ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DEHBIA ACHAB

Représentations des algèbres de rang 2 et fonctions zêta associées

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 2 (1995), p. 437-451

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_2_437_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 2 (1995), 437-451

REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE RANG 2 ET FONCTIONS ZÊTA ASSOCIÉES

par Dehbia ACHAB

0. Introduction.

Dans un travail précédent (cf. [1], [2]), nous avons défini et étudié les fonctions zêta des représentations des algèbres de Jordan euclidiennes déployées, pour lesquelles nous avons démontré la convergence dans un demi-plan, établi un prolongement analytique et une équation fonctionnelle scalaire.

De manière plus précise, soient V une algèbre de Jordan euclidienne simple de rang m et de dimension n, E un espace euclidien de dimension N, ϕ une représentation auto-adjointe de V dans E, Ω le cône symétrique associé à V, et $G(\Omega)$ le groupe des automorphismes du cône, c'est-à-dire

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) \mid g(\Omega) = \Omega\}.$$

Soit Q la forme quadratique vectorielle associée à ϕ, déterminée par

$$< Q(\xi), x >= (\phi(x)\xi \mid \xi) \quad \forall \xi \in E, \forall x \in V.$$

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) : V, E et ϕ sont définis sur $\mathbf{Q}$,

Mots-clés : Algèbres de Jordan – Algèbres de Clifford – Groupe arithmétique – Fonctions zêta.
Classification math : 20.

(H_2) La $\mathbf{Q}$-structure $V_{\mathbf{Q}}$ de V est déployée, c'est-à-dire qu'il existe un système complet de m idempotents primitifs deux à deux orthogonaux dans $V_{\mathbf{Q}}$.

Soit $F(\phi)$ le groupe algébrique défini par

$$F(\phi) = \{h \in GL(E) \mid \exists \rho(h) \in G(\Omega) \mid Q(h\xi) = \rho(h)Q(\xi) \forall \xi \in E\}.$$

Alors $\rho : F(\phi) \to G(\Omega)$ est un morphisme de groupes algébriques dont l'image est notée $G(\phi)$ (cf. [1], chapitre 1). L étant un réseau dans $E_{\mathbf{Q}}$, soit Γ_o le sous-groupe arithmétique de $F(\phi)$ défini par

$$\Gamma_o = \{\gamma \in F(\phi) \mid \gamma(L) = L\}.$$

La fonction zêta ζ_L associée à la représentation ϕ et au réseau L a été définie (dans [1], chapitre 1) par

$$\zeta_L(s) = \sum_{l \in \Gamma_o \backslash L'} \det(Q(l))^{-s} \quad s \in \mathbf{C},$$

où $L' = \{l \in L \mid \det(Q(l)) \neq 0\}$.

Si $\widetilde{\Gamma_o}$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_o, on peut aussi considérer la fonction zêta

$$\widetilde{\zeta_L}(s) = \sum_{l \in \widetilde{\Gamma_o} \backslash L'} \det(Q(l))^{-s} \quad s \in \mathbf{C}.$$

Les séries zêta ci-dessus convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s) > \dfrac{N}{2m}$ (cf. [1], chapitre 1), admettent un prolongement analytique en tant que fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$, et vérifient une équation fonctionnelle (cf. [1], chapitre 2).

Ces fonctions zêta ont déjà été étudiées dans les cas où $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbf{R})$ (fonction zêta de Kœcher, cf. [6]) et $V = \mathrm{Herm}(m, \mathbf{H})$ (cf. [7]).

L'objet de cet article est l'étude explicite du cas d'une algèbre de Jordan de rang 2 qui donne lieu à de nouvelles fonctions zêta. Nous allons notamment décrire les groupes $F(\phi)$ et $G(\phi)$.

1. Préliminaires.

a) Algèbres de Clifford.

Soit U un espace vectoriel réel de dimension finie n muni d'une forme quadratique non dégénérée F, soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base orthogonale pour F. On désigne par $T(U)$ l'algèbre tensorielle de U, et par $\mathcal{I}$ l'idéal de $T(U)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x - F(x)$.

L'algèbre quotient $C(F) = T(U)/\mathcal{I}$ s'appelle l'algèbre de Clifford de F.

On a une injection canonique de U dans $C(F)$. On sait que l'algèbre de Clifford $C(F)$ est l'algèbre associative engendrée par $e_1, \ldots, e_n$, sujette aux relations

$$e_j e_k + e_k e_j = 0 \quad 1 \leq j, k \leq n \quad j \neq k$$

$$e_j^2 = F(e_j) \cdot 1 \quad \forall j, 1 \leq j \leq n.$$

Pour une partie H de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose

$$e_H = e_{h_1} \ldots e_{h_q} \quad \text{où} \quad H = \{h_1, \ldots, h_q \mid h_1 < \ldots < h_q\}$$

avec $e_\varnothing = 1$. On démontre que les 2^n éléments e_H forment une base de $C(F)$ (comme espace vectoriel réel).

Dans $C(F)$, on a trois involutions :

i) $'$ définie par : $e_\nu \mapsto -e_\nu \quad 1 \leq \nu \leq n$, appelée automorphisme principal.

ii) $*$ définie par : $e_{\nu_1} \ldots e_{\nu_k} \mapsto e_{\nu_k} \ldots e_{\nu_1}$, appelée antiautomorphisme principal.

iii) $\bar{}$ définie par : $\bar{a} = (a')^* = (a^*)' \quad \forall a \in C(F)$, appelée involution principale.

Les éléments de $C(F)$ de la forme $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$ (où $e_0 = 1$) sont appelés vecteurs.

Dans toute la suite on suppose F définie positive et on s'intéresse aux algèbres de Clifford associées à F et $-F$,

$$\mathcal{C}_n^+ = C(F), \quad \mathcal{C}_n^- = C(-F).$$

Remarquons que

i) $\mathcal{C}_n^+$ est l'algèbre associative engendrée par $e_1, \ldots, e_n$ sujette aux relations

$$e_j^2 = 1 \quad 1 \leq j \leq n \text{ et } e_j e_k + e_k e_j = 0, \quad k \neq j.$$

ii) $\mathcal{C}_n^-$ est l'algèbre associative engendrée par $f_1, \ldots, f_n$, sujette aux relations

$$f_j^2 = -1 \quad 1 \leq j \leq n \text{ et } f_j f_k + f_k f_j = 0, \quad k \neq j.$$

L'espace des vecteurs de $\mathcal{C}_n^{\pm}$ sera noté V_n.

Pour tout entier $1 \leq p \leq n$, on notera V_p l'espace des vecteurs de l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}_p^{\pm} = C(F_p)$, où F_p est la restriction de F au sous-espace U_p de U, qui est engendré par $e_1, \ldots, e_p$.

Un élément a de $\mathcal{C}_n^-$ est dit *transformateur* si pour tout x dans V_n, il existe y dans V_n tel que $ax = ya'$. Tout vecteur est transformateur et tout produit de transformateurs est un transformateur. Si a est un transformateur, alors le nombre $N(a) = a\bar{a}$ est un réel positif et $N(a) = 0$ si et seulement si $a = 0$. De plus, tout transformateur a de $\mathcal{C}_n^-$ se décompose comme suit en produit de vecteurs

$$a = a_1 a_2 \ldots a_n \text{ où } a_p \in V_p \text{ pour tout } p, \ 1 \leq p \leq n$$

(cf. [8]).

b) Algèbres de Jordan euclidiennes de rang 2.

U étant comme ci-dessus, soit $V_n = \mathbf{R} \oplus U$ et notons B la forme bilinéaire associée à F. Sur V_n, on considère les produits suivants :

$$(\lambda, u) \circ (\mu, v) = (\lambda\mu + B(u, v), \lambda v + \mu u);$$

$$< (\lambda, u); (\mu, v) >= \lambda\mu + B(u, v).$$

Munie de ces deux produits, V_n est une algèbre de Jordan euclidienne de rang 2, de dimension $n + 1$ dont l'unité est $e = (1, 0)$ (cf. [3], [5]).

2. Construction d'une représentation de V_n dans $\mathcal{C}_n^+$.

Pour tout $\xi_- = \Sigma_H \xi_H f_H$ dans $\mathcal{C}_n^-$, on associe canoniquement l'élément $\xi_+ = \Sigma_H \xi_H e_H$ de $\mathcal{C}_n^+$.

On peut alors réaliser l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}_n^+$ comme l'espace E des matrices

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha_- & \beta_- \\ \beta'_- & \alpha'_- \end{pmatrix} \quad \alpha_-, \beta_- \in \mathcal{C}_{n-1}^-$$

($\mathcal{C}_{n-1}^-$ étant la sous-algèbre de $\mathcal{C}_n^-$ engendrée par $f_1, \ldots, f_{n-1}$).

L'isomorphisme linéaire entre $\mathcal{C}_n^+$ et E est défini par

$$\Psi : E \to \mathcal{C}_n^+$$
$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha_- & \beta_- \\ \beta'_- & \alpha'_- \end{pmatrix} \mapsto \alpha_+ + \beta_+ e_n.$$

L'algèbre de Jordan $V = V_n$ est l'espace des vecteurs de $\mathcal{C}_n^+$, c'est-à-dire les x de la forme $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$. Pour tout x dans V, notons $\hat{x}$ l'élément de E de la forme

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 + x_2 f_1 + \ldots + x_n f_{n-1} \\ x_1 - x_2 f_1 - \ldots - x_n f_{n-1} & x_0 \end{pmatrix}$$

la correspondance $x \mapsto \hat{x}$ est un isomorphisme.

Soit ϕ l'application définie par

$$\phi : V \to \mathrm{End}(E)$$
$$x \mapsto \phi(x) : \xi \mapsto \hat{x}\xi$$

où $\hat{x}\xi$ est le produit matriciel des éléments de E.

2.1. Proposition. — *ϕ est une représentation de l'algèbre de Jordan V dans E.*

Preuve. — Il est clair que ϕ est linéaire. Soient $x, y \in V$, vérifions que

$$\phi(xy) = \frac{1}{2}(\phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x)).$$

Cela revient à montrer que

$$\widehat{xy} = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})$$

ce qui est vrai car, si $x = (x_0, u)$ et $y = (y_0, v)$ où $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on a

$$xy = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i, x_0 v + y_0 u \right)$$

et alors

$$\begin{aligned} \widehat{xy} &= \frac{1}{2}\left(\widehat{x}\widehat{y} + \widehat{y}\widehat{x}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_- & \beta_- \\ \beta'_- & \alpha'_- \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\alpha_- = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$, $\beta_- = (x_0 y_1 + y_0 x_1) + \ldots + (x_0 y_n + y_0 x_n) f_{n-1}$.

(Le produit des coefficients des matrices de E étant celui de $\mathcal{C}_{n-1}^{-}$.)

□

Pour tout $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_{n-1}^{-}$, on pose

$$\tilde{\xi} = \bar{\xi}^t = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta}' \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}' \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que pour $\xi, \eta \in E$, on a $\widetilde{(\xi\eta)} = \tilde{\eta}\tilde{\xi}$ et alors l'application $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ est un antiautomorphisme de E.

Pour tout $\xi = \sum \xi_H e_H$, ou $\xi = \sum \xi_H f_H$ on note $\mathrm{Re}(\xi) = \xi_\varnothing$.

On considère sur E le produit scalaire

$$(\xi \mid \eta) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}(\xi\tilde{\eta}).$$

Vérifions que c'est effectivement un produit scalaire. Il est clair que c'est une forme bilinéaire. Elle est symétrique car

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\xi\tilde{\eta})) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\widetilde{\eta\tilde{\xi}})) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\eta\tilde{\xi})).$$

Elle est définie positive car

$$(\xi \mid \xi) = \mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})$$

$$f'_H = (-1)^{|H|} f_H \text{ et } f^*_H = (-1)^{\frac{|H|(|H|-1)}{2}} f_H$$

donc

$$\bar{f}_H = (-1)^{\frac{|H|(|H|+1)}{2}} f_H$$

si $\alpha = \sum \alpha_H f_H$ est dans $\mathcal{C}_{n-1}^-$, alors $\bar{\alpha} = \sum \alpha_H (-1)^{\frac{|H|(|H|+1)}{2}} f_H$ et alors

$$\mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha}) = \sum \alpha_H^2. \qquad \square$$

2.2. PROPOSITION. — *La représentation ϕ est autoadjointe pour ce produit scalaire.*

Preuve. — Montrons d'abord que pour $\xi, \eta \in E$, on a

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\xi\eta)) = \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\eta\xi));$$

en effet, si $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu' & \lambda' \end{pmatrix}$, alors

$$\mathrm{Tr}(\xi\eta) = \alpha\lambda + \beta\mu' + \beta'\mu + \alpha'\lambda' \text{ et } \mathrm{Tr}(\eta\xi) = \lambda\alpha + \mu\beta' + \mu'\beta + \lambda'\alpha'.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathrm{Re}(\lambda\alpha) = \mathrm{Re}(\alpha\lambda), \forall \lambda, \alpha \in \mathcal{C}_{n-1}^-$, ce qui est vrai car si $\alpha = \sum \alpha_H f_H$ et $\lambda = \sum \lambda_H f_H$, alors

$$\mathrm{Re}(\alpha\lambda) = \sum \alpha_H \lambda_H = \mathrm{Re}(\lambda\alpha).$$

Montrons maintenant que la représentation est auto-adjointe, en effet

$$\begin{aligned}(\phi(x)\xi \mid \eta) &= \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\hat{x}\xi\tilde{\eta}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\xi\tilde{\eta}\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\xi\widetilde{(\hat{x}\eta)}) = (\xi \mid \phi(x)\eta). \qquad \square\end{aligned}$$

Revenons au produit scalaire sur V : pour $x, y \in V$ on a $< x, y >= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$. On vérifie facilement que

$$< x, y >= (\hat{x} \mid \hat{y}) \text{ pour tout } x, y \in V.$$

Soit Q la forme quadratique vectorielle associée à ϕ; $Q : E \to V$ est déterminée par

$$< Q(\xi), x >= (\phi(x)\xi \mid \xi) \forall x \in V, \xi \in E.$$

Or

$$< Q(\xi), x >= (\widehat{Q(\xi)} \mid \hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\widehat{Q(\xi)}\hat{x})$$

et

$$(\phi(x)\xi \mid \xi) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\hat{x}\xi\tilde{\xi}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\xi\tilde{\xi}\hat{x}).$$

Ceci ne nous permet pas de conclure que $\widehat{Q(\xi)} = \xi\tilde{\xi}$ pour tout ξ dans E car $\xi\tilde{\xi}$ n'est pas toujours un vecteur de $\mathcal{C}_n^+$.

Notons $\mathrm{Vect}(\eta)$ la partie vecteur pour tout η dans $\mathcal{C}_n^{\pm}$ et soit p la projection de E sur V définie par :

Pour tout $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ dans E, on lui associe $p(\xi)$ dans V tel que

$$\widehat{p(\xi)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\alpha) & \mathrm{Vect}(\beta) \\ \overline{\mathrm{Vect}(\beta)} & \mathrm{Re}(\alpha) \end{pmatrix}$$

alors

$$Q(\xi) = p(\xi\tilde{\xi}).$$

3. Le groupe F_n.

Dans ce qui suit, nous explicitons le sous-groupe arithmétique associé à ϕ et à un réseau L de E.

Nous commençons d'abord par décrire les groupes $F(\phi)$ et $G(\phi)$ définis dans l'introduction.

3.1. Proposition. — *L'ensemble F_n des matrices*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \text{ transformateurs dans } \mathcal{C}_{n-1}^- \text{ tels que}$$

$$\beta\bar{\alpha}' \in V_{n-1} \text{ et } N(\alpha) - N(\beta) \neq 0$$

est un groupe. Il est engendré par les $\phi(x)$, x inversible dans V.

Preuve. — Remarquons d'abord que si $\beta\bar{\alpha}' \in V_{n-1}$, alors son conjugué $\alpha'\bar{\beta} \in V_{n-1}$ et alors l'image de ce dernier par $'$, $\alpha\bar{\beta}' \in V_{n-1}$.

D'autre part, si $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$ est dans V_n, alors x est inversible si et seulement si

$$q(x) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 \neq 0.$$

Soit $x \in V_n$ inversible, alors $\hat{x}$ appartient à F_n, en effet

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} \text{ telle que } \alpha = x_0 \text{ et } \beta = x_1 + x_2 e_1 + \ldots + x_n e_{n-1}.$$

Il est clair que $\beta\alpha^* \in V_{n-1}$. De plus

$$N(\alpha) - N(\beta) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 \neq 0 \text{ car } x \text{ est inversible.}$$

Soient maintenant $x, y \in V$ inversibles et montrons que $\hat{x}\hat{y} \in F_n$; en effet,

$$\hat{x}\hat{y} = \begin{pmatrix} x_0 & \underline{x} \\ \bar{\underline{x}} & x_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 & \underline{y} \\ \bar{\underline{y}} & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix},$$

tels que

$$\underline{x} = x_1 + \ldots + x_n f_{n-1}, \alpha = x_0 y_0 + \underline{x}\bar{\underline{y}}, \beta = x_0 \underline{y} + y_0 \underline{x}.$$

Vérifions que $\alpha\beta^* \in V_{n-1}$; en effet

$$\alpha\beta^* = x_0^2 y_0 \underline{y} + x_0 y_0^2 \underline{x} + x_0 \underline{x}\bar{\underline{y}}\underline{y} + y_0 \underline{x}\bar{\underline{y}}\underline{x},$$

il est clair que les trois premiers termes sont dans V_{n-1}, quant au dernier, il existe z dans V_{n-1} tel que $y_0 \underline{x}\bar{\underline{y}}\underline{x} = y_0 z \underline{x}'\underline{x}$ et appartient donc à V_{n-1}.

De plus, on montre que

$$N(\alpha) - N(\beta) = (x_0^2 - N(\underline{x}))(y_0^2 - N(\underline{y}) = q(x)q(y) \neq 0.$$

Nous allons maintenant montrer que si $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} \in F_n, x \in V_n$ inversible, alors $\hat{x}\xi \in F_n$. En effet,

$$\hat{x}\xi = \begin{pmatrix} x_0 & \underline{x} \\ \bar{\underline{x}} & x_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu' & \lambda' \end{pmatrix}$$

tels que $\lambda = x_0\alpha + \underline{x}\beta'$ et $\mu = x_0\beta + \underline{x}\alpha'$.

Il est clair que μ et λ sont des transformateurs de $\mathcal{C}_{n-1}^-$, montrons que $\mu\lambda^* \in V_{n-1}$. En effet,

$$\mu\lambda^* = x_0^2\beta\alpha^* + x_0 N(\beta)\underline{x} + x_0\underline{x}N(\alpha) + \underline{x}\alpha'\bar{\beta}\underline{x}$$

les trois premiers termes sont dans V_{n-1} car $\beta\alpha^*$ et $\underline{x}$ le sont, quant au dernier terme, comme $\alpha'\bar{\beta}$ est dans V_{n-1}, alors il existe y dans V_{n-1} tel que $\underline{x}\alpha'\bar{\beta}\underline{x} = N(\underline{x})y$ et appartient donc à V_{n-1}.

De plus, en utilisant le fait que $\alpha\bar{\beta}' = \beta\bar{\alpha}'$ et $\beta'\bar{\alpha} = \alpha'\bar{\beta}$, on montre que

$$N(\lambda) - N(\mu) = (x_0^2 - N(\underline{x}))(N(\alpha) - N(\beta)) = q(x)(N(\alpha) - N(\beta)) \neq 0.$$

Nous avons donc montré que le groupe engendré par les $\phi(x), x$ inversible dans V, est contenu dans F_n. Il reste à montrer que tout ξ de F_n s'écrit comme produit d'un nombre fini de $\hat{x}, x$ inversible dans V.

Pour cela, nous allons utiliser le fait que tout transformateur a de $\mathcal{C}_{n-1}^-$ se décompose $a = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ où $a_p \in V_p$, pour tout $1 \leq p \leq n-1$.

On a : $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ et $\beta = \beta_1 \dots \beta_{n-1}$ tels que $\alpha_p, \beta_p \in V_p$. Donc $\alpha = a\alpha_{n-1}$ et $\beta = b\beta_{n-1}$ où $a, b \in T_{n-2}^-$ (T_n^- désignant l'ensemble des transformateurs de $\mathcal{C}_n^-$).

Comme $N(\alpha) - N(\beta) \neq 0$, alors $N(\alpha)$ et $N(\beta)$ ne sont pas simultanément nuls.

1) si $N(\alpha) \neq 0$, comme $N(\alpha) = N(a)N(\alpha_{n-1})$ alors $N(a)$ et $N(\alpha_{n-1})$ sont non nuls. De plus,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{N(\alpha)}\bar{\alpha}\beta \\ \dfrac{1}{N(\alpha)}\bar{\alpha}'\beta' & 1 \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \alpha_{n-2} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_{n-2} \end{pmatrix}$.

On a donc montré, dans le cas où $N(\alpha) \neq 0$, que l'élément $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ de F_n est dans le groupe engendré par les $\phi(x), x \in V$, inversible.

2) Si $N(\alpha) = 0$, alors $\alpha = 0$ et notre matrice s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix}$, avec $N(\beta) \neq 0$. On a

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta'_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{pmatrix} \in F_{n-1}.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. □

Le groupe F_n opère sur E par multiplication à gauche

$$\xi \mapsto g\xi \quad \forall g \in F_n, \quad \xi \in E.$$

On a

$$\forall g \in F_n, \ \exists\, \rho(g) \in G(\Omega) \ \text{ tel que } \ Q(g\xi) = \rho(g)Q(\xi), \quad \forall \xi \in E$$

Ω désignant le cône symétrique associé à l'algèbre de Jordan V, c'est-à-dire le cône de Lorentz et $G(\Omega)$ étant le groupe des automorphismes du cône défini dans l'introduction.

Pour $g \in F_n, \rho(g)$ opère sur V par

$$x \mapsto g\hat{x}\tilde{g} \ \text{ pour tout } \ x \text{ dans } V;$$

en effet, pour tout x dans V et tout ξ dans E, on a

$$(\widehat{Q(g\xi)} \mid \hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\widehat{Q(\xi)}\hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\hat{x}g\xi\tilde{\xi}\tilde{g})$$

$$(g\widehat{Q(\xi)}\tilde{g} \mid \hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(g\widehat{Q(\xi)}\tilde{g}\hat{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\widehat{Q(\xi)}\tilde{g}\hat{x}g)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(\xi\tilde{\xi}\tilde{g}\hat{x}g) = \frac{1}{2}\mathrm{ReTr}(g\xi\tilde{\xi}\tilde{g}\hat{x})$$

ce qui implique que $(\widehat{Q(g\xi)} \mid \hat{x}) = (g\widehat{Q(\xi)}\tilde{g} \mid \hat{x})$ et alors $\widehat{Q(g\xi)} = g\widehat{Q(\xi)}\tilde{g}$.

Notons G_n le sous-groupe de F_n formé des $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ tels que $N(\alpha) - N(\beta) = 1$. On sait, (cf. [8]), que le groupe G_n est un revêtement à deux feuillets du groupe orthochrone $SO_\circ(1,n)$ et $\rho(G_n) = SO_\circ(1,n)$.

Pour tout $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ dans F_n, notons $\Delta(g) = N(\alpha) - N(\beta)$. Si F_n^+ désigne le sous-groupe de F_n formé des g tels que $\Delta(g) > 0$, alors tout g dans F_n^+ s'écrit $g = \Delta(g)^{\frac{1}{2}}\, g_1$ où g_1 est dans G_n. Par suite, si on note $\rho(g)$ la transformation de V qui à x dans V associe y dans V tel que $\hat{y} = g\hat{x}\tilde{g}$, on montre que pour tout g dans $F_n^+, \rho(g)$ appartient à $G(\Omega)$, car

$$G(\Omega) = \mathbf{R}_+^* \times \Lambda_{n+1} \text{ où } \Lambda_{n+1} = SO_\circ(1,n) \cup hSO_\circ(1,n)$$

h étant la matrice diagonale d'ordre $n+1$ dont les n premiers termes sont égaux à 1 et le dernier à -1. Remarquons que h conserve le cône de Lorentz, et $\mathrm{Det}(h) = -1$.

La composante connexe $G(\Omega)^\circ$ de l'identité de $G(\Omega)$ s'écrit

$$G(\Omega)^\circ = \mathbf{R}_+^* \times SO_\circ(1,n).$$

Nous avons donc

$$\rho(F_n^+) = G(\Omega)^\circ$$

et d'après la théorie générale (cf. [1] chapitre 1), on a montré que si $F(\phi)^\circ$ est la composante connexe de l'identité de $F(\phi)$ (pour la topologie usuelle), alors

$$\rho(F(\phi)^\circ) = G(\Omega)^\circ$$

donc

$$\rho(F_n^+) = \rho(F(\phi)^\circ).$$

Nous avons déjà vu que pour tout g dans F_n^+, il existe $\rho(g)$ dans $G(\Omega)$, opèrant sur V comme ci-dessus, tel que

$$Q(g\xi) = \rho(g)Q(\xi) \text{ pour tout } \xi \text{ dans } E.$$

Le groupe F_n^+ est donc contenu dans le groupe $F(\phi)$.

3.2. Proposition. — *Le noyau* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *du morphisme* $\rho : F(\phi) \to G(\Omega)$, *est un sous-groupe du groupe orthogonal* $O(E)$ *et* $F(\phi)^\circ$ *s'écrit*

$$F(\phi)^\circ = F_n^+ K \text{ où } K \text{ est un sous-groupe fermé de } \mathrm{Ker}(\rho).$$

Par suite, si L *est un réseau de* E, *alors le sous-groupe* $\widetilde{\Gamma_\circ}$ *de* F_n^+ *défini par*

$$\widetilde{\Gamma_\circ} = \{\gamma \in F_n^+ \mid \gamma(L) = L\}$$

est d'indice fini dans $\Gamma_\circ = \{\gamma \in F(\phi) \mid \gamma(L) = L\}$.

Preuve. — Soit g tel que $\rho(g) = \mathrm{id}$, alors $Q(g\xi) = Q(\xi)$ pour tout ξ dans E, donc

$$\mathrm{ReTr}(g\xi\tilde{\xi}\tilde{g}) = \mathrm{ReTr}(\xi\tilde{\xi})$$

ce qui implique

$$(g\xi \mid g\xi) = (\xi \mid \xi) \text{ pour tout } \xi \text{ dans } E$$

g est donc bien dans le groupe orthogonal $O(E)$.

Comme $\rho(F(\phi)^\circ) = \rho(F_n^+)$, alors les quotients $F(\phi)^\circ/F(\phi)^\circ \cap \mathrm{Ker}(\rho)$ et $F_n^+/F_n^+ \cap \mathrm{Ker}(\rho)$ sont isomorphes. Par suite, comme le noyau $\mathrm{Ker}(\rho)$ est compact, alors $\widetilde{\Gamma}_\circ$ est d'indice fini dans le sous-groupe

$$\Gamma_1 = \{\gamma \in F(\phi)^\circ \mid \gamma(L) = L\}.$$

De plus, comme $F(\phi)$ est un groupe algébrique (cf. [1] chapitre 1), alors, d'après un théorème de Whitney, il admet un nombre fini de composantes connexes pour la topologie usuelle, il s'ensuit que $F(\phi)^\circ$ est d'indice fini dans $F(\phi)$ et alors Γ_1 (donc $\widetilde{\Gamma_\circ}$) est d'indice fini dans $\Gamma_\circ$. En effet, notons $h_1, \ldots, h_k$ un système de représentants de $F(\phi)/F(\phi)^\circ$ et soit $\gamma \in \Gamma_\circ$.

Si γ est dans $F(\phi)^\circ$ alors $\gamma \in \Gamma_1$ et alors $\gamma\Gamma_1 = \Gamma_1$.

Si γ est dans un certain $h_iF(\phi)^\circ$ alors il existe $\gamma_i \in F(\phi)^\circ$ tel que $\gamma = h_i\gamma_i$. Alors

$$\Gamma_\circ/\Gamma_1 = \{\Gamma_1, h_1\gamma_1\Gamma_1, \ldots, h_k\gamma_k\Gamma_1\};$$

en effet, remarquons d'abord que les γ_i vérifient $\gamma_i(L) = h_i^{-1}(L)$. Soit $\gamma\Gamma_1 \in \Gamma_\circ/\Gamma_1$ tel que γ ne soit pas dans Γ_1, alors il existe $1 \leq i \leq k$ et γ_i' dans $F(\phi)^\circ$ tels que $\gamma = h_i\gamma_i'$ et on a

$$\gamma_i(L) = \gamma_i'(L) = h_i^{-1}(L)$$

donc $\gamma_i^{-1}\gamma_i' \in F(\phi)^\circ$ et $\gamma_i^{-1}\gamma_i'(L) = L$ et alors $\gamma_i^{-1}\gamma_i'$ est dans Γ_1, ce qui entraîne $\gamma_i\Gamma_1 = \gamma_i'\Gamma_1$. D'où

$$\gamma\Gamma_1 = h_i\gamma_i'\Gamma_1 = h_i\gamma_i\Gamma_1$$

et $\Gamma_\circ/\Gamma_1$ est fini. □

Nous en déduisons que $\widetilde{\Gamma_\circ}$ est un sous-groupe arithmétique de $F(\phi)$.

4. Fonction zêta de la représentation ϕ.

Prenons le réseau $M = \sum_{H\in\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})} \mathbf{Z}e_H$ dans l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}_n^+$ et considérons son image $L = \psi^{-1}(M)$ dans E. Nous obtenons un réseau dans E.

Nous avons vu ci-dessus, que la forme quadratique vectorielle Q associée à ϕ est telle que pour tout ξ dans E, $Q(\xi)$ est en quelque sorte la partie-vecteur de $\xi\tilde{\xi}$.

Plus précisément, si $\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$, alors

$$\widehat{Q(\xi)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}) & \mathrm{Vect}(\alpha\bar{\beta}' + \beta\bar{\alpha}') \\ \mathrm{Vect}(\alpha\bar{\beta}' + \beta\bar{\alpha}') & \mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}) \end{pmatrix}.$$

Si on note det le déterminant de l'algèbre de Jordan V, qui est donné par

$$\det(x) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$$

alors

$$\det(Q(\xi)) = \mathrm{Re}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})^2 - N[\mathrm{Vect}(\alpha\bar{\beta}' + \beta\bar{\alpha}')] = \|\xi\|^4 - \sum_{i=1}^{n}(e_i\xi \mid \xi)^2.$$

Finalement, la fonction zêta associée à la représentation ϕ et au réseau L est donnée par

$$\zeta_L(s) = \sum_{l\in\widetilde{\Gamma}_0\backslash L'} [\|\xi\|^4 - \sum_{i=1}^{n}(e_i\xi \mid \xi)^2]^{-s} \quad s \in \mathbf{C}.$$

Soit $V_{\mathbf{Q}}$ la $\mathbf{Q}$-structure de V définie par $V_{\mathbf{Q}} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}e_i$. La représentation ϕ est définie sur $\mathbf{Q}$ et on a le théorème suivant :

4.1. Théorème. — *La série $\zeta_L(s)$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 2^{n-2}$, elle admet un prolongement analytique en tant que fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\zeta_L(2^{n-2} - s) = \mathrm{vol}(L)\pi^{2^{n-1}-4s}\frac{\Gamma_\Omega(s)}{\Gamma_\Omega(2^{n-2} - s)}\zeta_L(s)$$

où Γ_Ω est la fonction gamma du cône de Lorentz.

Preuve. — La convergence est une conséquence du théorème 1 de [1], chapitre 1 (on remarquera que dans ce cas, $V_{\mathbf{Q}}$ est déployée car la forme quadratique

$$q(x) = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$$

admet des solutions rationnelles non triviales, cf [1], chapitre 4). Quant au prolongement analytique et l'équation fonctionnelle, ils découlent du théorème 2 de [1], chapitre 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ACHAB, Fonction zêta des représentations des algèbres de Jordan, thèse Université Paris 6, 1993.

[2] D. ACHAB, Fonction zêta d'une représentation d' algèbre de Jordan, C.R.A.S, Paris, t. 316, Série I (1993), 977-982.

[3] J.L. CLERC, Représentations d'une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel, J. reine angew. Math., 423 (1992), 47-71.

[4] J. FARAUT et A. KORANYI, Analysis on symmetric cones (preprint).

[5] J. FARAUT et G. TRAVAGLINI, Generalized Bessel Functions, Journal of Funct. Analysis, 71, No. 1 (1987).

[6] M. KŒCHER, Uber Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, J. reine angew. Math., 192 (1953), 1-23.

[7] A. KRIEG, Kœcher-Maass- Series for Modular Forms of Quaternions, Manuscripta Math., 66 (1990), 431-451.

[8] R. TAKAHASHI, Série discrète pour les groupes de Lorentz $SO_0(2n, 1)$, Colloque sur les fonctions sphériques et la théorie des groupes, Nancy, 1971.

[9] P.L. WATERMAN, Mobius Transformations in Several Dimensions, Adv. Math., 101 (1993), 87-113.

Manuscrit reçu le 9 mai 1994.

Dehbia ACHAB,
Université de Paris VI
Mathématiques
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France).