ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DOMINIQUE CERVEAU

# Minimaux des feuilletages algébriques de $\mathbb{CP}(n)$

*Annales de l'institut Fourier*, tome 43, n° 5 (1993), p. 1535-1543

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1535_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**43,** 5 (1993), 1535-1543

# MINIMAUX DES FEUILLETAGES ALGÉBRIQUES DE $\mathbb{CP}(n)$

**par Dominique CERVEAU**

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension un sur l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}(n)$. On note $\operatorname{Sing}\mathcal{F}$ l'ensemble singulier de $\mathcal{F}$; c'est un ensemble algébrique non vide de codimension supérieure ou égale à deux. Une variante du théorème de Chow affirme que $\mathcal{F}$ est donné par une équation de Pfaff $\omega = 0$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x)dx_i$$

où les $a_i$ sont des polynômes homogènes de même degré $\nu$ satisfaisant

(i) $\omega \wedge d\omega = 0$ (condition d'intégrabilité)

(ii) $\sum x_i a_i(x) = 0$ (condition d'Euler)

(iii) $\operatorname{cod}(S(\omega) = \{x, a_i((x)) = 0\}) \geq 2$.

Si $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}(n)$ désigne la projection canonique, alors $\operatorname{Sing}\mathcal{F} = \pi(S(\omega) - \{0\})$.

DÉFINITION. — *Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{CP}(n) - \operatorname{Sing}\mathcal{F}$ est un ensemble minimal s'il est compact dans $\mathbb{CP}(n) - \operatorname{Sing}\mathcal{F}$, invariant par $\mathcal{F}$ – i.e. si $m \in M$ la feuille $\mathcal{L}_m$ de $\mathcal{F}$ par $m$ est contenue dans $M$ – et minimal au sens de l'inclusion.*

La question de l'existence de minimaux sur $\mathbb{CP}(n)$ est une question actuellement ouverte. C'est elle qui motive le présent travail.

*Mots-clés :* Feuilletages algébriques – Holonomie – Ensembles minimaux.
*Classification A.M.S. :* 32L30 – 62S65 – 34A20.

## 1. Variétés de Lévi.

Soit $M^{2n-1} \subset \mathbb{CP}(n)$ une sous-variété lisse réelle de codimension réelle un. En chaque point $m \in M^{2n-1}$ l'espace tangent $T_m M^{2n-1} \subset T_m \mathbb{CP}(n) \cong \mathbb{C}^n$ contient un unique hyperplan complexe $E_m \cong \mathbb{C}^{n-1}$ ; si le champ de plan $m \mapsto E_m$ est intégrable on dit que $M^{2n-1}$ est une hypersurface de Lévi.

THÉORÈME [L]. — *Il n'existe pas d'hypersurfaces de Lévi de l'espace* $\mathbb{CP}(n)$ *pour* $n \geq 3$.

Pour $n = 2$ on ne sait pas si telles hypersurfaces existent.

## 2. Propriétés de l'ensemble minimal.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{CP}(n)$ et $M$ un minimal de $\mathcal{F}$. Les propriétés suivantes sont établies ou se déduisent de [CLS] et [BLM].

PROPOSITION.

1) *L'ensemble* $M$ *est d'intérieur vide;*

2) $M$ *est unique, i.e.* $\mathcal{F}$ *possède au plus un seul minimal;*

3) *Soit* $H \subset \mathbb{CP}(n)$ *une hypersurface algébrique de* $\mathbb{CP}(n)$ *alors* $H \cap M \neq \emptyset$.

*Remarque.* — Soient $m \in M$ et $\mathcal{L}_m$ la feuille de $\mathcal{F}$ par $m$; alors $M = \overline{\mathcal{L}}_m$.

THÉORÈME. — *Il existe* $m \in M$ *tel que la feuille* $\mathcal{L}_m$ *ait de l'holonomie hyperbolique.*

Le théorème indique que l'image du morphisme d'holonomie

$$\mathrm{Hol} : \pi_1(\mathcal{L}_m, m) \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

contient un élément $f : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}, 0$ tel que $|f'(0)| < 1$.

Une feuille $\mathcal{L}_m$ satisfaisant la conclusion du théorème sera dite porteuse d'hyperbolicité.

## 3. Résultats.

On se propose d'établir le :

THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un de l'espace projectif $\mathbb{CP}(n)$. Si $\mathcal{F}$ possède un ensemble minimal $M$ et si $\mathcal{L}_m$ est une feuille porteuse d'hyperbolicité, $\mathcal{L}_m \subset M$, on a l'alternative suivante : ou bien*

i) *$M$ est une hypersurface de Lévi*

*ou bien*

ii) *l'image du morphisme* $\mathrm{Hol}:\pi_1(\mathcal{L}_m, m) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ *est un groupe abélien linéarisable.*

Évidemment si la dimension $n$ est supérieure ou égale à 3 seule subsiste la partie ii) : les porteurs d'hyperbolicité ont leur holonomie abélienne linéarisable. Nous verrons de plus que dans le cas i) $M$ est localement défini par l'annulation de la partie réelle d'une fonction holomorphe.

## 4. Secteurs de Nakaï.

La description des groupes non résolubles de difféomorphismes faite par Isao Nakaï dans [N] est l'argument essentiel de la démonstration du théorème.

Soit $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$; on appelle séparatrice de $G$ un germe de courbe analytique réelle $\gamma \subset \mathbb{C}, 0$ invariant par $G$, *i.e.* invariant par tous les éléments de $G$. Si $G$ a un nombre fini de séparatrices $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ on appelle secteurs de Nakaï de $G$ les composantes connexes du complément de $\gamma = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$ dans $\mathbb{C}, 0$.

Soit $F$ un germe d'ensemble à l'origine de $\mathbb{C}$. On dit que $G$ agit densément sur $F$ s'il existe un sous-groupe $G_F \subset G$, $G_F$ engendré par un nombre fini d'éléments $g_1, \ldots, g_N$ tels que :

1) $G_F(F) \subset F$.

2) Il existe des représentants $\widetilde{F}$, $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_N$, $\tilde{g}_i$ définis au voisinage de $\widetilde{F}$ tels que pour tout point $x \in \widetilde{F}$ l'orbite de $x$ suivant le pseudo-groupe $\widetilde{G}_F = \langle \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_N \rangle$ soit dense dans $\widetilde{F}$.

Le résultat fondamental suivant est dû à Nakaï.

THÉORÈME [N]. — *Soit $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ un sous-groupe non résoluble. Alors ou bien $G$ agit densément sur $\mathbb{C},0$ ou bien $G$ a un nombre fini de séparatrices $\gamma_1,\dots,\gamma_n$. Si $\gamma=\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_n$ alors $\gamma$ est holomorphiquement isomorphe à $\{\mathrm{Re}\, z^n=0\}$; de plus $G$ agit densément sur chaque secteur de Nakaï et sur chaque composante connexe des séparatrices.*

## 5. Sous-groupes résolubles de $\mathrm{Diff}\,\mathbb{C},0$.

On note $\mathcal{H}_1$ le groupe des transformations homographiques fixant l'origine de $\mathbb{C}$ :

$$\mathcal{H}_1=\left\{z\longrightarrow\frac{az}{1+bz},\ a\in\mathbb{C}^*,\ b\in\mathbb{C}\right\}$$

et $\mathcal{H}_p$ son revêtement ramifié par $z\mapsto z^p$ :

$$\mathcal{H}_p=\left\{z\longrightarrow\frac{az}{\sqrt[p]{1+bz^p}},\ a\in\mathbb{C}^*,\ b\in\mathbb{C},\ \sqrt[p]{1}=1\right\}.$$

THÉORÈME [CM] [N]. — *Soit $G$ un sous-groupe résoluble non abélien de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$; alors $G$ est formellement conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{H}_p$, pour un certain $p$.*

Notons $E_{-1,1}$ le sous-groupe de $\mathcal{H}_1$ engendré par $z\mapsto -z$ et $z\mapsto\frac{z}{1-z}$, puis $E_{\omega,p}$ le sous-groupe de $\mathcal{H}_p$ engendré par $z\mapsto\omega\cdot z$ et $z\mapsto\frac{az}{\sqrt[p]{1+bz^p}}$ où $\omega$ est une racine $p^{\text{ième}}$ de $-1$.

Un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ est dit exceptionnel s'il est formellement conjugué à l'un des groupes $E_{\omega,p}$.

THÉORÈME [CM]. — *Soient $G_i\subset\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$, $i=1,2$ deux sous-groupes formellement conjugués par un difféomorphisme formel $\hat{h}$. Si $G_1$ est non abélien et non exceptionnel alors $\hat{h}$ converge.*

On en déduit aisément le :

COROLLAIRE. — *Soit $G\subset\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ un sous-groupe résoluble non abélien; si $G$ contient un élément hyperbolique alors $G$ est holomorphiquement conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{H}_p$ pour un certain $p$.*

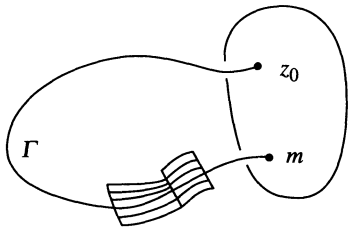
## 6. Démonstration du théorème.

Soient $\mathcal{L}_m \subset M$ une feuille (porteuse d'hyperbolicité ou non) et $D$ un disque centré en $m$ transverse à $\mathcal{F}$ au voisinage de $m$. On note $L_m = \mathcal{L}_m \cap D$.

L'ensemble $L_m - \{m\}$ s'accumule en $m$ et est autosimilaire au sens suivant : si $z_0 \in L_m - \{m\}$ il existe un difféomorphisme $\varphi_{z_0} : V(m) \to V(z_0)$ d'un voisinage de $m$ dans $D$ dans un voisinage de $z_0$ dans $D$ tel que

$$\varphi_{z_0}(L_m \cap V(m)) = L_m \cap V(z_0).$$

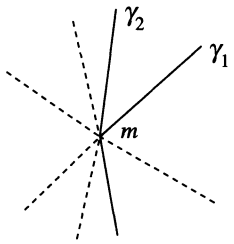
On constate ce point en traçant un chemin $\Gamma$ joignant $m$ à $z_0$ dans $\mathcal{L}_m$ et en écrivant le long de $\Gamma$ la structure produit induite par $\mathcal{F}$.




De plus $L_m$ est dense dans $M \cap D$ et $M \cap D$ est autosimilaire aux points de $L_m$.

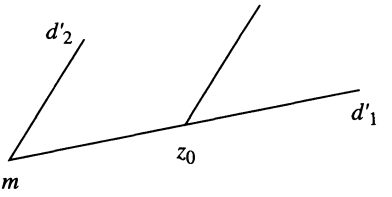
PROPOSITION. — *Si l'image de* Hol : $\pi_1(\mathcal{L}_m, m) \mapsto \mathrm{Diff}(D, m)$ *est non résoluble alors* $M$ *est une hypersurface de Lévi.*

*Preuve.* — On note $G$ l'image de Hol. Par construction des difféomorphismes d'holonomie le germe $M \cap D, m$ est invariant par l'action de $G$. En résulte que $G$ ne peut agir densément sur $D, m$, sinon $M$ serait d'intérieur non vide. Par suite, $G$ possède un nombre fini de séparatrices $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ et de secteurs de Nakaï $S_1, \ldots, S_{2n}$. Comme $G$ agit densément sur les secteurs de Nakaï les intersections $S_i \cap (M \cap D, m)$ sont vides, sinon encore une fois $M$ serait d'intérieur non vide. Puisque $G$ agit densément sur chaque composante connexe de $\gamma - \{0\}$, $\gamma = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$, nécessairement $M \cap D, m$ est constitué d'un certain nombre d'adhérences de composantes connexes. Quitte à faire agir un difféomorphisme de $D, m$ on peut suivant Nakaï supposer que $M \cap D, m$ est constitué d'un certain nombre de demi-droites.




AFFIRMATION. — *$M \cap D, m$ est une droite (un germe de).*

Soit $d'_1$ une demi-droite contenue dans $M, m$ et $z_0$ un point de $L_m \cap d'_1$, $z_0$ voisin de $m$. Supposons $D \cap M, m = d'_{1,m}$; d'après l'autosimilarité ce cas ne peut se présenter; en effet, $D \cap M, z_0$ contient un germe de droite. Par suite, $M \cap D, m$ contient d'autres demi-droites. Soit $d'_2$ une telle demi-droite. Montrons que $d'_1$ et $d'_2$ engendrent la même droite $d$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; d'après l'autosimilarité $M, z_0 \cap D$ contiendra une courbe isomorphe à deux demi-droites (fig.) non alignées. L'une de ces demi-droites, pour $z_0$ suffisamment petit, entre dans un secteur de Nakaï.




Ceci impliquant encore une fois que $M$ est d'intérieur non vide.

Finalement $D \cap M, m$ est défini par les zéros de la partie réelle d'une submersion définie en $m$; par suite au voisinage de $m$ il existe un polydisque $U_m$ et une fonction holomorphe $f_m \in \mathcal{O}(U_m)$, $f_m$ submersion, telle que :

$$U_m \cap M, m = \{\mathrm{Re}\, f_m = 0\}.$$

La densité de $\mathcal{L}_m$ dans $M$ et la compacité de $M$ permettent de sélectionner un recouvrement $(U_i)$ de $\mathbb{CP}(n)$ et des submersions holomorphes $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ tel que $M \cap U_i = \{\mathrm{Re}\, f_i\}$.

Ceci implique que $M$ est une variété de Lévi. □

*Remarque.* — La proposition ci-dessus n'utilise pas l'hyperbolicité; elle est valable pour toute feuille de $M$.

PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{L}_m \subset M$ une feuille porteuse d'hyperbolicité; si l'image de Hol : $\Pi_1(\mathcal{L}_m, m) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ est résoluble non abélienne alors $M$ est une hypersurface de Lévi.*

*Preuve.* — Soit $D$ un disque transverse à $\mathcal{F}$ en $m$ sur lequel on représente l'holonomie; soit $G \subset \mathrm{Diff}(D, m)$ l'image de Hol. D'après le corollaire du §5, on peut supposer que $G \subset \mathcal{H}_p$, et nous supposerons pour plus de commodité que $p = 1$, les raisonnements n'étant pas altérés par une ramification. Puisque $\mathcal{L}_m$ porte de l'hyperbolicité et est non abélienne on peut supposer que $G$ contient les transformations $z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| < 1$ et $z \mapsto \dfrac{z}{1-z}$; on note $G_1$ le groupe engendré par ces deux éléments.

LEMME 1. — *Si $\lambda$ est réel, le groupe $G_1$ agit densément sur les demi-droites $\mathbb{R}^+_{,0}$ et $\mathbb{R}^-_{,0}$.*

*Preuve.* — Comme $|\lambda| < 1$ le groupe $G_1$ contient de petits éléments paraboliques; le sous-groupe $G_1'$ de $G_1$ constitué des éléments paraboliques agit alors densément sur $\mathbb{R}^{\pm}_{,0}$. □

Remarquons que l'adhérence du groupe $G_1'$ est précisément le groupe $\left\{\dfrac{z}{1-tz},\ t \in \mathbb{R}\right\}$. Ceci implique que l'adhérence de $G_1$ est le groupe $\left\{\dfrac{\lambda^n z}{1-tz},\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. En résulte que tout germe d'ensemble fermé $F \subset \mathbb{C}, 0$ invariant par $G_1$ est ou bien un demi-axe $\mathbb{R}^+_{,0}$ ou $\mathbb{R}^-_{,0}$, ou bien contient une infinité d'arcs de cercles tangents en 0 à $\mathbb{R}$ (fig.) contenant $\mathbb{R}^{\pm}_{,0}$ dans leur adhérence. De plus, $F$ contient $\mathbb{R}^+_{,0}$ ou $\mathbb{R}^-_{,0}$.

LEMME 2. — *Si $\lambda$ est réel, $M$ est une hypersurface de Lévi.*

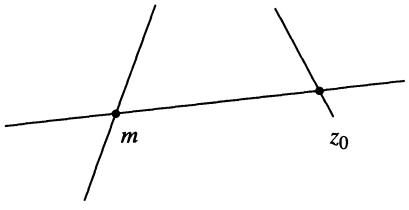
*Preuve.* — On adopte les notations du cas non résoluble. D'après la remarque suivant le lemme 1, on peut supposer que $\mathbb{R}^+_{,0}$ est contenu dans $M \cap D, m$ et par un argument déjà employé $M \cap D, m$ contient toute la droite réelle $\simeq \mathbb{R}^+_{,0}$ passant par $m$. Si $M \cap D, m$ coïncide avec cette droite on conclut que $M$ est de Lévi. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; alors en $m$, $M \cap D, m$ contient une infinité d'arcs de cercles. Mais si $z_0 \in \mathbb{R}^+_{,0}$ est un point

voisin de $0 \simeq m$, $z_0 \in \mathcal{L}_m$ alors par autosimilarité $M \cap D, z_0$ contient un arc de courbe $\Delta$ distinct de $\mathbb{R}^+_{,0}$ (fig.); cet arc sera génériquement transverse aux arcs précédents.

L'adhérence de l'orbite de $\Delta$ sous l'action de $G_1$ contiendra alors un ouvert et $M$ ne sera pas d'intérieur vide (ce passage est en fait un peu délicat car on ne doit pas travailler avec $G_1$ agissant sur la sphère de Riemann entière, mais les objets étant purement locaux on doit faire les calculs d'orbites en restant dans un disque fixe).

LEMME 3. — *$\lambda$ est réel.*

*Preuve.* — Si $\lambda$ est non réel mais d'argument $2\Pi$-rationnel, alors $\lambda^n$ pour un certain $n$ est réel. Par un argument similaire au lemme 2, on constate que $M \cap D, m$ contient au moins deux droites.




Mais en un point $z_0$ voisin de $m$, on retrouvera une telle configuration et de nouveau on montrera que $M$ est d'intérieur non vide. Si $\lambda$ est d'argument $2\Pi$-irrationnel alors tout fermé $F$ invariant par $G_1$ en 0 est $\mathbb{C}, 0$ tout entier, d'où le lemme.

Ceci achève la démonstration du théorème.

*Remarque.* — Notre résultat s'applique en fait à tout feuilletage holomorphe d'une variété holomorphe possédant une feuille contenue dans un minimal et porteuse d'hyperbolicité.

## BIBLIOGRAPHIE

[BLM] Ch. BONATTI, LANGEVIN, R. MOUSSU, Feuilletages de $\mathbb{CP}(n)$ : de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels, Publ. Math. I.H.E.S., n° 75 (1992), 123–134.

[CLS] C. CAMACHO, A. LINSNETO, P. SAD, Minimal set of foliations on complex projective spaces, Publ. Math. I.H.E.S., 68 (1988), 187–203.

[CM] D. CERVEAU, R. MOUSSU, Groupes d'automorphismes de $\mathbb{C},0$ et équations différentielles $ydy + \cdots = 0$, Bull. S.M.F., 116 (1988), 459–488.

[L] A. LINSNETO, Préprint, Impa Rio (1993).

[N] I. NAKAï, Separatix for conformal transformation groups of $\mathbb{C},0$, Preprint Hokkaïdo (1992).

Dominique CERVEAU,
Université de Rennes I
IRMAR
Campus de Beaulieu
F–35042 Rennes Cedex.