ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SYLVAIN BARRÉ

Polyèdres finis de dimension 2 à courbure ≤ 0 et de rang 2

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 4 (1995), p. 1037-1059

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_4_1037_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 4 (1995), 1037–1059

POLYÈDRES FINIS DE DIMENSION 2 À COURBURE ≤ 0 ET DE RANG 2

par Sylvain BARRÉ

1. Introduction.

Si on se donne une variété riemannienne fermée, à tout vecteur v de son fibré unitaire tangent, on peut associer un entier noté $\text{rang}(v)$ qui est égal à la dimension de l'espace des champs de Jacobi parallèles le long de la géodésique définie par v. Le *rang* de cette variété est le minimum des rangs des vecteurs unitaires. Avec l'aide des résultats de W. Ballmann, M. Brin, P. Eberlein et R. Spatzier dans [BBE] et [BBS], K. Burns et R. Spazier ont montré dans [BurS] que toute variété fermée à courbure ≤ 0, de rang ≥ 2 et irréductible est localement symétrique.

B. Kleiner s'est intéressé à des résultats analogues pour des espaces singuliers. Pour lui, un espace métrique est de rang $\geq k$ si toute géodésique est contenue dans un k-plat. Son résultat (non publié) est le suivant : tout polyèdre à courbure ≤ 0 de dimension k, irréductible et de rang k, a pour revêtement universel un immeuble euclidien (au sens de Tits).

Dans ce travail, nous étudions les polyèdres finis de dimension 2 à courbure ≤ 0. Nous dirons qu'un tel polyèdre P est de rang 2 si tout germe de géodésique (*i.e.* un germe d'immersion isométrique de $\mathbb{R}$ dans P) se prolonge en un germe de plat (*i.e.* un germe d'immersion isométrique de $\mathbb{R}^2$ dans P). L'un des résultats de cet article est que cette définition locale, qui nous semble très naturelle, entraîne que toute géodésique globale (*i.e.* une immersion isométrique de $\mathbb{R}$) se prolonge en un plat global c'est-à-dire une immersion isométrique de $\mathbb{R}^2$ (théorème 2). Nous obtenons par ailleurs une preuve élémentaire du résultat de B. Kleiner en dimension 2 et

Mots-clés : Polyèdre – Courbure négative ou nulle – Espace CAT(0) – Rang deux – Immeuble de Tits.
Classification math. : 53C35 – 51E24 – 51M20 – 20E42 – 05C12.

ceci nous permet d'obtenir une description très précise de ces polyèdres à courbure ≤ 0 et de rang 2 (théorème 3).

Alors que cet article était en cours de rédaction, nous avons reçu une prépublication de W. Ballmann et M. Brin qui contient des résultats très proches des nôtres. Ces auteurs prennent cependant comme définition de la propriété de rang 2 le fait que toute géodésique *globale* borde un *demi*-plat *global*.

Je tiens à remercier vivement le rapporteur pour l'attention qu'il a portée à mon travail et Étienne Ghys pour toutes les idées qu'il m'a données et pour ses encouragements.

2. Sur les immeubles de dimension un.

Dans ce qui suit, nous ne distinguerons pas un graphe combinatoire de l'espace topologique qu'il définit.

DÉFINITION 2.1. — *Un* immeuble combinatoire (*sphérique*) *de dimension un est la donnée d'un graphe, dont les arêtes seront appelées* chambres *et d'une famille de sous graphes appelés* appartements *tels que* :

(1) *chaque appartement est un cercle composé de* $2N$ *arêtes pour un certain* N *fixé*;

(2) *deux chambres quelconques sont contenues dans un même appartement*;

(3) *si deux appartements ont une chambre en commun, il y a un isomorphisme de graphes qui envoie l'un sur l'autre en fixant l'intersection point par point.*

Exemples.

• Considérons deux sommets reliés par n arêtes ($n \geq 2$, éventuellement $n = \infty$). Un appartement est donné par deux arêtes distinctes. On vérifie aisément les axiomes (pour $N = 1$, voir figure 1).

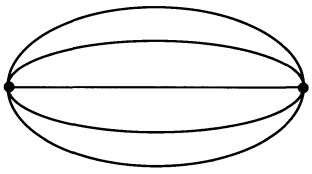

Figure 1.

• Sur un ruban de Mœbius, on place six sommets sur le bord, qui se trouve ainsi découpé en six arêtes. On ajoute trois autres arêtes en reliant chaque sommet à l'opposé. Les appartements sont tous les cycles de longueur 4 (*i.e.* comprenant 4 arêtes). Comme l'intersection de deux tels cycles est connexe, les axiomes sont faciles à vérifier (voir figure 2).

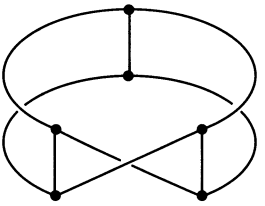

Figure 2.

DÉFINITION 2.2. — *On parlera d'un* immeuble combinatoire *(euclidien) si l'axiome* (1) *de la définition précédente est remplacé par le suivant* :

(1′) *Chaque appartement est une droite.*

Exemple. — Considérons un arbre sans feuille (*i.e.* sans sommet de valence un). Prenons toutes les droites comme famille d'appartements. Un appartement est donc déterminé par une paire de points sur le bord à l'infini. L'intersection de deux droites étant connexe, l'axiome (3) est facilement vérifiable. L'axiome (2) est aussi évident.

Pour un arbre homogène, il n'est pas nécessaire de considérer toutes les droites pour former la famille des appartements. On peut par exemple en enlever un nombre fini (l'axiome (2) sera toujours vérifié).

PROPOSITION 2.1.

• *Dans un immeuble sphérique, les appartements sont exactement tous les cycles de longueur minimale.*

• *Un immeuble euclidien est un arbre.*

Démonstration. — Dans le cas sphérique, considérons un cycle de longueur minimale n et montrons que c'est un appartement. Si $n = 2$, le seul appartement qui peut contenir les deux chambres qui composent le cycle considéré est lui-même. Supposons désormais $n \geq 3$. Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les arêtes de notre petit cycle (dans l'ordre cyclique).

Les arêtes C_1 et C_2 sont dans un même appartement Σ_2. Aussi, C_1 et C_3 sont dans un même appartement Σ_3.

L'isomorphisme entre ces deux appartements qui fixe C_1, fixe aussi le sommet commun à C_2 et C_3. Donc Σ_3 connecte C_1 à C_3 par l'intermédiaire d'une seule chambre. Cette chambre est nécessairement C_2, sinon on aurait un cycle de longueur 2. L'appartement Σ_3 contient donc C_1, C_2 et C_3.

Supposons $n = 2m$ et itérons ce procédé pour arriver au fait que $C_1, , C_2, \ldots, C_{m+1}$ sont dans un même appartement. En parcourant le cercle dans l'autre sens, on trouve un appartement qui contient $C_1, C_{2m}, \ldots, C_{m+1}$. Si ces appartements n'étaient pas confondus, il existerait un isomorphisme entre eux qui fixerait C_1 et C_{m+1}. Ceci entraînerait l'existence d'un cycle plus petit (voir figure 3). Donc $C_1, \ldots, C_n$ forment un appartement.

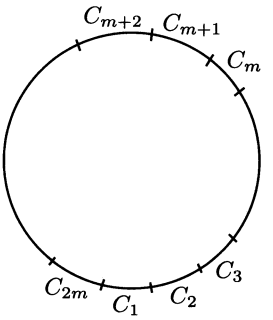

Figure 3.

Si $n = 2m + 1$, la preuve convient avec les mêmes notations. Et ce cas ne se produit donc pas puisqu'un appartement a une longueur paire.

Considérons maintenant un immeuble euclidien qui aurait des cycles. Choisissons-en un de longueur minimale et suivons le même raisonnement que précédemment. On trouve alors deux appartements, l'un contenant $C_1, C_2, \ldots, C_{m+1}$, l'autre $C_1, C_{2m}, \ldots, C_{m+1}$. Mais ceci n'est pas possible car il y a un isomorphisme qui envoie l'un sur l'autre en fixant l'intersection (voir figure 4). □

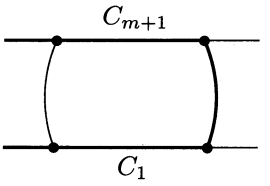

Figure 4.

Remarque. — L'intersection de deux cycles de longueur minimale est soit connexe, soit composée de deux sommets diamétralement opposés dans les deux cycles.

3. Sur les immeubles métriques de dimension un.

On dira qu'un graphe est *métrique* si on a associé une longueur non nulle pour chaque arête. La longueur d'un chemin de sommet à sommet dans un graphe métrique n'est plus le nombre d'arêtes qui le compose, mais la somme de leur longueur.

DÉFINITION 3.1. — *Un* immeuble métrique (*sphérique*) *de dimension un est un graphe métrique fini et connexe dont les sommets sont de valence* ≥ 3 *et tel que* :

(1) (*ample*) *Tous les cycles sont de longueur* $\geq 2\pi$.

(2) (*rang* 2) *Deux points séparés par un chemin simple de longueur* $\geq \pi$ *sont contenus dans un cycle de longueur égale à* 2π.

Exemple. — Un immeuble combinatoire définit un immeuble métrique en prenant π/N comme longueur pour toutes les arêtes.

Remarques.

• La condition (2) demande en particulier que le diamètre d'un immeuble soit égal à π.

• Dans un immeuble métrique, un chemin simple de longueur π se complète en un cycle de longueur 2π. En effet, on sait que les deux extrémités d'un chemin simple de longueur π sont dans un cycle de longueur 2π. D'après (1), ces deux extrémités ne peuvent être que diamétralement opposées dans ce cycle.

• On peut remplacer la condition (2) par la suivante : « Deux points quelconques se trouvent dans un cycle de longueur 2π. » Cette condition est clairement plus forte que la condition (2). Vérifions qu'un immeuble métrique la satisfait. Considérons donc deux points séparés par un chemin de longueur $< \pi$. Comme un immeuble n'a pas de feuille et grâce au point (1), on peut prolonger ce chemin en un chemin simple de longueur π qui se complète, on l'a vu, en un cycle de longueur 2π.

• Si deux petits cycles (de longueur 2π) se rencontrent, on a un isomorphisme métrique qui envoie l'un sur l'autre en fixant l'intersection. Car

si l'intersection n'est pas connexe, il s'agit de deux points diamétralement opposés dans les deux cycles.

On commence à s'apercevoir que les propriétés des immeubles métriques sont les mêmes que celles des immeubles combinatoires. Cependant, on ne sait pas *a priori* que les arêtes ont toutes la même longueur.

Considérons un arbre fini, muni d'un point base (la racine). On suppose d'une part que toutes ses feuilles sont à la même distance N (combinatoire) de la racine, d'autre part qu'il y a deux valences qui s'alternent (c'est-à-dire que deux sommets à distance 2 ont même valence). Appelons *branche* une composante connexe de l'arbre privé de sa racine. Identifions certaines feuilles de telle sorte que chaque feuille soit identifiée à exactement une feuille de chacune des branches. Enfin, attribuons la longueur π/N à chaque arête du graphe ainsi obtenu.

PROPOSITION 3.1. — *Tout immeuble métrique est obtenu par le procédé décrit ci-dessus.*

Démonstration. — Dans un graphe métrique, fixons un sommet (la racine) et faisons croître le rayon des boules centrées en ce point. Découpons notre preuve en plusieurs étapes.

1) Si un cycle se forme dans la boule de rayon ℓ, sa longueur est $\leq 2\ell$. Donc avant le rayon π, notre boule est un arbre.

2) Puisqu'un immeuble a un diamètre $\leq \pi$, la boule de rayon π le recouvre totalement.

3) Notre immeuble est donc obtenu en identifiant certaines feuilles d'un arbre de hauteur π. Remarquons que deux feuilles d'une même branche ne peuvent se recoller l'une sur l'autre (un cycle trop petit se créerait). Aussi, deux branches sont toujours connectées par l'intermédiaire de l'une de leurs feuilles. Sinon, un chemin simple de longueur π centré sur la racine dont une extrémité serait dans une branche et une autre dans une deuxième qui ne lui serait pas reliée, ne pourrait pas se compléter en un cycle de longueur 2π.

4) Pour que les points de la sphère de rayon π soient des sommets, il faut qu'il y ait toujours au moins trois feuilles qui se recollent ensemble. Supposons qu'en un point F de la cime, seulement deux feuilles se recollent. La racine O étant de valence ≥ 3, soit un point A proche de O dans une branche ne contenant pas F. Aussi, soit B un point proche de F à une

distance π de A. Alors le chemin de A à B de longueur π ne peut se compléter en un cycle de longueur 2π (voir figure 5).

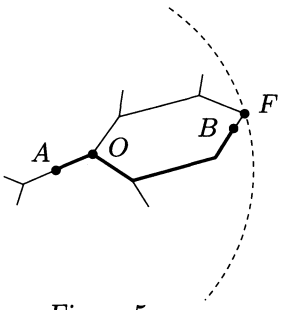

Figure 5.

5) On a vu dans ce qui précédait qu'un chemin simple de longueur π qui part d'un sommet aboutit nécessairement à un sommet. Considérons des chemins de longueur π qui partent d'un point mobile X et qui passent par O (voir figure 6). Dès que X va coïncider avec le sommet voisin S, les extrémités de ces chemins vont coïncider avec des sommets. On vient donc de montrer qu'autour d'un sommet O, de valence v, $v-1$ quelconques des arêtes qui partent sont de même longueur. Ainsi, toutes les arêtes de notre immeuble ont même longueur. Et s'il y a N arêtes de O aux feuilles, c'est que les arêtes ont pour longueur π/N.

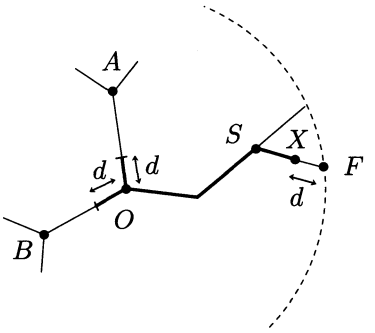

Figure 6.

6) Les points 3) et 4) nous informent que la valence de O est la même que celles des points de la sphère de rayon π. On va utiliser ce fait en faisant pousser un arbre à partir du sommet S. On observe que les voisins de O des branches ne contenant pas S (A et B sur la figure 6) ont même valence,

et par suite, tous les voisins de O ont même valence. Ainsi, deux sommets à distance 2 ont même valence. En d'autres termes, il y a (au plus) deux valences qui s'alternent.

Nous avons mis en évidence toutes les propriétés qui démontrent notre proposition. □

THÉORÈME 1. — *Les immeubles métriques ne sont autres que des immeubles combinatoires (dont toutes les arêtes ont pour longueur π/N).*

Démonstration. — On a déjà vu qu'un immeuble sphérique était aussi un immeuble métrique. Considérons un immeuble métrique. Bien sûr, la famille d'appartements sera composée des cycles de longueur 2π. La proposition précédente nous dit qu'il y a $2N$ chambres par appartement. Le fait que deux chambres soient dans un même appartement résulte du fait que deux points sont toujours dans une même cycle de longueur 2π. Pour finir, l'isomorphisme métrique entre deux appartements qui auraient une partie commune est bien un isomorphisme de graphes puisque les arêtes ont toutes même longueur. □

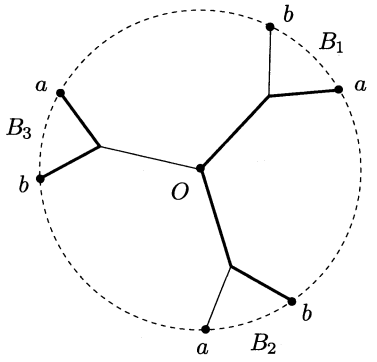

Figure 7.

PROPOSITION 3.2. — *Un immeuble métrique dont tous les cycles sont de longueur égale à 2π est composé de deux sommets reliés par des arêtes de longueur π.*

Démonstration. — Il faut voir qu'il ne peut y avoir de ramification dans l'arbre qu'on fait pousser jusqu'à la hauteur π dans le théorème 1. Imaginons un instant qu'il y en ait. Alors il est facile de trouver un cycle de longueur $> 2\pi$ (voir figure 7) : partons d'une feuille a d'une branche B_1 et relions-la à une feuille différente b d'une autre branche B_2 en passant pas O. Ensuite, complétons le chemin dans une troisième branche B_3. □

On notera $T_{n,m}$ l'arbre où les deux valences n et m s'alternent et T_n l'arbre homogène de valence n. On a vu que le revêtement universel d'un immeuble métrique était précisément un de ces arbres. Par exemple, pour $N = 2$ et 3, il existe un unique immeuble dont le revêtement universel est l'arbre T_3. L'unicité est très facile à voir sur un dessin (voir figure 8). Quant à l'existence, on en a déjà parlé dans le cas $N = 2$ et dans le cas $N = 3$, on obtient le graphe des drapeaux du plan projectif sur le corps fini à 2 éléments (voir [Bro]).

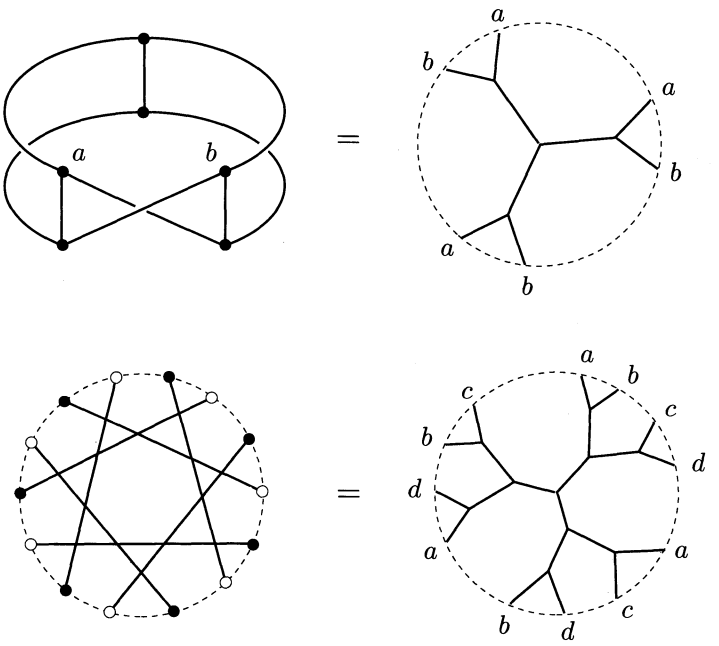

Figure 8.

Désormais, on dira *immeuble* pour immeuble métrique, sachant qu'il s'agit aussi d'un immeuble combinatoire. Voyons maintenant une réciproque à la proposition 3.1.

PROPOSITION 3.3. — *Quand $N = 2$, le procédé décrit dans la proposition 3.1 fournit un unique graphe (à isomorphisme près). De plus, il s'agit d'un immeuble (carré).*

Démonstration. — L'unicité est évidente (voir figure 9).

Notons que ce graphe comporte n sommets de valence m et m sommets de valence n ; donc $n+m$ sommets au total. Aussi, il aura nm arêtes. Il s'agit

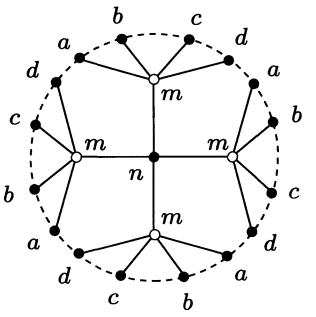

Figure 9.

du graphe bipartite complet à n sommets de valences m, et m de valence n (voir figure 10).

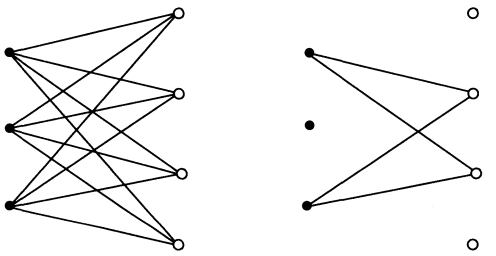

Figure 10.

Un petit cycle est la donnée de deux points quelconques de valence n et de deux autres de valence m (soit un papillon). Il est donc clair que deux arêtes quelconques se trouvent dans un papillon (un appartement). □

Tout ce que nous avons fait jusque là avait pour but de pouvoir définir des objets de dimension deux et de mieux les comprendre.

4. Polyèdres à courbure ≤ 0 de rang 2.

Considérons la réalisation géométrique d'un 2-complexe simplicial fini connexe et équipons chaque face triangulaire d'une métrique euclidienne qui rend les côtés géodésiques et qui donne la même longueur à deux côtés identifiés. La distance sur cet espace sera la distance de longueur associée (*i.e.* la borne inférieure des longueurs des lignes polygonales). Nous conviendrons d'appeler *polyèdre* un tel espace métrique. Donnons quelques

exemples. Un cube, un tétraèdre, mais aussi deux tétraèdres collés suivant une face ou bien un sommet, sont des polyèdres.

Considérons un point d'un polyèdre. Les sphères centrées en ce point sont des graphes, tous isomorphes pour des rayons assez petits. Le graphe métrique obtenu en attribuant à chaque arête la longueur angulaire, sera appelé le *link*. On effacera les sommets de valence 2. Pour donner un exemple, sur le recollement de deux tétraèdres réguliers suivant une face, distinguons divers points et précisons leur link (voir figure 11).

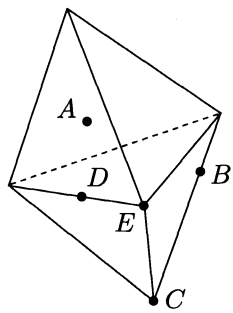

Figure 11.

- En un point comme A ou B, le link est un cercle de longueur 2π.

- Le link en C est un cercle de longueur π. Il s'agit d'une singularité conique de courbure $2\pi - \sum \text{angles} = +\pi$.

- En D la singularité est du type livre. Le link est le graphe où trois arêtes de longueur π relient deux sommets. C'est un immeuble.

- Le link en E n'est pas un immeuble, les arêtes n'ont pas toutes même longueur. Rappelons qu'on a effacé les sommets de valence deux.

Remarque. — Étant donné un graphe fini, sans feuille, on peut réaliser *un morceau* de polyèdre (le voisinage d'un sommet) dont le link en son sommet soit précisément ce graphe. Topologiquement, c'est le cône sur le graphe. Il suffit en fait de recoller des secteurs dont les angles sont les longueurs d'arêtes (qui sont dans l'intervalle $]0, +\infty[$).

Le *lieu singulier* d'un polyèdre est l'ensemble des points au voisinage desquels il n'est pas localement isométrique à un plan euclidien. C'est aussi l'ensemble des points où le link n'est pas un cercle de longueur 2π. Le lieu régulier est le complémentaire.

DÉFINITION 4.1. — *Un polyèdre est* à courbure ≤ 0 et de rang 2 *si les links en chacun de ses points singuliers sont des immeubles métriques.*

En demandant que les links soient connexes, on écarte le cas trivial du recollement de deux polyèdres suivant un point. Par ailleurs, cette définition exclut l'existence de bord, c'est-à-dire d'arête qui ne serait contenue que dans une seule face.

Voyons pourquoi cette définition formalise bien le concept de rang 2 dont on a parlé dans l'introduction. On considère des polyèdres finis sans bord, et la condition (*ample*) sur les links correspond à l'hypothèse de courbure ≤ 0 au sens général (espace CAT(0)). Voilà pour l'analogue de l'hypothèse «*fermée à* $K \leq 0$» sur les variétés. Les géodésiques se prolongent alors indéfiniment et sont caractérisées par le fait que dans le link en un point, le rayon incident et le rayon repartant correspondent à deux points à distance $\geq \pi$. Toujours dans le link en un point, un germe de plat (ou plat local) correspond à un cercle de longueur 2π ; la condition de rang 2 se traduit donc sur les links en ces termes : deux points à distance $\geq \pi$ (*i.e.* germe de géodésique) se trouvent dans un cercle de longueur 2π (*i.e.* un germe de plat).

Donnons quelques exemples.

• Sur deux tores plats, considérons deux géodésiques de même longueur. Puis recollons ces tores suivant ces géodésiques (voir figure 12).

• Considérons une géodésique de longueur 1 sur un tore plat et une autre de longueur 2 sur un autre tore plat. Recollons ces deux tores via un cylindre de circonférence 2 en enroulant deux fois un bout du cylindre sur la géodésique de longueur 1 et une fois l'autre bout sur celle de longueur 2 (voir figure 12).

• Les deux exemples précédents n'ont que des singularités de type livre. Pour le suivant, il n'en est rien. À l'aide de deux paires de géodésiques parallèles, découpons un tore plat en 4 rectangles. Recollons chaque géodésique avec celle qui lui est parallèle. Ainsi, on obtient un polyèdre avec un seul sommet et dont le lieu singulier est un bouquet de 4 cercles (voir figure 13). Le link au sommet singulier est l'immeuble carré T_4. On a donc bien décrit un polyèdre à courbure ≤ 0 de rang 2. Il s'agit en fait du produit de deux 8.

Attention ! Dans le second exemple, il ne faut pas s'égarer et croire qu'à la place du cylindre intermédiaire on aurait tout aussi bien pu mettre un tronc de cône dont un bout aurait eu pour longueur 2 et

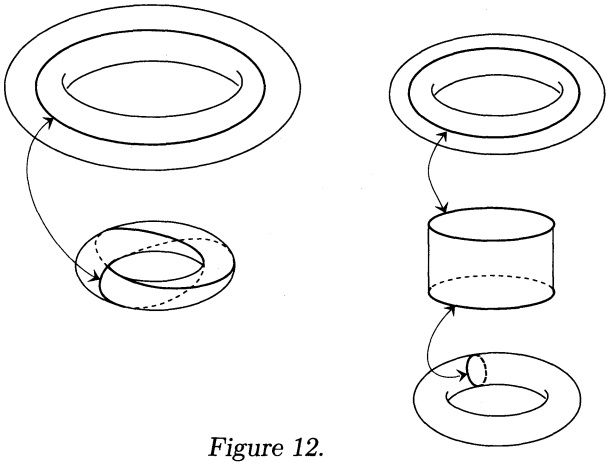

Figure 12.

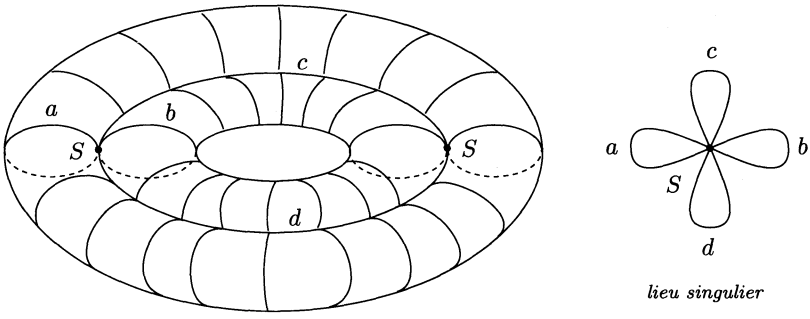

Figure 13.

l'autre 1. Les bords de ce tronc ne sont plus géodésiques ! On sort de notre catégorie des polyèdres. On aurait pu admettre ce genre d'objets dans notre définition d'un polyèdre, mais la condition de rang deux les aurait exclus immédiatement.

Dans ce qui suit, notre but est de classifier les polyèdres à courbure négative ou nulle et de rang 2. Considérons un tel polyèdre. Son lieu singulier, qu'on supposera non vide (on connaît déjà les surfaces fermées plates), est un graphe.

PROPOSITION 4.1. — *Une fois complétée, une composante connexe du lieu régulier est :*

- *ou bien isométrique à un cylindre plat à bords géodésiques*;
- *ou bien isométrique à une bande de Mœbius plate dont le bord est géodésique*;
- *ou bien isométrique à un polygone convexe du plan euclidien.*

Démonstration. — Le complété d'une composante connexe est une surface plate, à bord convexe (on connaît la structure des links). La formule de Gauss-Bonnet nous informe que seulement trois cas sont possibles. Ou bien la surface en question est homéomorphe à un cylindre plat à bords géodésiques, ou bien à une bande de Mœbius plate à bord géodésique, ou bien à un disque plat à bord polygonal. On appellera *face* uniquement une composante de ce dernier type. On verra plus loin (proposition 4.3) que les faces ont au plus quatre sommets. Il sera alors clair qu'elles sont isométriques à des polygones convexes du plan euclidien. □

PROPOSITION 4.2. — *Si le lieu singulier contient un cercle comme composante connexe, alors, le polyèdre n'a pas de face polygonale et n'a que des singularités de type livre.*

Démonstration. — Considérons un cercle qui est une composante du lieu singulier d'un polyèdre à courbure ≤ 0 de rang 2. Le long de ce cercle la singularité est du type livre. En suivant une page en longeant ce cercle, on s'aperçoit qu'elle s'enroule un certain nombre de fois autour. Ainsi, le ε-voisinage de ce cercle singulier s'obtient en recollant un certain nombre de cylindres suivant un de leurs bords.

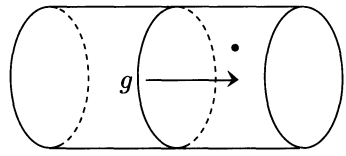

Figure 14.

Considérons une géodésique fermée g sur l'un de ces cylindres (une composante du bord du ε-voisinage) et éloignons-la progressivement du cercle singulier (voir figure 14). Considérons alors un premier point du lieu singulier qu'elle va rencontrer. En ce point, le link ne peut correspondre qu'à une singularité de type livre car il doit comporter une arête de longueur $\geq \pi$. La composante connexe de ce point dans le lieu singulier est donc elle aussi un cercle. En itérant ce procédé, on recouvre tout le polyèdre. □

PROPOSITION 4.3. — *Les faces d'un polyèdre sont ou bien toutes rectangulaires, ou bien toutes des triangles. Dans ce cas, il n'y a que trois triangles possibles (à similitude près) : l'équilatéral, le rectangle isocèle et le demi-équilatéral.*

Démonstration. — On voit facilement, en calculant la somme des angles intérieurs par la formule de Gauss-Bonnet, qu'une face est au plus un quadrilatère et que dans ce cas c'est un rectangle :

$$\frac{\pi}{n_1} + \cdots + \frac{\pi}{n_k} = (k-2)\pi \implies k \leq 4$$

et on ne peut avoir $k = 4$ que si $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$. Aussi, si une face est un rectangle, tous les links aux sommets sont des immeubles carrés et ainsi toutes les faces sont des rectangles.

S'il s'agit de triangles, en résolvant l'équation bien connue

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1,$$

on constate qu'il n'y a que trois types possibles pour chacun des triplets suivants : (3,3,3), (2,4,4) et (2,3,6). Dans le premier cas, il s'agit d'un triangle équilatéral, dans le second d'un triangle rectangle isocèle, et dans le dernier d'une équerre d'écolier (*i.e.* un demi triangle équilatéral). □

À partir de maintenant, nous nous intéresserons au revêtement universel $\widetilde{P}$ d'un polyèdre P à courbure ≤ 0 de rang 2. On appellera *plat* un plongement isométrique du plan euclidien dans $\widetilde{P}$. Puisque $\widetilde{P}$ est un espace complet, simplement connexe et à courbure ≤ 0, c'est un espace de Hadamard. Nous allons utiliser certaines propriétés de ces espaces, en particulier que les géodésiques n'ont pas de self-intersection et que deux géodésiques ne peuvent se couper qu'une seule fois.

THÉORÈME 2 (rang 2 global). — *Dans le revêtement universel d'un polyèdre à courbure ≤ 0 de rang 2, toute géodésique est contenue dans un plat.*

Démonstration. — Compte tenu des propositions précédentes, nous pouvons dorénavant supposer que les faces de notre polyèdre sont des polygones (triangles ou rectangles) du plan euclidien. Dans l'autre cas, le théorème est clair puisque $\widetilde{P}$ est le produit d'un arbre et d'une droite.

Remarquons qu'il y a deux types de géodésiques. Celles qui coupent les arêtes transversalement (cas 1) et les autres (cas 2). En effet, une géodésique

qui coïnciderait avec une arête singulière sur un segment, coïncide en fait tout du long avec des arêtes singulières (en traversant un sommet, elle ne peut repartir que le long d'une arête singulière opposée).

Notre raisonnement se fera en deux étapes et dans chacune, on distinguera les deux cas qu'on vient de séparer. La première associera à une géodésique une bande formée de faces visitées. Dans la seconde, on élargira cette bande pour former un plat.

Étape 1.

Nous allons construire une bande plate contenant la géodésique. Cette construction se fera progressivement en parcourant la géodésique. Les adhérences de toutes les faces qui vont former notre bande auront une intersection non vide avec notre géodésique (elle les visite).

Cas 1) Le seul problème qui se pose dans la construction suggérée par la propriété souhaitée annoncée plus haut, est le passage au travers d'un sommet. La géodésique impose le choix de deux faces opposées, c'est-à-dire deux chambres opposées dans le link. L'une des propriétés des immeubles est que deux chambres opposées se trouvent dans un même appartement et un seul. Ajoutons donc les faces qui composent cet appartement.

Cas 2) Au niveau d'une arête qui est un morceau de la géodésique, prenons deux faces quelconques qui la contiennent. Essayons de prolonger la construction de notre bande voisinage. Traduisons sur le link le problème qui se pose en traversant un sommet : étant donnés deux arêtes C_1 et C_2 ayant A pour sommet commun, et un sommet B opposé à A, y-a-t-il un appartement qui contienne à la fois C_1, C_2 et B ?

LEMME 4.1 (sur les immeubles de dimension 1). — *La réponse à la question précédente est oui.*

Démonstration. — Il y a un appartement Σ_1 (resp. Σ_2) qui contient C_1 (resp. C_2) et B. Dans ces deux appartements, A et B sont bien sûr opposés et les coupent donc en deux moitiés ; si bien que l'appartement formé de la moitié de Σ_1 qui contient C_1 suivie de celle de Σ_2 qui contient C_2 répond à la question (voir figure 15). Ici encore, cet appartement est unique. □

Nous avons déterminé une bande plongée dans $\widetilde{P}$ qui contient la géodésique. C'est une bande d'un des trois pavages réguliers en triangles ou bien d'un quadrillage en rectangles. Son bord est formé de deux lignes polygonales. Un point du bord sera appelé *bosse* (resp. *creux*) si l'angle en

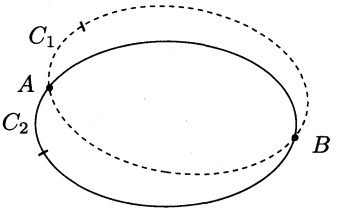

Figure 15.

ce point est $< \pi$ (resp. $> \pi$) ; c'est-à-dire si strictement moins (resp. plus) de N faces viennent se recoller en ce point (voir figure 16).

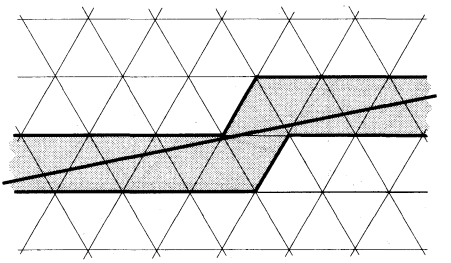

Figure 16.

Étape 2.

Dans cette étape, nous élargissons la bande trouvée dans l'étape précédente. Cette construction sera faite pas à pas en comblant progressivement les creux. Le même raisonnement sera adopté pour les deux composantes de bord. Désormais, on dira le bord pour l'une d'entre elles. Mettons en évidence la propriété fondamentale suivante :

PROPRIÉTÉ 1.

• *En un sommet du bord, ne viennent se recoller qu'au plus* $N + 1$ *faces (s'il y a* $2N$ *chambres par appartement dans le link en ce point).*

• *Sur le bord, deux creux sont toujours séparés par une bosse (il n'y a jamais deux creux qui se suivent).*

Vérifions cette propriété pour la bande initiale. Pour la première partie, il suffit de transporter la géodésique parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle passe par le sommet du bord considéré. Alors, puisque toutes les faces sont visitées, au plus $N + 1$ viennent se recoller en ce point (voir figure 17).

Pour la seconde, supposons que deux creux se suivent. Alors, la

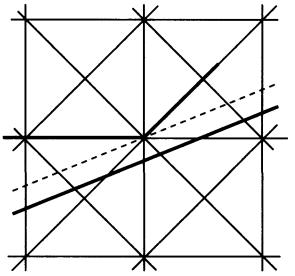

Figure 17.

géodésique ne peut pas visiter les $N+1$ faces de chaque creux (voir figure 18) ; l'une des deux faces grisées ne sera pas visitée.

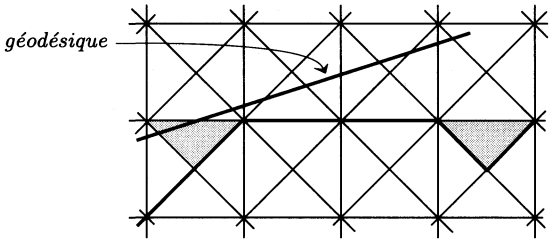

Figure 18.

Le lemme suivant sera fondamental dans notre démarche :

LEMME 4.2 (sur les immeubles de dimension 1). — *Dans un immeuble de dimension un, on peut compléter tout chemin (simple) formé de $N+1$ arêtes en un cycle de longueur 2π.*

Démonstration. — Prenons un sous-chemin de longueur π qui contient les N sommets intérieurs au chemin initial dans son intérieur. On sait que ce chemin se complète en un cycle de longueur 2π. Or ce cycle ne peut que contenir le chemin initial formé des $N+1$ arêtes. Là encore, ce cycle est unique. □

Décrivons maintenant un procédé qui permet d'élargir la bande en comblant les trous. Comme pour l'étape 1, le pas de base consiste à border un sommet du bord par des faces qui auront au moins ce sommet en commun avec la bande. En d'autres termes, on ajoute un morceau de plat contenant ce sommet. Dans le cas où les faces de notre polyèdre sont des rectangles (resp. des triangles équilatéraux), il est très facile d'élargir la bande. Il suffit

d'ajouter des rectangles (resp. des triangles équilatéraux) dans les creux dans un ordre quelconque; on peut le faire grâce au lemme 4.2. Dans la suite, nous supposerons donc que les faces sont ou bien rectangles isocèles ou bien des équerres. Il s'agit maintenant de définir un ordre pour combler les creux. Ayons en tête comme image la figure 19.

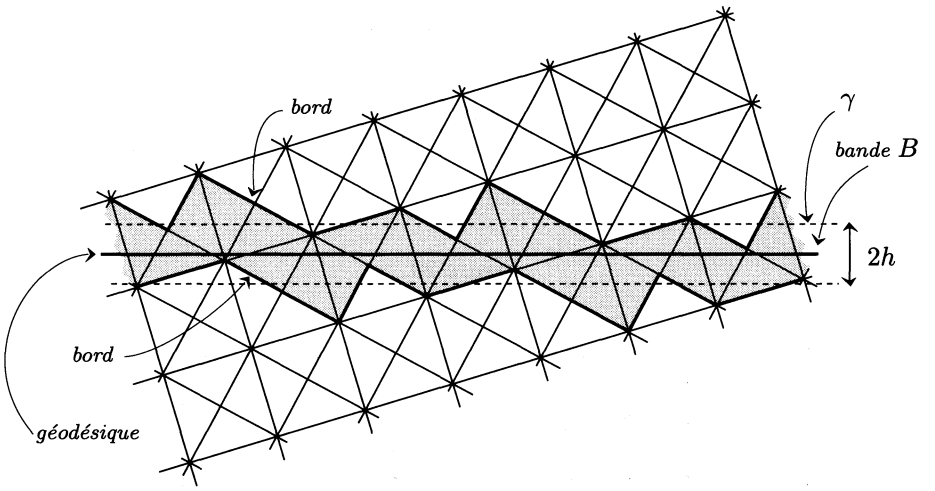

Figure 19.

Distinguons encore deux cas :

Cas 1) Le bord est une droite parallèle à la géodésique. Le lemme 2 nous permet d'ajouter une couche, sommet après sommet. Alors, on considère l'ancien bord comme notre nouvelle géodésique et on reprend notre raisonnement. La propriété fondamentale sera encore satisfaite (voir figure 20).

Cas 2) Le bord présente creux et bosses. Comme dans le cas précédent, en comblant les creux d'une manière qu'on va définir, on pourra remplacer notre géodésique par une autre, parallèle et à une distance h que l'on va déterminer en fonction du type de faces.

Dans le cas des équerres, h est la plus courte des hauteurs (issues des sommets marqués) des trois triangles grisés (voir figure 21). Ils correspondent aux trois creux possibles dans un tel pavage. Dans le cas des rectangles isocèles, il n'y a que deux triangles à considérer, h est encore la plus courte des deux hauteurs.

Soit B la bande fermée du plan de largeur h bordée d'un côté par la géodésique, de l'autre par une parallèle γ , du côté du bord qui nous

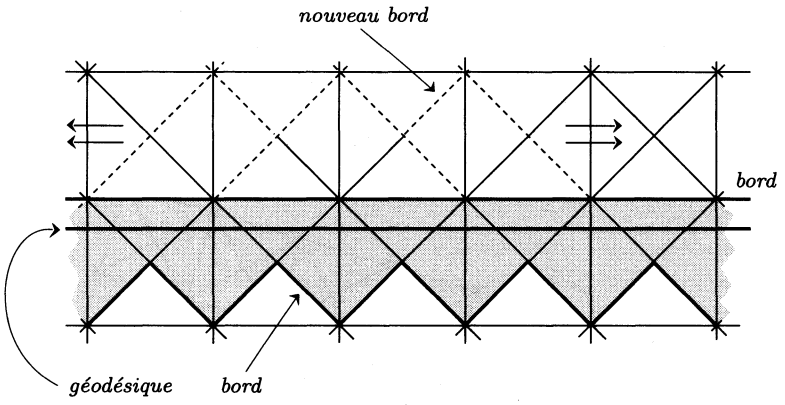

Figure 20.

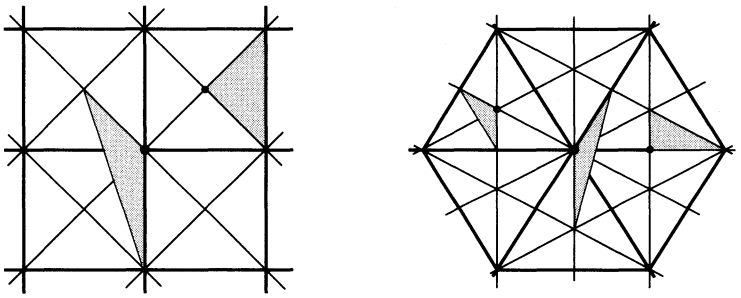

Figure 21.

occupe. Vérifions les deux points suivants (voir figure 19) :

- les bosses se trouvent hors de B ;
- l'un des deux sommets voisins d'un creux se trouve hors de B.

Pour le voir, il suffit de constater que la largeur h a été choisie pour cela ; la bande est suffisamment fine.

Pour chaque creux dans B, opérons comme suit : tout d'abord, ajoutons $(N-1)$ triangles autour du creux pour former un plat local ; ensuite, on en fait de même avec le nouveau creux éventuellement créé dans la bande B (c'est-à-dire le sommet voisin qui serait dans B).

Les opérations sur les creux n'interfèrent pas entre-elles. La droite γ se trouve alors à l'intérieur de notre nouvelle bande. De plus, les adhérences de toutes les faces que nous avons ajoutées ont un intersection non vide

avec γ. Il en est donc de même pour toutes les adhérences des faces qui touchent le bord. Considérons donc γ comme notre nouvelle géodésique. La propriété fondamentale sera bien sûr encore vérifiée.

Ainsi la bande s'élargit d'une longueur h après chaque étape. On définit bien par ce procédé un plat. □

Remarque sur l'unicité. — Les seules géodésiques qui ne soient pas contenues dans un *unique* plat sont les parallèles aux directions du pavage. Nous l'avons remarqué au cours des lemmes précédents, mais on peut le voir autrement : un convexe du plan qui contient une droite D est nécessairement une bande dont les bords sont des droites parallèles à D (ou bien la droite D elle-même). Et on sait que l'intersection de deux plats est convexe, puisque l'intersection de deux convexes.

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème de classification.

THÉORÈME 3. — *Les polyèdres à courbure* ≤ 0 *de rang* 2 *se classent en deux catégories* :

(1) (*cas non irréductible*)

a) *Les* cylindres plats ou bandes de Mœbius *recollés suivant leurs bords. Le lieu singulier est alors une union de cercles disjoints dont les longueurs sont en rapports rationnels. Les singularités sont de type livre. Le revêtement universel est le produit d'un arbre et d'une droite.*

b) *Les recollements de* rectangles *suivant leurs bords. Chaque arête de rectangle est singulière, chaque sommet est singulier. Les links en chaque sommet sont des immeubles carrés. Le revêtement universel est le produit de deux arbres.*

(2) (*cas irréductible*) *Les recollements de* triangles *tous isométriques suivant leurs bords. Il y a trois types de triangles possibles* :

a) *équilatéral,*

b) *rectangle isocèle,*

c) *équerre* $(2, 3, 6)$.

Comme dans le point précédent, chaque arête et chaque sommet sont singuliers. Les links en chacun des sommets sont des immeubles métriques avec (*suivant les cas et les sommets*) :

a) $N = 3$,

b) $N = 2$ *ou* $N = 4$,

c) $N = 2, 3$ *ou* 6.

De plus, pour cette catégorie, le revêtement universel est un immeuble euclidien de dimension 2 *(au sens de Tits).*

Démonstration. — D'après les propositions 4.2 et 4.3, on sait que si on ne se trouve pas dans la catégorie 1 a), le polyèdre à courbure ≤ 0 de rang 2 est le recollement de faces ou bien toutes rectangulaires, ou bien de l'un des trois types a), b) ou c). Les parties 1 a) et 1 b) du théorème sont maintenant claires (le fait que le revêtement universel soit un produit de deux arbres provient du théorème 2). Plaçons-nous dans le cas de faces triangulaires. Considérons en deux distinctes. Il y a une géodésique qui les visite toutes les deux et d'après le théorème 2, cette géodésique est contenue dans un plat qui se trouve pavé par des faces du polyèdre. Les deux faces considérées étaient donc isométriques et par suite, toutes les faces sont isométriques.

Dans l'énoncé, on précise que les sommets et arêtes sont singuliers, c'est un corollaire de la notion de face. Pour finir, il nous faut vérifier que le revêtement universel est bien un immeuble euclidien. Bien sûr, la famille d'appartements sera formée par tous les plats. Vérifions les trois axiomes des immeubles (voir [Bro]).

1) Les appartements sont des systèmes de Coxeter, on vient de le voir.

2) Par deux faces (*i.e.* chambres) quelconques passe une géodésique, elle-même contenue dans un plat (rang 2 global). Deux chambres sont donc bien contenues dans un même appartement.

3) Comme un plat est convexe, l'intersection de deux plats l'est aussi. Donc, il existe toujours un isomorphisme de complexes qui envoie un plat sur un autre en fixant l'intersection, point par point.

Ici se termine la démonstration du théorème. □

BIBLIOGRAPHIE

[BB] W. BALLMANN, M. BRIN, Orbihedra of nonpositive curvature, preprint.

[Bro1] K.S. BROWN, Buildings, Springer-Verlag, New York, 1989.

[Bro2] K.S. BROWN, Five lectures on buildings, Congrès de Trieste 1990.

[BBE] W. BALLMANN, M. BRIN, P. EBERLEIN, Structure of manifolds of nonpositive curvature. I, Annals of Mathematics, 122 (1985), 171–203.

[BBS] W. BALLMANN, M. BRIN, R. SPATZIER, Structure of manifolds of nonpositive curvature. II, Annals of Mathematics, 122 (1985), 205–235.

[BurS] K. BURNS, R. SPATZIER, Manifolds of nonpositive curvature and their buildings, Publications Mathématiques de l'IHES, n° 65, 1987.

[BBuy] W. BALLMANN, S. BUYALO, Nonpositive Curved Metrics on 2–Polyedra, Bonn, février 1994.

[BH] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, livre en préparation.

Manuscrit reçu le 24 octobre 1994,
accepté le 19 mai 1995.

Sylvain BARRÉ,
École Normale Supérieure de Lyon
UMR 128 CNRS
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France).
e–mail : sbarre@umpa.ens–lyon.fr.