\mathcal{A}$ est stable par pfh* ;

3) *$\mathcal{A}$ est constituée de flèches du cube.*

Si l'application diagonale $\Delta : X \to X^k$ fait partie d'une telle classe $\mathcal{A}$ pour tout $1 \leq k \leq n+1$, où n est la catégorie de Whitehead ou de Ganea, alors les deux catégories coïncident.

Appendice : flèche du cube dans $\mathcal{S}(r, S)$.

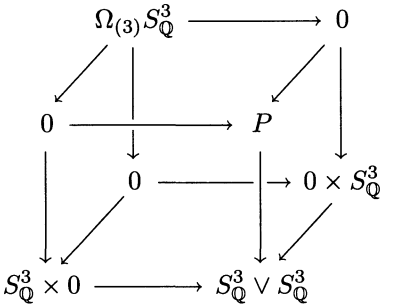
Nous reprenons ici les notations et définitions de l'appendice à la section 1. Notons $\mathcal{A}_r$ l'ensemble des flèches de $\mathcal{S}_r$ telles que $S^{-1}\pi_r(f)$ soit surjective.

PROPOSITION 11. — *La classe $\mathcal{A}_r$ vérifie les propriétés* 1) à 3) *de la proposition* 10.

De la proposition 10 on déduit alors :

COROLLAIRE 12. — *Dans $\mathcal{S}(r, S)$, les LS-catégories de Whitehead et de Ganea d'un espace $(r+1)$-réduit coïncident.*

Remarque 7. — Dans $\mathcal{S}_3$, l'espace des lacets de $S^3_{\mathbb{Q}}$, $\Omega_{(3)}S^3_{\mathbb{Q}}$, est réduit à un point. La LS-catégorie de Ganea de $S^3_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{S}(3, S)$ est donc infinie. Par contre, la LS-catégorie de Whitehead de $S^3_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{S}(3, S)$ coïncide avec celle calculée dans $\mathcal{S}$ et vaut 1. En conséquence l'application diagonale $\Delta : S^3_{\mathbb{Q}} \to S^3_{\mathbb{Q}} \times S^3_{\mathbb{Q}}$ ne peut être une flèche du cube par la proposition 10. Avec les notations de la proposition 8, on peut également remarquer que :

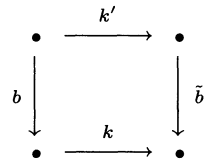


est un cube dont les faces latérales sont des pfh, la base une sah et dont la face supérieure n'est pas une sah.

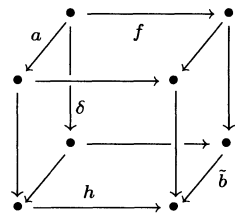
Avant d'aborder la preuve de la proposition 11, remarquons :

LEMME 13. — *Soit $b \in \mathcal{A}_r$ et soit $(a; f \mid g; b)$ un diagramme commutatif. Alors le carré $(a; f \mid g; b)$ est un pfh dans $\mathcal{S}$ si, et seulement si, il est un pfh dans $\mathcal{S}(r, S)$.*

Preuve du lemme. — Par hypothèse, il existe un modèle fibrant $\tilde{b}$ de b dans $\mathcal{S}(r, S)$ qui est aussi une fibration de $\mathcal{S}$:



Décomposons kg en $kg = hj$, où j est une équivalence faible et h une fibration de $\mathcal{S}(r, S)$ (et pas nécessairement de $\mathcal{S}$). Construisons le produit fibré de h et $\tilde{b}$; nous obtenons ainsi un cube :



où $\delta = (a, f)$ est la flèche universelle. La face inférieure est un pfh dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}(r, S)$; les deux assertions de l'énoncé équivalent donc à : « δ est une équivalence faible. » □

Preuve de la proposition 11. — La propriété 1) est évidente.

Pour la propriété 2), soit $(a; f \mid g; b)$ un pfh dans lequel $b \in \mathcal{A}_r$; il nous faut démontrer que $a \in \mathcal{A}_r$. Par définition, il existe un carré fibrant-fibré $(\tilde{a}; \tilde{f} \mid \tilde{g}; b)$ faiblement équivalent au carré de départ. De $\tilde{b} \in \mathcal{A}_r$, on déduit $\tilde{a} \in \mathcal{A}_r$, d'où $a \in \mathcal{A}_r$.

Quant à la propriété 3), avec le lemme et les propriétés 1) et 2), elle se déduit du fait que $\mathcal{S}$ vérifie l'axiome du cube. □

3. Foncteurs adjoints de Quillen.

Le but de cette section est de montrer que certaines flèches du cube et l'axiome du cube sont conservés par les foncteurs induisant une équivalence de catégories homotopiques, tels qu'ils sont définis dans [9], [10] :

DÉFINITION 8. — *Un couple F, G de foncteurs adjoints entre catégories à modèles fermées*

$$\mathcal{M} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{N}$$

est appelé couple de foncteurs de modélisation si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) *Le foncteur adjoint à gauche, F, conserve les cofibrations; le foncteur adjoint à droite, G, conserve les fibrations.*

2) *Le foncteur F conserve les équivalences faibles entre objets cofibrants; le foncteur G conserve les équivalences faibles entre objets fibrants.*

3) *Si X est un objet cofibrant de $\mathcal{M}$ et Y est un objet fibrant de $\mathcal{N}$, alors une flèche $f : X \to GY$ de $\mathcal{M}$ est une équivalence faible si, et seulement si, la flèche correspondante de $\mathcal{N}$, $f^\flat : FX \to Y$ est une équivalence faible.*

Exemple. — Une suite de foncteurs de modélisation reliant la catégorie des ensembles simpliciaux 2-réduits et celle des algèbres de Lie différentielles graduées réduites est construite dans [10].

Énonçons maintenant le principal résultat :

THÉORÈME. — *Considérons un couple de foncteurs de modélisation :*

$$\mathcal{M} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{N}.$$

1) *Soit δ une flèche de $\mathcal{M}$ entre objets cofibrants. Si la flèche $F\delta$ dans $\mathcal{N}$ est une flèche du cube alors δ est une flèche du cube. Réciproquement, si les modèles fibrants de δ sont des flèches du cube, alors $F\delta$ est une flèche du cube.*

2) *Soit δ une flèche de $\mathcal{N}$ entre objets fibrants. La flèche δ est une flèche du cube dans $\mathcal{N}$ si, et seulement si, la flèche $G\delta$ est une flèche du cube dans $\mathcal{M}$.*

COROLLAIRE 14. — *Soit $\mathcal{M} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{N}$ un couple de foncteurs de modélisation. Alors $\mathcal{M}$ vérifie l'axiome du cube si, et seulement si, $\mathcal{N}$ vérifie l'axiome du cube.*

Preuve du corollaire. — Supposons que $\mathcal{M}$ vérifie l'axiome du cube et soit g une fibration entre objets fibrants de $\mathcal{N}$. La flèche Gg est une flèche du cube, donc g est une flèche du cube d'après le théorème. Le résultat provient alors de la proposition 9.

Supposons maintenant que $\mathcal{N}$ vérifie l'axiome du cube et soit f une flèche de $\mathcal{M}$. On construit un modèle de f :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\sim]{h} & \bullet \\ {\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow[\sim]{h'} & \bullet \end{array}$$

où h et h' sont des fibrations et des équivalences faibles, de source des objets cofibrants A et B. La flèche $F\tilde{f}$ est une flèche du cube de $\mathcal{N}$, donc $\tilde{f}$ est une flèche du cube d'après le théorème. Le résultat découle alors de la remarque 6. □

Avant d'aborder la preuve du théorème, rappelons et établissons quelques propriétés de base vérifiées par un couple de foncteurs de modélisation.

Remarque 8. — Si (F, G) est un couple de foncteurs de modélisation, alors :

- F préserve l'objet initial, les sommes amalgamées, les objets cofibrants ;
- G préserve l'objet final, les produits fibrés, les objets fibrants ;
- une flèche f de $\mathcal{M}$, entre objets cofibrants, est une équivalence faible si, et seulement si, Ff est une équivalence faible dans $\mathcal{N}$;
- une flèche g de $\mathcal{N}$, entre objets fibrants, est une équivalence faible si, et seulement si, Gg est une équivalence faible dans $\mathcal{M}$.

En conséquence directe des propriétés ci-dessus, on obtient :

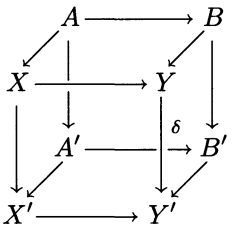
PROPOSITION 15. — *Soit* $\mathcal{M} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{N}$ *un couple de foncteurs de modélisation.*

1) *Un carré commutatif dans* $\mathcal{M}$, *dont tous les sommets sont cofibrants, est une sah* (*respectivement un pfh*) *si, et seulement si, son image par* F *dans* $\mathcal{N}$ *est une sah* (*respectivement un pfh*).

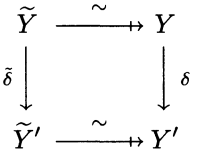
2) *Un carré commutatif dans $\mathcal{N}$, dont tous les sommets sont fibrants, est une sah (respectivement un pfh) si, et seulement si, son image par G dans $\mathcal{M}$ est une sah (respectivement un pfh).*

Preuve du théorème.

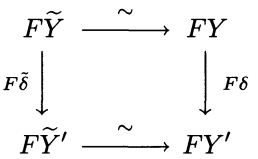
1) a) Soit $\delta : Y \to Y'$ une flèche de $\mathcal{M}$ entre objets cofibrants telle que $F\delta$ soit une flèche du cube. Considérons un diagramme commutatif, $\mathcal{D}$, dans $\mathcal{M}$:



dont la base est une sah et les faces verticales des pfh ; nous voulons montrer que la face supérieure est une sah. En utilisant l'existence de modèles cofibrants dans $\mathcal{M}^3$, nous pouvons remplacer ce cube $\mathcal{D}$ par un cube $\widetilde{\mathcal{D}}$, faiblement équivalent à $\mathcal{D}$, dont tous les sommets sont cofibrants. Le problème est ramené à montrer que la face supérieure de $\widetilde{\mathcal{D}}$ est une sah. Entre les deux arêtes correspondantes de $\mathcal{D}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}$, nous avons un diagramme commutatif :

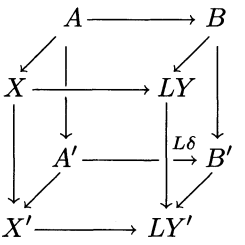


Prenons son image par F :



La flèche $F\tilde{\delta}$ est une flèche du cube (*cf.* remarque 6). La proposition 15 implique alors que la face supérieure de $F\widetilde{\mathcal{D}}$ est une sah ; il en est donc de même pour celle de $\widetilde{\mathcal{D}}$, à nouveau à partir de la proposition 15.

1) b) Soit $\delta : Y \to Y'$ une flèche du cube de $\mathcal{M}$ entre objets cofibrants. Considérons un diagramme commutatif $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{N}$:



dont la base est une sah et les faces verticales des pfh. La preuve s'ordonne comme la précédente, à partir d'un modèle fibrant de $\mathcal{D}$.

Nous laissons au lecteur la preuve de l'énoncé (2) du théorème, analogue à celles ci-dessus, en remarquant que (2) ne peut cependant pas se déduire de (1) par un argument de dualité. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BAUES, Algebraic homotopy, Cambridge University Press, 1989.

[2] A.K. BOUSFIELD, E. FRIEDLANDER, Homotopy theory of Γ–spaces, spectra and bisimplicial sets, Lecture Notes in Math. 658, Springer Verlag (1978), 80–130.

[3] J.P. DOERAENE, LS–category in a model category, Journal of Pure and Appl. Algebra, 84 (1993), 215–261.

[4] T. GANEA, Cogroups and Suspensions, Inventiones Math., 9 (1970), 185–197.

[5] K.P. HESS, J.M. LEMAIRE, Generalizing a definition of Lusternik and Schnirelmann to model categories, Journ. of Pure and Applied Algebra, 91 (1994), 165–182.

[6] T. KAHL, M. KIENZLER, Diplomarbeit am Freie Universität Berlin.

[7] L. LUSTERNIK, L. SCHNIRELMANN, Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Hermann, Paris, 1934.

[8] M. MATHER, Pull–backs in Homotopy Theory, Can. J. Math., 28–2 (1976), 225–263.

[9] D. QUILLEN, Homotopical Algebra, Lecture Notes in Math., 43, Springer Verlag, 1967.

[10] D. QUILLEN, Rational Homotopy theory, Ann. of Math., 90 (1969), 205–295.

Manuscrit reçu le 2 septembre 1994,
accepté le 14 mars 1995.

J.–P. DOERAENE et D. TANRÉ,
UFR de Mathématiques
URA CNRS 0751D
Université des Sciences et Technologies de Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).