ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARC BOURDON

Au bord de certains polyèdres hyperboliques

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 1 (1995), p. 119-141

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_1_119_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 1 (1995), 119–141

AU BORD DE CERTAINS POLYÈDRES HYPERBOLIQUES

par

Marc BOURDON

0. Introduction.

Cet article traite des groupes et des espaces hyperboliques de M. Gromov. Il est motivé par la question suivante : comment différencier deux groupes hyperboliques à quasi-isométrie près ?

A un groupe hyperbolique Γ (et plus généralement à un espace hyperbolique), M. Gromov attache deux invariants de quasi-isométrie : un bord topologique noté $\partial\Gamma$ et une structure quasi-conforme canonique sur $\partial\Gamma$. Le bord topologique est un invariant faible de Γ ; il est en général homéomorphe à la courbe de Menger ([Ch], th. 4.17) c'est-à-dire à l'espace topologique universel $\mathcal{T}$ défini par les conditions suivantes (voir [And]) :

- $\mathcal{T}$ est de dimension topologique un,
- $\mathcal{T}$ est non localement planaire,
- $\mathcal{T}$ est connexe, localement connexe, sans point de coupure local : tout ouvert connexe privé d'un point est encore connexe.

Par contre la structure quasi-conforme de $\partial\Gamma$ est très fine; elle caractérise en fait Γ à quasi-isométrie près ([Pau], th. 1.1).

On illustre ici ces idées en détaillant un exemple de M. Gromov issu de *Asymptotic invariants for infinite groups* ([G2], § 7.C_3). Il s'agit d'une famille infinie explicite de groupes hyperboliques, qui ont même bord topologique (la courbe de Menger) mais dont les structures quasi-conformes

Mots-clés : Polyèdres hyperboliques – Espaces hyperboliques – Dimension de Hausdorff – Dimension conforme.
Classification A.M.S. : 20F32 – 28A80 – 52B99 – 54E40.

au bord sont deux à deux distinctes. Ces groupes sont donc deux à deux non quasi-isométriques.

Énoncé du théorème.

M. Gromov a défini une généralisation des variétés simplement connexes à courbure -1 : les polyèdres hyperboliques (voir [G3], [B-B], [Be] et [Ha]). Ils forment une vaste classe d'espaces hyperboliques naturellement associés à des groupes hyperboliques. Pour $p \geq 5$, $q \geq 2$, notons $X(p,q)$, tout polyèdre hyperbolique obtenu de la façon suivante : $X(p,q)$ est un 2-complexe cellulaire simplement connexe dont les 2-cellules sont des p-gones réguliers de $\mathbb{H}^2$ d'angles $\frac{1}{2}\pi$. Ses 2-cellules sont attachées par leurs arêtes et sommets; deux 2-cellules distinctes ont au plus un sommet ou une arête en commun. Le *link* de chaque sommet de $X(p,q)$ est le 1-squelette du cube de dimension q. Autrement dit, en chaque sommet le 1-squelette de $X(p,q)$ est localement homéomorphe au cône construit sur le 0-squelette du q-cube, et le 2-squelette de $X(p,q)$ est localement homéomorphe au cône construit sur le 1-squelette du q-cube. On munit $X(p,q)$ de la métrique de longueur induite par ses 2-cellules. Ces exemples d'espaces de longueur ont été définis à l'origine par M. Gromov dans [G3]. Ils sont repris dans [G2], § 7.C_3.

Lorsque $q = 2$, le polyèdre $X(p,q)$ est isométrique à $\mathbb{H}^2$. Par contre dès que q est supérieur ou égal à trois, les seuls nombres p et q ne suffisent plus à caractériser $X(p,q)$ à isométrie près. Il existe une infinité non dénombrable de $X(p,q)$ pour chaque couple (p,q) (ce résultat a été établi par F. Haglund ([Ha], prop. II.C.2.7) et par W. Ballman et M. Brin ([BB], th. 1), pour des polyèdres dont le link des sommets est le 1-squelette du q-simplexe). Toutefois N. Benakli ([Be], p. 16) a exhibé pour chaque couple (p,q) un polyèdre $X(p,q)$ privilégié; il admet un groupe d'isométrie $\Gamma(p,q)$ transitif sur les triplets (sommets, arêtes, faces) incidents. Le groupe $\Gamma(p,q)$ agit de manière proprement discontinue cocompacte, il est donc hyperbolique et quasi-isométrique au polyèdre hyperbolique $X(p,q)$ de N. Benakli. Le bord topologique du groupe et du polyèdre est la courbe de Sierpinski pour $q = 3$ (une courbe de Menger plane), la courbe de Menger pour $q \geq 4$ (la preuve de ces derniers résultats est identique à celle [Be], p. 66).

Afin de comparer les structures quasi-conformes au bord des $X(p,q)$, on utilise un invariant numérique quasi-conforme : la dimension conforme de P. Pansu. Il s'agit d'un analogue quasi-conforme de la dimension topologique.

L'énoncé suivant, valable pour n'importe quel polyèdre $X(p,q)$, est plus ou moins explicite dans [G2], § 7.C_3 :

THÉORÈME. — *La dimension conforme du bord des polyèdres $X(p,q)$ vérifie :*

$$\dim C\big(\partial X(p,q)\big) \geq \frac{1}{2}\frac{\log(q-1)+\log p}{\log p}.$$

Puisque les groupes $\Gamma(p,q)$ sont quasi-isométriques aux polyèdres de N. Benakli, on obtient la même inégalité pour $\dim C\big(\partial\Gamma(p,q)\big)$. Le théorème indique que — pour q suffisamment grand devant p, p', q' — les polyèdres $X(p,q)$ et $X(p',q')$ (resp. les groupes $\Gamma(p,q)$ et $\Gamma(p',q')$) ne sont pas quasi-isométriques.

QUESTION. — *Les nombres* $\dim C\big(\partial X(p,q)\big)$ *et* $\dfrac{\log(q-1)+\log p}{\log p}$ *sont-ils uniformément bornés ?*

La méthode. — Elle repose sur deux résultats intermédiaires. Le premier concerne la dimension conforme d'un espace métrique (E,d). Il est implicite dans les travaux de P. Pansu ([P1], lemme 6.3 et [P2], prop. 2.9). On montre que la présence dans (E,d) d'une vaste famille de courbes de diamètres uniformément minorés conduit à une minoration de $\dim C(E,d)$. Le second reprend une idée de M. Gromov dans [G2], § 7.C_3. On construit un arbre tournant dans chaque $X(p,q)$, sa trace sur $\partial X(p,q)$ est une famille de courbes de diamètres uniformément minorés. La minoration précédente donne alors le théorème. L'existence d'arbres tournants dans $X(p,q)$ est énoncée sans démonstration dans [G2], § 7.C_3, leurs constructions ont motivé en partie cet article.

Le premier paragraphe traite de la structure quasi-conforme d'un espace métrique (E,d) puis du bord d'un espace hyperbolique. On rappelle brièvement les définitions de métriques quasi-conformes, de birapports, de métriques visuelles, de dimensions conformes. Ensuite on établit la minoration de la dimension conforme de (E,d) lorsque E contient une vaste famille de courbes.

Au deuxième paragraphe, on construit des arbres tournants dans les polyèdres $X(p,q)$.

Le théorème est démontré au troisième paragraphe.

Je remercie P. Pansu qui m'a encouragé à comprendre cet exemple.

1. Sructures quasi-conformes.

Commençons par la notion de métriques quasi-conformes. Soit (E,d)

un espace métrique. Un *k-anneau*, $k \geq 1$ de (E, d) est un couple (B_1, B_2) de deux boules concentriques dont les rayons satisfont :

$$r_2 = kr_1.$$

Deux métriques d et d' sur E sont *quasi-conformes* si leurs anneaux sont comparables, plus précisément s'il existe des fonctions φ et ψ de $[1, +\infty[$ dans lui-même telles que : pour tout k-anneau (B_1, B_2) de d (resp. d'), il existe (B_1', B_2') un $\varphi(k)$-anneau de d' (resp. un $\psi(k)$-anneau de d) vérifiant :

$$B_1' \subset B_1 \subset B_2 \subset B_2'.$$

En particulier toute boule de d est contenue dans un $\varphi(1)$-anneau de d'.

Un homéomorphisme f (resp. un plongement) de (E, d) dans (F, d') est *quasi-conforme* si les métriques f^*d' et d sont quasi-conformes.

Clairement la relation « d et d' sont quasi-conformes » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des métriques de E. La *structure quasi-conforme* de (E, d) est la classe d'équivalence de d.

1.1. *Remarques.*

a) On a préféré ici la terminologie de P. Pansu, mais notre définition est équivalente à la définition de Väisälä de métriques quasi-symétriques (voir [V], p. 222).

b) On peut remplacer les fonctions φ et ψ de la définition par des fonctions puissances, c'est-à-dire de la forme

$$k \longmapsto Ck^{\alpha}$$

avec α, C strictement positives. Une manière de le voir consiste à approximer un k-anneau par une succession de 2-anneaux emboîtés les uns dans les autres. En procédant ainsi, on remplace φ par

$$k \longmapsto (2k)^{\log \varphi(2)/\log 2}$$

de même pour ψ. Lorsque E est compact, on en déduit le résultat important suivant : *deux métriques quasi-conformes sur E sont Hölder équivalentes* (cet énoncé élémentaire est certainement bien connu des spécialistes, toutefois je n'en connais pas de référence).

c) Dans [V], § 3, Väisälä montre que deux métriques quasi-conformes sont quasi-möbius. Il montre également la réciproque lorsque E est borné.

Précisons ceci. Le *birapport* de quatre points de (E, d) est défini par :

$$[aa'bb'] = \frac{d(a,b)\,d(a',b')}{d(a,b')\,d(a',b)}.$$

Une application $f : (E, d) \to (F, d')$ *quasi-préserve* le birapport si, quel que soit $A > 1$, il existe $B > 1$ tel que

$$A^{-1} \leq [aa'bb'] \leq A \implies B^{-1} \leq [f(a)f(a')f(b)f(b')] \leq B.$$

On dit alors que les métriques d et d' sur E sont *quasi-möbius* si l'identité de (E, d) sur (E, d') et son inverse quasi-préservent le birapport.

Nous verrons une conséquence du théorème de Väisälä en 1.4 (a).

1.2. *Structure quasi-conforme au bord d'un espace hyperbolique.*

Le bord d'un espace hyperbolique porte une classe naturelle de métriques : les métriques visuelles. Rappelons leur définition. Soit X un espace hyperbolique et x une origine dans X. Une métrique d sur ∂X est dite *visuelle de paramètre* a (avec $a > 1$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour tous éléments ξ, ξ' de ∂X on ait :

$$C^{-1}a^{-D} \leq d(\xi, \xi') \leq Ca^{-D}$$

où D est la distance dans X de x à la géodésique $(\xi\xi')$.

On vérifie aisément que cette définition est indépendante de l'origine x choisie.

Dans [G1], § 7.2 (voir aussi [CDP], chap. 11), M. Gromov montre l'existence d'un réel $a_0 > 0$ (dépendant uniquement de l'hyperbolicité de X) tel que pour tout a appartenant à $]1, a_0[$, le bord de X admette une métrique visuelle de paramètre a.

Deux métriques visuelles d et d' sur ∂X, de paramètres respectifs a et a', sont facilement comparables : il existe $C > 1$ telle que :

$$C^{-1}d^{\alpha} \leq d' \leq Cd^{\alpha}$$

avec $\alpha = \log a' / \log a$. Aussi elles sont quasi-conformes et définissent la même structure quasi-conforme sur ∂X.

1.3. *Invariance par quasi-isométrie.*

Rappelons qu'une application

$$f : (E, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$$

entre deux espaces métriques est une *quasi-isométrie* s'il existe des constantes $A \geq 1$ et $B \geq 0$ telles que

$$\forall x, x' \in E, \quad A^{-1} d_E(x, x') - B \leq d_F\big(f(x), f(x')\big) \leq A d_E(x, x') + B.$$

Les espaces métriques (E, d_E) et (F, d_F) sont dits *quasi-isométriques* si une telle application f existe, et si de plus $f(E)$ est ε-dense dans F pour un certain réel $\varepsilon \geq 0$.

Le théorème suivant est une généralisation d'un théorème de Margulis. Il montre que la structure quasi-conforme du bord d'un espace hyperbolique X est un invariant de quasi-isométrie de X.

1.3.1. THÉORÈME (voir [Bo], th. 1.6.4 pour une preuve détaillée, voir aussi [GP], § 3.10.C_3). — *Soient X et Y deux espaces hyperboliques dont les bords sont munis d'une métrique visuelle.*

(i) *Toute quasi-isométrie de X dans Y s'étend en un plongement quasi-conforme de ∂X dans ∂Y.*

(ii) *Si X et Y sont quasi-isométriques leurs bords se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme.*

1.4. *Remarques.*

a) F. Paulin ([Pau], th. 1.1) a récemment montré la réciproque du théorème 1.3.1 (ii) lorsque X et Y sont des groupes hyperboliques. La définition de quasi-conforme que prend F. Paulin est différente de la nôtre, mais son résultat subsiste. En effet, le point-clé de sa preuve établit qu'un homéomorphisme quasi-conforme et son inverse quasi-préservent le birapport. Avec notre définition, c'est un résultat de Väisälä (voir la remarque 1.1.c). La réciproque du théorème 1.3.1 est également vraie lorsque X et Y sont des variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure majorée par une constante strictement négative. L'argument commun aux groupes hyperboliques est le suivant (voir [Pau], § 5, voir aussi [GP], § 3.8.B).

Observons que le birapport associé à une métrique visuelle de paramètre a sur ∂X satisfait les inégalités : il existe $C > 0$ tel que pour tous $(\xi, \eta, \xi', \eta') \in \partial^4 X$ on ait

$$\sup\{0, \log_a[\xi\xi'\eta\eta']\} - C \leq d_X\big((\xi\eta'), (\xi'\eta)\big) \leq \sup\{0, \log_a[\xi\xi'\eta\eta']\} + C$$

(le cas des arbres est trivial, le cas général en découle). Aussi un homéomorphisme $\Omega : \partial X \to \partial Y$ qui quasi-préserve le birapport vérifie

la propriété suivante : pour tout $A \geq 0$, il existe $B \geq 0$ tel que pour tous $(\xi, \eta, \xi', \eta') \in \partial^4 X$ on ait

$$d_X\big((\xi\eta),(\xi'\eta')\big) \leq A \implies d_Y\big(\big(\Omega(\xi)\Omega(\eta)\big),\big(\Omega(\xi')\Omega(\eta')\big)\big) \leq B.$$

Cette propriété, si elle est vérifiée par Ω et Ω^{-1}, permet d'étendre Ω en une quasi-isométrie de X dans Y d'image ε-dense, lorsque près de tout point de X et de Y «passent beaucoup de géodésiques» (voir [Pau], § 5 et [GP], § 3.8.B). La condition de densité des géodésiques est satisfaite pour les groupes hyperboliques et les variétés complètes simplement connexes à courbure majorée par une constante strictement négative, d'où la réciproque de 1.3.1 (ii).

b) Un raffinement de l'hyperbolicité au sens de M. Gromov est la propriété CAT($-b^2$). Un espace métrique géodésique est un CAT($-b^2$)-espace si ses triangles vérifient le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov avec $\mathbb{H}^2(-b^2)$ (voir [Bo], § 1.3, [Bal]). Par exemple les $X(p,q)$ sont des CAT(-1)-espaces (voir [Bal], th. 15, [GH], prop. 2, on le lit dans les links).

Les CAT($-b^2$)-espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure inférieure à $-b^2$. En particulier, ils sont contractiles et deux points de $X \cup \partial X$ définissent une unique ligne géodésique.

Quel que soit a appartenant à $]1, e^b]$, un CAT($-b^2$)-espace X admet au bord une classe explicite de métriques visuelles de paramètre a (notons que e^b est optimal car il l'est sur $\mathbb{H}^n(-b^2)$ pour des raisons de dimension de Hausdorff) : étant donné une origine x dans X, définissons

$$d_x(\xi, \xi') = a^{-(\xi \mid \xi')_x}$$

où $(\xi \mid \xi')_x$ désigne le produit de Gromov au bord relativement à x :

$$(\xi \mid \xi')_x = \lim_{(u,v)\to(\xi,\xi')} \tfrac{1}{2}\left(|x-u| + |x-v| - |u-v|\right)$$

(u, v appartiennent à X et les limites sont radiales). On montre que d_x est une métrique sur ∂X (voir [Bo], th. 2.5.1). Remarquons que le birapport associé à d_x s'écrit :

$$\log_a[\xi\xi'\eta\eta'] = \tfrac{1}{2} \lim_{(u,u',v,v')\to(\xi,\xi',\eta,\eta')} |u-v| + |u'-v'| - |u-v'| - |u'-v|.$$

Il est indépendant de x et il est invariant par les isométries de X.

c) Soit S un espace symétrique de rang un non compact ($S = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{H}^n_{\mathbb{H}}$, $\mathbb{H}^2_{\mathbb{O}}$). Son bord porte des métriques visuelles naturelles, qui sont de plus des métriques de longueur (contrairement à celles définies en 1.4 (b)). En effet, supposons la métrique de S normalisée de manière à ce que le maximum de ses courbures soit -1. Alors si S est égal à $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, la métrique euclidienne sur $\partial S = S^{n-1}$ est visuelle de paramètre e. Si S est égal à $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{H}^n_{\mathbb{H}}$ ou $\mathbb{H}^2_{\mathbb{O}}$, la métrique de Carnot-Carathéodory définie par la distribution normale aux fibres de Hopf, est une métrique visuelle de paramètre e sur ∂S (voir [GP]).

1.5. *Dimension conforme.*

Rappelons d'abord les définitions des dimensions de Hausdorff et de packing d'un espace métrique (E, d) compact. Un *packing* de (E, d) est une collection de sous-ensembles deux à deux disjoints de (E, d).

Pour $\alpha \geq 0$ posons :

$$\mathcal{H}(\alpha) = \lim_{r \to 0} \uparrow \inf \Big\{ \sum_i r_i^\alpha, \text{ où } \{B(x_i, r_i)\} \text{ est un recouvrement fini de } (E, d) \text{ par des boules de rayons inférieurs à } r \Big\}.$$

$$\mathcal{P}(\alpha) = \lim_{r \to 0} \downarrow \sup \Big\{ \sum_i r_i^\alpha, \text{ où } \{B(x_i, r_i)\} \text{ est un packing fini de } (E, d) \text{ par des boules de rayons inférieurs à } r \Big\}.$$

La *dimension de Hausdorff* (resp. de *packing*) de (E, d) est l'unique réel α_0 tel que :

$$0 \leq \alpha < \alpha_0 \Longrightarrow \mathcal{H}(\alpha) = +\infty \qquad (\text{resp. } \mathcal{P}(\alpha) = +\infty),$$

$$\alpha > \alpha_0 \Longrightarrow \mathcal{H}(\alpha) = 0 \qquad (\text{resp. } \mathcal{P}(\alpha) = 0).$$

On les note respectivement $\dim_H(E, d)$ et $\dim_P(E, d)$.

1.5.1. Quelques propriétés.

a) On a les inégalités

$$\dim_{\text{Top}}(E, d) \leq \dim_H(E, d) \leq \dim_P(E, d)$$

où $\dim_{\text{Top}}(E, d)$ désigne la dimension topologique de (E, d).

b) S'il existe une mesure μ sur E et des constantes $C \geq 1$ et $\beta \geq 0$ telles que pour toute boule $B(x,r)$ on ait :

$$C^{-1}r^{\beta} \leq \mu\big(B(x,r)\big) \leq Cr^{\beta}$$

alors

$$\dim_H(E,d) = \dim_P(E,d) = \beta.$$

c) Si F est inclus dans E, alors

$$\dim_H(F,d) \leq \dim_H(E,d) \quad \text{et} \quad \dim_P(F,d) \leq \dim_P(E,d).$$

Suivant P. Pansu, posons :

1.5.2. DÉFINITION. — *La* dimension conforme *de (E,d) est l'infimum des dimensions de Hausdorff de (E,d') lorsque d' décrit toutes les métriques quasi-conformes à d.*

C'est bien sûr un invariant quasi-conforme de (E,d) toujours minoré par la dimension topologique de (E,d). On le note $\dim C(E,d)$. Le lemme suivant, implicite dans [P1], lemme 6.3 et [P2], prop. 2.9, sera essentiel pour montrer le théorème.

1.6. LEMME.. — *Soit (E,d) un espace métrique compact. Supposons qu'il existe :*

(i) *Une famille de courbe $\mathcal{C} = \{\gamma_i\,,\ i \in I\}$ de (E,d) dont les diamètres sont uniformément minorés.*

(ii) *Une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{C}$ et des constantes $A > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que pour toute boule B de rayon r dans (E,d) :*

$$\mu\big\{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma \cap B \neq \emptyset\big\} \leq Ar^{\alpha}.$$

Alors en notant τ la dimension de packing de (E,d) on a :

$$\dim C(E,d) \geq \frac{\tau}{\tau - \alpha} \quad \text{avec} \quad \tau - \alpha \geq 1.$$

Preuve. — Elle est semblable à celle du lemme 6.3 de [P1] ; donnons-la néanmoins.

Soit d' une métrique quasi-conforme à d sur E, et $\{B'_k\,,\ k \in K\}$ un recouvrement de (E,d') par des boules de rayons r'_k inférieurs à r.

D'après [Fe], p. 143, on peut extraire de $\{B'_k\,,\ k \in K\}$ une sous-famille $\{B'_j\,,\ j \in J\}$, de boules disjointes, telle que les boules concentriques $\{3B'_j\,,\ j \in J\}$ recouvrent encore E.

Les métriques d et d' étant quasi-conformes, il existe une constante $C > 1$ (qui ne dépend que de d et d') et des C-anneaux (B_j^1, B_j^2) de d tels que :

$$B_j^1 \subset B'_j \subset 3B'_j \subset B_j^2.$$

Notons r_j et R_j les rayons de B_j^1 et B_j^2 ; on a $R_j = Cr_j$.

D'après 1.1 b), les métriques d et d' sont Hölder équivalentes, donc les d'-diamètres des courbes γ de $\mathcal{C}$ sont uniformément minorés. Soit ℓ un tel minorant. Soit aussi $\mathbf{1}_j$ la fonction sur $\mathcal{C}$ définie par :

$$\mathbf{1}_j(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma \cap 3B'_j \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $\{3B'_j\,, j \in J\}$ recouvre E, on a par l'inégalité triangulaire :

$$\forall \gamma \in \mathcal{C} : \quad \ell \leq \sum_{j \in J} 6r'_j \mathbf{1}_j(\gamma).$$

En intégrant, en appliquant l'hypothèse (ii) puis l'inégalité d'Hölder avec $\beta > 1$:

$$\begin{aligned} (*) \qquad \tfrac{1}{6}\ell &\leq \int_\Gamma \sum_{j \in J} r'_j \mathbf{1}_j(\gamma)\, d\mu(\gamma) \leq \sum_{j \in J} r'_j \int_\Gamma \mathbf{1}_j(\gamma)\, d\mu(\gamma) \\ &\leq \sum_{j \in J} r'_j \mu\{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma \cap B_j^2 \neq \emptyset\} \\ &\leq A \sum_{j \in J} r'_j R_j^\alpha \leq A\Big(\sum_{j \in J} r_j'^{\frac{\beta}{\beta-1}}\Big)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \Big(\sum_{j \in J} R_j^{\alpha\beta}\Big)^{\frac{1}{\beta}} \\ &\leq A\Big(\sum_{k \in K} r_k'^{\frac{\beta}{\beta-1}}\Big)^{\frac{\beta-1}{\beta}} C^\alpha \Big(\sum_{j \in J} r_j^{\alpha\beta}\Big)^{\frac{1}{\beta}}. \end{aligned}$$

La collection des sous-ensembles $\{B_j^1\}_{j \in J}$ est un packing de (E, d) par des boules de rayons r_j inférieurs à une puissance de r (d et d' sont Hölder équivalentes). Aussi pour $\beta > 1$ vérifiant $\alpha\beta > \tau$ et pour r suffisamment petit, on a :

$$\sum_{j \in J} r_j^{\alpha\beta} \leq 1$$

donc

$$\sum_{k\in K} r_k'^{\frac{\beta}{\beta-1}} \geq \left[A^{-1}C^{-\alpha}\frac{1}{6}\ell\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}}$$

ce qui montre :

$$(**) \qquad \dim_H(E,d') \geq \frac{\beta}{\beta-1}.$$

L'inégalité (*) appliquée à $d' = d$ montre que $\dim_H(E,d) \geq \alpha+1$, donc $\tau \geq \alpha+1$ et en particulier :

$$\frac{\tau}{\alpha} > 1.$$

On peut donc faire tendre β par valeurs supérieures vers τ/α, l'inégalité (**) donne alors :

$$\dim_H(E,d') \geq \frac{\tau}{\tau-\alpha}.$$

D'où le lemme. □

1.7. *Remarques et exemples.*

a) On peut utiliser le lemme 1.6 pour calculer les dimensions conformes du bord des espaces homogènes simplement connexes à courbure strictement négative (voir [P2], th. 5.5). Pour les espaces symétriques de rang 1, on trouve :

$$\dim C(\partial H^n_{\mathbb{K}}) = nk+k-2 = \dim_{\mathrm{Top}}(\partial H^n_{\mathbb{K}}) + k - 1$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{C}a$ et $k = \dim \mathbb{K} = 1, 2, 4, 8$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ elle est atteinte pour la métrique euclidienne. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{C}a$, elle l'est pour la métrique de Carnot-Carathéodory associée à la distribution normale aux fibres de Hopf. Ces métriques sont les métriques visuelles naturelles au bord des espaces symétriques de rang un (voir 1.4 c)).

b) Voici un exemple simple : Soit $(F,\bar{d})$ un espace métrique compact muni d'une mesure μ vérifiant la propriété 1.5.1 b) pour un certain réel β. Soit (E,d) l'espace métrique $F \times [0,1]$ muni de la métrique produit de $\bar{d}$ et de la métrique euclidienne sur $[0,1]$. Posons :

$$\mathcal{C} = \big\{\{x\} \times [0,1]\,;\ x \in F\big\}.$$

La mesure μ induit une mesure sur $\mathcal{C}$ vérifiant l'hypothèse (ii) du lemme

avec $\alpha = \beta$. On a par ailleurs $\dim_P(E,d) = \dim_H(E,d) = \beta + 1$. Donc le lemme donne :

$$\dim C(E,d) \geq \beta + 1$$

ce qui entraîne :

$$\dim C(E,d) = \beta + 1$$

puisque $\dim_H(E,d) = \beta + 1$.

c) Soit $p : (E,d) \to (F,d')$ un plongement quasi-conforme. D'après la propriété 1.5.1 c), on a :

$$\dim C(E,d) \leq \dim C(F,d').$$

En particulier si $f : X \to Y$ est une quasi-isométrie entre deux espaces hyperboliques X et Y, on a, d'après 1.3.1 (i) :

$$\dim C(\partial X) \leq \dim C(\partial Y).$$

2. Arbres tournants.

Pour construire une famille de courbes de diamètres uniformément minorés dans $\partial X(p,q)$, on procède comme suit : on exhibe deux cantors disjoints K_1 et K_2 dans $\partial X(p,q)$ tels que $K_1 \cup K_2$ sépare $\partial X(p,q)$ en deux composantes connexes. Puis en utilisant un arbre tournant dans $X(p,q)$, on relie les points de K_1 aux points de K_2 par des courbes simples, deux à deux disjointes, contenues dans une même composante connexe de $\partial X(p,q) - (K_1 \cup K_2)$. Leur réunion sera homéomorphe à $K_1 \times [0,1]$. Chaque courbe sera la trace sur $\partial X(p,q)$ d'un demi-plan totalement géodésique de $X(p,q)$, dont la « courbure » est proche de -1.

2.1. *Construction de K_1 et K_2.*

Choisissons une 2-cellule c_0 de $X(p,q)$, c_0 est un p-gone régulier de $\mathbb{H}^2$ d'angle $\frac{1}{2}\pi$ avec $p \geq 5$. Supposons d'abord p supérieur ou égal à 6. Soit alors a_1 et a_2 deux arêtes de c_0, séparées l'une de l'autre par au moins deux arêtes de c_0. Il existe une isométrie hyperbolique de $\mathbb{H}^2$ qui a les propriétés suivantes : elle applique a_1 sur a_2 et son axe coupe a_1 et a_2 à angle droit en leurs intérieurs. Notons P_1 et P_2 ces points d'intersection et considérons les géodésiques bi-infinies de $X(p,q)$ qui contiennent le segment $[P_1P_2]$. Leur réunion est un arbre homogène T de valence q, dont les arêtes sont de longueur $|P_1 - P_2|$. L'arbre T est un sous-ensemble totalement géodésique de $X(p,q)$ (c'est vrai localement, donc globalement, car $X(p,q)$ est un

CAT(−1)-espace (voir 1.4 b)). Il sépare $X(p,q)$ en deux composantes connexes (c'est vrai pour un petit voisinage de T, donc globalement, car $X(p,q)$ est simplement connexe). Son bord est un cantor, il divise $\partial X(p,q)$ en deux composantes connexes.

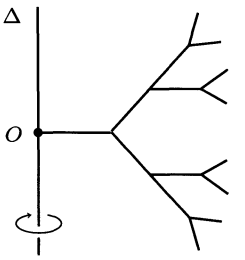
Lorsque p est égal à 5, l'arbre T existe encore, seulement il est contenu dans le 1-squelette de $X(p,q)$. Sa construction, facile, est laissée au lecteur.

Soit O le milieu de $[P_1P_2]$; l'arbre T privé de O a deux composantes connexes. Rajoutons-leur le point O et notons-les T_1 et T_2. Ce sont deux arbres homogènes enracinés, de racine O et de valence q (de tout sommet distinct de O partent q arêtes). Le bord de T est la réunion disjointe des bords de T_1 et T_2. On pose :

$$K_1 = \partial T_1 \ , \ K_2 = \partial T_2.$$

On construit maintenant dans $X(p,q)$ un arbre tournant reliant T_1 à T_2. Sa trace sur $\partial X(p,q)$ fournira une famille de courbes connectant K_1 à K_2, homéomorphe à $K_1 \times [0,1]$.

2.2. Définition. — *Soit T_1 un arbre enraciné de racine O, localement compact. L'*arbre tournant *associé à T_1 est l'espace topologique A obtenu en faisant tourner T_1 d'un demi-tour autour d'un axe Δ passant par O comme l'indique la figure suivante :*



Un demi-plan *de A est un sous-espace de A obtenu en faisant tourner un rayon de T_1 issu de O, d'un demi-tour autour de Δ.*

2.3. Proposition. — *Il existe dans $X(p,q)$ un arbre tournant noté $A(p,q)$ qui relie T_1 à T_2, et qui a les propriétés suivantes :*

(a) *L'arbre enraciné sous-jacent à $A(p,q)$ est de valence q.*

(b) *$A(p,q)$ est un 2-complexe polygonal dont les 2-cellules sont des p-gones réguliers de $\mathbb{H}^2$ d'angle $\frac{1}{2}\pi$. L'inclusion de $A(p,q)$ dans $X(p,q)$ est polygonale.*

(c) *Muni de la métrique de longueur induite par ses 2-cellules, $A(p,q)$ est un CAT(-1)-espace (voir 1.4 b)). L'inclusion de $A(p,q)$ dans $X(p,q)$ est un plongement quasi-isométrique.*

(d) *Chaque demi-plan de $A(p,q)$ est un sous-espace totalement géodésique de $X(p,q)$.*

La preuve de la proposition s'appuie sur deux lemmes intermédiaires. Le premier donne une condition suffisante pour qu'une immersion polygonale soit un plongement isométrique; le second, une condition suffisante pour qu'un arbre tournant polygonal immergé, soit plongé de manière quasi-isométrique.

Soit X_1 et X_2 deux 2-complexes polygonaux dont les 2-cellules sont un même polygone régulier de $\mathbb{H}^2$. Rappelons que le link d'un sommet s de X_i $(i = 1, 2)$ est le graphe, noté $\mathrm{Link}_{X_i}(s)$, dont les sommets sont les arêtes de X_i issues de s; deux sommets sont liés par une arête si les arêtes correspondantes de X_i appartiennent à une même 2-cellule. On donne à chaque arête du link la longueur un, et on le munit de la métrique de longueur induite par ses arêtes.

2.4. Lemme. — *Soit $f : X_1 \to X_2$ une immersion polygonale. Si X_2 est un CAT(-1)-espace et si pour tout sommet s de X_1 l'injection induite par f :*

$$\mathrm{Link}_{X_1}(s) \to \mathrm{Link}_{X_2}(f(s))$$

est un plongement isométrique, alors f est un plongement isométrique.

2.5. *Preuve de 2.4.* — Puisque les 2-cellules de X_1 et X_2 sont un même polygone régulier de $\mathbb{H}^2$, et puisque f est une immersion polygonale, l'hypothèse sur les links montre que f est une immersion isométrique locale. Le complexe X_2 étant un CAT(-1)-espace, un argument standard montre que f est un plongement isométrique. □

Soit respectivement A et X un arbre tournant polygonal et un 2-complexe polygonal, qui ont pour 2-cellules un même polygone régulier de $\mathbb{H}^2$.

2.6. LEMME. — *Supposons que X soit un CAT(-1)-espace. Soit $f : A \to X$ une immersion polygonale, dont la restriction à chaque demi-plan de A est un plongement isométrique. Alors f est plongement quasi-isométrique.*

2.7. *Preuve de 2.6.* — Pour montrer que f est un plongement, il suffit de vérifier son injectivité. Soit O la racine de l'arbre enraciné sous-jacent à A. Elle appartient à chaque demi-plan de A. Soit a et a' deux points de A qui ont même image dans X. Les hypothèses montrent que $f([Oa])$ et $f([Oa'])$ sont deux segments géodésiques confondus dans X. Puisque f est une immersion, les segments $[Oa]$ et $[Oa']$ de A sont également confondus. Donc a est égal à a'.

Montrons que f est une quasi-isométrie. Soit a et a' deux points de A. Clairement :

$$\left|f(a) - f(a')\right|_X \leq |a - a'|_A.$$

Afin de minorer $|f(a) - f(a')|_X$, soit ε une constante strictement positive avec la propriété suivante : deux 2-cellules de X à distance inférieure à ε, ont au moins un point en commun. Puisque f est un plongement polygonal, il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, telle que pour tous éléments b et b' de A vérifiant :

$$\left|f(b) - f(b')\right|_X \leq \varepsilon,$$

on ait :

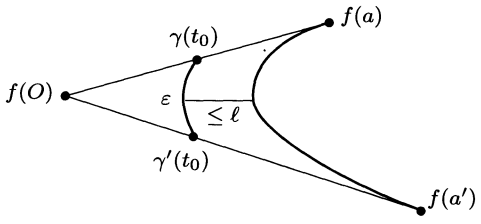
$$|b - b'|_A \leq \eta.$$

Les images par f de $[Oa]$ et $[Oa']$ sont les segments géodésiques $[f(O)f(a)]$ et $[f(O)f(a')]$ de X. Notons-les γ et γ' et paramétrons-les par longueur d'arc depuis $f(O)$. Supposons d'abord l'existence d'un réel t_0 tel que :

$$\left|\gamma(t_0) - \gamma'(t_0)\right|_X = \varepsilon.$$

Alors X étant un CAT(-1)-espace, il existe une constante $\ell \geq 0$, ne dépendant que de ε, telle que (voir figure page suivante) :

$$d_X\left([f(a)f(a')], [\gamma(t_0)\gamma'(t_0)]\right) \leq \ell.$$



On en déduit en utilisant l'inégalité triangulaire et la définition de η :

$$\begin{aligned}\big|f(a)-f(a')\big|_X &\geq \big|f(a)-\gamma(t_0)\big|_X + \big|f(a')-\gamma'(t_0)\big|_X - 2\ell - \varepsilon \\ &\geq |a-a'|_A - \eta - 2\ell - \varepsilon.\end{aligned}$$

Si le réel t_0 n'existe pas, c'est encore plus simple. On a nécessairement :

$$d_X\big(f(a),\gamma'\big) \leq \varepsilon \quad \text{ou} \quad d_X\big(f(a'),\gamma\big) \leq \varepsilon,$$

donc par l'inégalité triangulaire et la définition de η :

$$\big|f(a)-f(a')\big|_X \geq |a-a'|_A - \eta - \varepsilon.$$

D'où le lemme. □

Passons à la :

2.8. *Preuve de la proposition 2.3.* — On la donne pour $p \geq 6$; le lecteur l'adaptera sans peine au cas $p = 5$.

Un *arbre enraciné* de *valence* q et de *hauteur* n est l'espace topologique T^n défini comme suit :

- T^0 est un segment dont l'un des deux sommets est la racine;
- T^{k+1} s'obtient à partir de T^k, en collant $(q-1)$ arêtes à chaque sommet de ∂T^k distinct de la racine.

Notons T_1^n et T_2^n les sous-arbres enracinés de hauteur n et de valence q de T_1 et T_2. Soit U une des deux composantes connexes de $X(p,q) - T$. On construit par récurrence un arbre tournant de hauteur n, noté $A^n(p,q)$, reliant T_1^n à T_2^n. La limite croissante des $A^n(p,q)$ sera l'arbre tournant $A(p,q)$. Le sous-complexe $A^{n+1}(p,q)$ de $A(p,q)$ sera l'étoile de $A^n(p,q)$ dans $A(p,q)$, c'est-à-dire la réunion des 2-cellules de $A(p,q)$ qui ont au

moins un sommet en commun avec $A^n(p,q)$. L'arbre tournant $A(p,q)$ sera contenu dans l'étoile de U dans $X(p,q)$.

$A^0(p,q)$ est la 2-cellule c_0 du paragraphe 2.1. Supposons $A^n(p,q)$ construit et vérifiant :

i) $A^n(p,q)$ est un arbre tournant polygonal, de hauteur n, de valence q, reliant T_1^n à T_2^n. Il est inclus dans l'étoile de U dans $X(p,q)$.

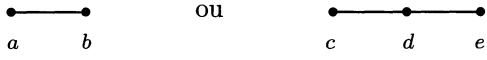
ii) Tout demi-plan P de $A^n(p,q)$ est totalement géodésique dans $X(p,q)$. Plus précisément, pour tout sommet s de P, l'injection :

$$\mathrm{Link}_P(s) \longrightarrow \mathrm{Link}_{X(p,q)}(s)$$

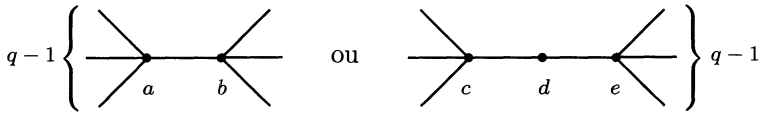
est un plongement isométrique.

iii) Le link dans $A^n(p,q)$ d'un sommet appartenant à $\partial A^n(p,q) \cap U$ est l'un des deux graphes :

On obtient alors $A^{n+1}(p,q)$ à partir de $A^n(p,q)$ en deux temps. Dans un premier temps, sur chaque arête de $\partial A^n(p,q)$ qui rencontre U, on colle $(q-1)$ 2-cellules. Le link dans $A^n(p,q)$ d'un sommet de $\partial A^n(p,q) \cap U$ était (d'après iii)) :



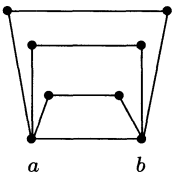
il devient après ce premier collage :



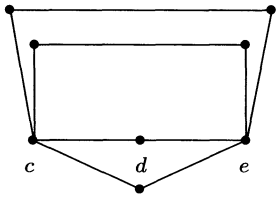
Le lemme suivant permet de poursuivre la construction :

2.8. LEMME. — *Dans le 1-squelette du q-cube, les deux graphes précédents se complètent de manière unique en des graphes qui ont les propriétés suivantes :*

(a) *Ils sont de la forme*



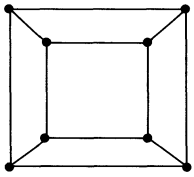
$(q-1)$ lacets de longueur 4



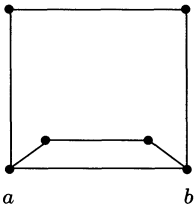
1 lacet de longueur 4
$(q-2)$ lacets de longueur 6

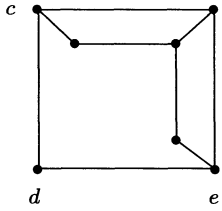
(b) *Chacun des $(q-1)$ lacets est géodésique dans le 1-squelette du q-cube. En d'autres termes, la métrique ambiante restreinte à chaque lacet, est une métrique de longueur.*

2.8.2. Exemple. — Si $q = 3$, le 1-squelette du 3-cube est le graphe :

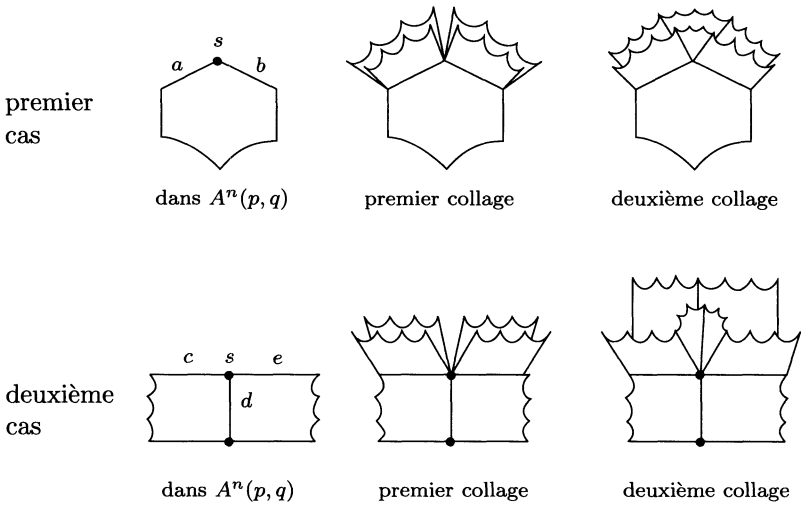


les sous-graphes du lemme 2.8.1 sont :





Avant de montrer le lemme 2.8.1, achevons la preuve de la proposition. On colle maintenant aux sommets de $\partial A^n(p,q) \cap U$ des 2-cellules afin que leurs links deviennent l'un des deux graphes du lemme 2.8.1. Par exemple, si $(p,q) = (6,3)$, l'évolution du complexe au voisinage d'un sommet s de $\partial A^n(p,q) \cap U$ est :



Le complexe ainsi obtenu est un arbre tournant de hauteur $n+1$ et de valence q. Il s'immerge dans $X(p,q)$ par une immersion polygonale qui prolonge l'inclusion de $A^n(p,q)$ dans $X(p,q)$. Notons $A^{n+1}(p,q)$ son image. C'est un arbre tournant de hauteur $n+1$, de valence q, immergé dans $X(p,q)$. Il relie T_1^{n+1} à T_2^{n+1} et il est inclus dans l'étoile de U. L'hypothèse ii), les lemmes 2.8.1 (b) et 2.4 montrent que $A^{n+1}(p,q)$ satisfait ii). Dès lors, par le lemme 2.6, $A^{n+1}(p,q)$ est plongé dans $X(p,q)$, donc il satisfait i). Enfin iii) est clairement vérifiée par construction.

Notons $A(p,q)$ la limite croissante des $A^n(p,q)$, c'est un arbre tournant qui relie T_1 à T_2. Il vérifie clairement les assertions (a), (b), (d) de la proposition 2.3. D'après [GH], prop. 2, il est un CAT(-1)-espace. Il vérifie (c) grâce au lemme 2.6. □

2.8.3. Preuve du lemme 2.8.1

Identifions les sommets du 1-squelette du q-cube aux éléments de $\{0,1\}^q$. La distance entre deux sommets $(x_1,\dots,x_q)$ et $(x'_1,\dots,x'_q)$ est :

$$\sum_{i=1}^{q} |x_i - x'_i|.$$

Pour des raisons de symétrie, on peut supposer $a = (0,\dots,0)$ et $b = (0,\dots,0,1)$. Les $(q-1)$ chemins de longueur 3 liant a à b sont :

$$(0,\dots,0) \to (0,\dots,0,1,0,\dots,0) \to (0,\dots,0,1,0,\dots,0,1) \to (0,\dots,0,1)$$

où le 1 occupe tout à tour les places 1 à $(q-1)$. Deux tels chemins n'ont en commun que les sommets a et b. En leur rajoutant l'arête $[ab]$, on obtient $(q-1)$ lacets de longueur quatre. Ils sont clairement géodésiques, ce sont les seuls lacets simples de longueur quatre contenant $[ab]$.

De même on peut supposer $c = (1,0,\dots,0)$, $d = (0,\dots,0)$ et $e = (0,\dots,0,1)$. Les $(q-2)$ chemins de longueur quatre liant c à e sont :

$$(1,0,\dots,0) \to (1,0,\dots,0,1,0,\dots,0) \to (1,0,\dots,0,1,0,\dots,0,1)$$
$$\to (0,\dots,0,1,0,\dots,0,1) \to (0,\dots,0,1)$$

où le 1 occupe tout à tour les places 2 à $(q-1)$. Le chemin de longueur deux liant c à e est :

$$(1,0,\dots,0) \to (1,0,\dots,0,1) \to (0,\dots,0,1).$$

Deux tels chemins n'ont en commun que les sommets c et e. En leur rajoutant les arêtes $[cd]$ et $[de]$, on obtient $(q-2)$ lacets de longueur 6 et un lacet de longueur 4. Ils sont clairement géodésiques et ce sont les seuls lacets géodésiques de ce type contenant $[cd]$ et $[de]$. □

3. Preuve du théorème.

L'inclusion de $A(p,q)$ dans $X(p,q)$ étant une quasi-isométrie, elle induit un plongement quasi-conforme de $\partial A(p,q)$ dans $\partial X(p,q)$, aussi d'après 1.7 c) :

$$\dim C\big(\partial A(p,q)\big) \leq \dim C\big(\partial(p,q)\big)$$

et il suffit de minorer $\dim C\big(\partial A(p,q)\big)$.

Le bord de $A(p,q)$ est homéomorphe à la limite projective des $\partial A^n(p,q)$, donc homéomorphe au produit de K_1 et d'un intervalle. Le paramétrage naturel de K_1 est :

$$K_1 = \big\{1,2,\dots,q-1\big\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la famille de courbes $\{\gamma_i, i \in K_1\}$ de $\partial A(p,q)$ paramétrée par K_1. Donnons à chaque élément de $\{1,\dots,q-1\}$ la probabilité $1/(q-1)$ et notons μ la mesure de probabilité induite sur K_1 puis sur $\mathcal{C}$.

Afin d'exhiber une métrique appropriée dans la classe quasi-conforme de $\partial A(p,q)$, considérons $\mathcal{G}(p,q)$ le 1-complexe simplicial quasi-isométrique à $A(p,q)$ obtenu de la façon suivante :

- Ses sommets sont les 2-cellules de $A(p,q)$.

- Deux sommets sont reliés par une arête si les 2-cellules correspondantes ont une arête ou un sommet en commun. Le complexe $\mathcal{G}(p,q)$ est muni de la métrique de longueur qui donne à chacune de ses arêtes la longueur 1.

Notons x_0 le sommet de $\mathcal{G}(p,q)$ correspondant à $A^0(p,q)$. Puisque $A^n(p,q)$ est l'étoile de $A^{n-1}(p,q)$ dans $A(p,q)$, la boule de $\mathcal{G}(p,q)$ de centre x_0 et de rayon n est naturellement en correspondance avec $A^n(p,q)$. Soit d une métrique visuelle de paramètre a sur $\partial\mathcal{G}(p,q)$ ($\simeq \partial A(p,q)$). Estimons la constante α du lemme 1.6.

Pour $i=(i_k)_{k=1}^{+\infty}$ et $j=(j_k)_{k=1}^{+\infty}$ deux éléments de K_1, définissons :

$$|i-j| = a^{-m(i,j)}$$

avec

$$m(i,j) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid i_k = j_k \ \forall k \in \{1,\dots,n\}\}.$$

Soit aussi :

$$|\gamma_i - \gamma_j| = \inf\{d(x,y) \mid x \in \gamma_i, y \in \gamma_j\}.$$

Pour des raisons de connexité, toute géodésique de $\mathcal{G}(p,q)$ reliant γ_i à γ_j passe par la boule de centre x_0 et de rayon $m(i,j)$. Donc par définition de d, on a pour une certaine constante C indépendante de i et j :

$$|\gamma_i - \gamma_j| \geq C|i-j|.$$

On en déduit l'existence d'une constante A telle que pour toute boule B de $\partial\mathcal{G}(p,q)$ de rayon r :

$$\mu\{\gamma \in \mathcal{C} \mid \gamma \cap B \neq \emptyset\} \leq Ar^{\alpha}$$

avec

$$\alpha = \log_a(q-1).$$

Pour estimer $\tau = \dim_P\big(\partial\mathcal{G}(p,q), d\big)$, on procède comme suit. D'après le lemme 2.8.1, partent au plus $5(q-1)p$ arêtes de chaque sommet de $\mathcal{G}(p,q)$.

Étiquettons chaque arête orientée issue d'un même sommet par un symbole différent appartenant à $\{1, 2, \ldots, 5(q-1)p\}$. Choisissons aussi pour chaque point ξ de $\partial\mathcal{G}(p,q)$ un rayon géodésique $r(\xi)$ de $\mathcal{G}(p,q)$ issu de x_0 et d'extrémité ξ. Les étiquettes permettent de représenter $r(\xi)$ de manière univoque par un élément de :

$$K' = \big\{1, 2, \ldots, 5(q-1)p\big\}^{\mathbb{N}^*}.$$

On obtient ainsi une injection de $\partial\mathcal{G}(p,q)$ dans K'. Soit E son image dans K'. Munissons K' de la métrique suivante : pour $i = (i_k)_{k=1}^{+\infty}$ et $j = (j_k)_{k=1}^{+\infty}$ appartenant à K' soit :

$$|i - j| = a^{-m(i,j)}$$

où $m(i,j) = \sup\big\{n \in \mathbb{N} \mid j_k = i_k \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n\}\big\}$. Par définition de la métrique d sur $\partial\mathcal{G}(p,q)$, la bijection

$$(E, |\ |) \longrightarrow \big(\partial\mathcal{G}(p,q), d\big)$$

est lipschitzienne. Donc :

$$\dim_P\big(\partial\mathcal{G}(p,q) \leq \dim_P(E, |\ |) \leq \dim_P(K', |\ |) \leq \log_a 5(q-1)p$$

c'est-à-dire $\tau \leq \log_a(q-1) + \log_a 5p$. Dès lors, le lemme 1.6 donne :

$$\dim C\big(\partial A(p,q)\big) \geq \frac{\tau}{\tau - \alpha} \geq \frac{\log_a(q-1) + \log_a 5p}{\log_a 5p} \geq \frac{\log(q-1) + \log 5p}{\log 5p}$$

car $\dfrac{\tau}{\tau - \alpha}$ est décroissante en τ et $\log_a = \dfrac{\log}{\log a}$. Un calcul élémentaire donne alors la minoration cherchée de $\dim C\big(\partial X(p,q)\big)$ car p est supérieur à 5. □

BIBLIOGRAPHIE

[And] R.D. ANDERSON, A characterization of universal curve and a proof of its homogeneity, Annals of Math., 67 (1958), 313–324.

[Bal] W. BALLMANN, Singular spaces of non-positive curvature, dans « Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov », E. Ghys, P. de la Harpe éd., Progress in Math. 83, Birkhäuser (1990).

[BB] W. BALLMANN and M. BRIN, Polygonal complexes and combinatorial group theory, Geometriae Dedicata, 50 (1994), 165–191.

[Be] N. BENAKLI, Polyèdres hyperboliques, passage du local au global, Thèse, Université Paris-Sud (1992).

[Bo] M. BOURDON, Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace, Prépublication Université Nancy 1, à paraître dans l'Enseignement Mathématique.

[C] M. COORNAERT, Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov, Pacific Journal of Math., 159, n° 2 (1993), 241-270.

[CDP] M. COORNAERT, T. DELZANT et A. PAPADOPOULOS, Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov, Lecture Notes in Math. 1441, Springer Verlag (1991).

[Ch] C. CHAMPETIER, Propriétés statistiques des groupes de présentation finie, Prépublication de l'Institut Fourier, n° 221 (1992).

[Fe] H. FEDERER, Geometric measure theory, Springer (1969).

[G1] M. GROMOV, Hyperbolic groups, in Essays in Group Theory, S.M. Gersten ed., Springer (1987).

[G2] M. GROMOV, Asymptotic invariants for infinite groups, London Math. Society, Lecture Note Series 182 (1993).

[G3] M. GROMOV, Infinite groups as geometric objects, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Varsovia (1983), p. 385–392.

[GH] E. GHYS et A. HAEFLIGER, Groupes de torsion, dans « Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov », E. Ghys et P. de la Harpe éd., Progress in Math. 83, Birkhäuser (1990), p. 215–226.

[GP] M. GROMOV and P. PANSU, Rigidity of lattices : An introduction, in « Geometric Topology : Recent Developments », P. de Bartolomeis, F. Tricerri eds, Lecture Notes in Math. 1504 (1991).

[Ha] F. HAGLUND, Les polyèdres de Gromov, Thèse Université Lyon I (1992).

[P1] P. PANSU, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétri-ques de rang un, Annals of Math., 129 (1989), 1–60.

[P2] P. PANSU, Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A.I. Mathematica, 14 (1989), 177–212.

[Pau] F. PAULIN, Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord, Prépublication E.N.S. Lyon n° 96 (1993).

[V] J. VÄISÄLÄ, Quasimöbius maps, J. Analyse Math., 44 (1984/85), 218–234.

Manuscrit reçu le 16 mai 1994,
révisé le 4 novembre 1994.

Marc BOURDON,
Université Nancy I
Département de Mathématiques
54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex (France).
Email : bourdon@iecn.u-nancy.fr