ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC PHAM

Principe de Huygens et trajectoires classiques complexes ou Balian et Bloch vingt ans après

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 5 (1993), p. 1485-1508

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1485_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 5 (1993), 1485–1508

PRINCIPE DE HUYGENS ET TRAJECTOIRES COMPLEXES OU BALIAN ET BLOCH VINGT ANS APRÈS

par Frédéric PHAM

Dans une série de cinq articles publiés entre 1970 et 1974 dans Annals of Physics, R. Balian et C. Bloch étudient le spectre des ondes stationnaires de haute fréquence dans une cavité ou dans un puits de potentiel : ils commencent par décrire le comportement macroscopique du spectre (fluctuations de densité à grande échelle) en termes de rayons lumineux (ou trajectoires classiques) suivant les lois de l'optique géométrique (ou de la mécanique classique) ; puis, sous des hypothèses d'analyticité, ils montrent comment la prise en compte des trajectoires *complexes* permet de décrire des propriétés plus fines du spectre, et même en principe de le calculer exactement. Très riches en idées au statut mathématique incertain, ces articles n'ont pas suffisamment retenu l'attention des mathématiciens. Une exception notable est Y. Colin de Verdière, dont un article célèbre [Co] s'appuie de façon essentielle sur des idées de [BB1]. Dans son sillage, et grâce aux travaux de mathématiciens comme Chazarain [Ch], Duistermaat et Guillemin [DG], le sujet est devenu un chapitre de la théorie générale des opérateurs intégraux de Fourier de Hörmander, chapitre suffisamment riche pour que des mathématiciens puissent en faire leur spécialité (en ignorant parfois jusqu'à l'existence des articles de Balian et Bloch !).

Mais cette annexion à une belle théorie mathématique eut pour contrepartie d'occulter le rôle des trajectoires *complexes* (*), idée qui était l'un des apports majeurs de Balian et Bloch.

(*) Sauf peut-être dans l'école mathématique russe : au second colloque international de Géométrie de Moscou (mai 1993), M.B. Tabanov vient de m'apprendre l'existence d'anciens travaux de Lazutkin dans les années 80 (résumés dans [LT]) où des « trajectoires de billard » complexes étaient utilisées dans le calcul du spectre de l'opérateur de Laplace dans une cavité.

Mots-clés : Principe de Huygens – Ondes sphériques – Fonction de Green – Séries asymptotiques de type Gevrey – Méthodes du col à plusieurs variables – Résurgence.
Classification A.M.S. : 32 – 35 – 41 – 78 – 81.

Cette idée est aujourd'hui bien comprise dans le cas d'une seule dimension d'espace (pour l'équation de Schrödinger à une dimension), et c'est encore d'un physicien, A. Voros, qu'est venue l'impulsion décisive. En essayant d'expliciter, dans le cas de l'oscillateur quartique $V(q) = q^4$, la façon dont les solutions *exactes* de l'équation de Schrödinger pouvaient être codées dans le domaine complexe par des combinaisons de développements formels du type BKW (développements semi-classiques complexes), Voros découvrait que la combinatoire de ce codage était gouvernée par un système finitaire de relations qu'il baptisait du terme d'« analytic bootstrap ». En fait (et c'est Bernard Malgrange qui en a averti Voros), la structure qu'il mettait ainsi en évidence était un magnifique exemple d'un type de structure mathématique découvert quelques années auparavant par J. Écalle dans un tout autre contexte : *une structure résurgente.*

Mais mon but ici n'est pas d'exposer ce qui est aujourd'hui bien compris dans le cas unidimensionnel : comment la machinerie d'Écalle lui a permis de démontrer les conjectures de Voros pour un potentiel polynomial quelconque (*cf.* [Ec] [De]) ; comment les « équations de résurgence » de Voros-Écalle peuvent être formulées et démontrées de manière purement géométrique [DDP1] et quelles informations elles nous donnent sur les grandeurs physiques (rôle de « l'effet tunnel » dans le calcul des états liés ou de diffusion : *cf.* [DDP2]). Ce que je voudrais esquisser ici, c'est une méthode d'attaque du problème en dimension supérieure. Avec un peu de recul, tout se ramène à une réflexion sur le « principe de Huygens-Fresnel » dans sa forme originale la plus naïve, remontant à l'époque où l'on ne parlait pas encore d'équations aux dérivées partielles. J'ai toujours été émerveillé par la beauté et l'efficacité de ce principe dans le calcul des phénomènes de diffraction, qu'il s'agisse des exercices élémentaires pour débutants en Physique ou des cas plus compliqués de figures de diffraction dont les modèles locaux (fonctions d'Airy, de Pearcey, etc.) s'obtiennent en habillant par la construction de Huygens-Fresnel les modèles géométriques de singularités de Thom (*cf.* [Ar], [Be], [BNW], [GG] [AVG],...). Mais tout le monde sait depuis Kirchhoff [BW] que les fonctions d'onde ainsi construites ne sont que des approximations, valables seulement à la limite des hautes fréquences. Les nombreux travaux consacrés à cette question autour des années 80 (*cf.* par exemple le livre d'exposition de M. Taylor [Ta]) ont permis de comprendre de façon exacte, en termes d'optique géométrique « à la Huygens-Fresnel », comment les singularités des fonctions d'onde se propagent avec le temps. Cette description spatio-temporelle des singularités des ondes se traduit en termes d'ondes stationnaires par une description *modulo les fonctions décroissant rapidement avec la fréquence*, le

sens du mot « rapidement » dépendant de ce qu'on entend par « singularité » (selon qu'on travaille modulo les fonctions C^∞, comme la plupart des auteurs, ou modulo les fonctions analytiques). L'idée essentielle de Balian et Bloch, que je voudrais cerner ici, est que la solution de problèmes ondulatoires analytiques devrait pouvoir être reconstruite *exactement* (modulo rien du tout !) comme une superposition convenable d'ondes sphériques complexifiées, selon une version *complexifiée* du principe de Huygens-Fresnel.

Remerciements. — Mes idées sur ce sujet se sont peu à peu clarifiées lors de diverses conférences où j'ai été invité, notamment pendant une visite en Inde en hiver 1992 (organisée dans le cadre du CEFIPRA), puis au Colloque International de Géométrie de Moscou en mai 1993. Je remercie mes interlocuteurs lors de ces visites, ainsi que J. Chazarain, Y. Colin de Verdière, J.-C. Nosmas pour d'utiles discussions et commentaires.

0. QU'EST-CE QU'UNE ONDE SPHÉRIQUE ?

0.1. Ondes sphériques dans un milieu homogène isotrope.

Dans tout cet exposé, je me limiterai au cas de l'espace à trois dimensions, où les ondes sphériques sont données par une formule simple

$$G(q,q') = \frac{e^{ik\|q-q'\|}}{4\pi\|q-q'\|}, \tag{0.0}$$

où $q' \in \mathbb{R}^3$ est le point « source » de l'onde ; $q \in \mathbb{R}^3$ est le point où l'onde est observée ; $\|\ \|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$; k est un nombre réel positif, le « nombre d'onde ». Il est agréable de voir G comme noyau intégral de l'opérateur inverse de l'opérateur de Helmholtz, c'est-à-dire comme solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(\Delta + k^2)G = \delta(q-q'), \tag{0.1}$$

où Δ est le laplacien par rapport à q, et δ est la « fonction delta » de Dirac. Mais bien entendu l'équation (0.1) admet une infinité de solutions, parmi lesquelles G pourra être caractérisée par son comportement asymptotique quand $\|q\|$ tend vers l'infini.

0.2 Cas d'un milieu inhomogène.

Le cas d'un milieu inhomogène diffère du cas 0.1 par le fait que la constante k^2 dans (0.1) doit être multipliée par une fonction lentement variable de q :

$$(\Delta + k^2 W(q))G = \delta(q - q'), \tag{0.2}$$

où la fonction W sera supposée aussi régulière qu'on voudra. Dans le contexte de l'optique W est essentiellement (dans des unités convenables) le carré de l'indice de réfraction du milieu. Dans le contexte de la mécanique quantique où $k = 1/\hbar$ (l'inverse de la constante de Planck), W est l'énergie cinétique :

$$W(q) = E - V(q)$$

(E désigne l'énergie totale et V l'énergie potentielle).

Pour achever de caractériser G, on peut adjoindre à l'équation (0.2) des conditions asymptotiques quand $\|q\|$ tend vers l'infini, imposant à G un comportement exponentiellement décroissant ou oscillant selon que $W(q)$ est négatif ou positif au voisinage de l'infini ; si le système étudié est confiné dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, les conditions asymptotiques seront remplacées par des conditions au bord (de Dirichlet ou de Neumann, ou autres). La détermination d'une telle fonction G est l'un des premiers grands problèmes difficiles de la théorie des équations aux dérivées partielles, auquel est attaché le nom de Green. Mais la « fonction de Green » ainsi définie *n'est pas ce que j'ai envie d'appeler une onde sphérique* : en effet dans l'esprit de Huygens, qui voyait une onde comme la résultante des ébranlements locaux constitués par les « ondes sphériques », la notion d'onde sphérique devrait être une notion *simple*, définissable *localement au voisinage du point source* sans qu'il soit nécessaire de savoir ce qui se passe loin.

Le but de ce qui suit est de suggérer qu'une telle définition est implicitement contenue dans les articles de Balian et Bloch. Pour simplifier l'exposé (et aussi faute d'y avoir suffisamment réfléchi), je ne m'intéresserai pas aux problèmes « avec bord », et concentrerai mon attention sur les cas étudiés dans [BB2] et [BB3] : l'équation de Schrödinger (ou de Helmholtz avec indice de réfraction variable) dans tout $\mathbb{R}^3$, la fonction W étant une fonction entière de q suffisamment régulière à l'infini (par exemple une fonction polynomiale). Dans cette situation, Balian et Bloch se donnent comme ingrédient de base ce que j'appellerai une « onde sphérique approchée »

$$G_0(q, q') = a_0(q, q')\, \mathrm{e}^{ikS(q,q')}, \tag{0.3}$$

dont la phase S et l'amplitude a_0 sont définies ainsi.

(i) q étant choisi assez proche de q', $S(q,q')$ est la longueur de la géodésique minimale qui joint q' à q pour la métrique définie par :

$$\mathrm{d}S^2 = W(q)\|\mathrm{d}q\|^2. \tag{0.4}$$

Dans le contexte de l'optique, cette géodésique est un rayon lumineux, et $S(q,q')$ est la «distance optique»; dans le contexte de l'équation de Schrödinger la géodésique est une trajectoire classique, et $S(q,q')$ est l'intégrale d'action réduite le long de cette trajectoire.

(ii) $a_0(q,q')$ est la solution de «l'équation de conservation»

$$\operatorname{div}(a_0^2 \operatorname{grad} S) = 0 \tag{0.5}$$

qui vérifie, quand $q \to q'$, la condition aux limites :

$$a_0 \sim \frac{1}{4\pi} S(q,q'). \tag{0.6}$$

Dans l'interprétation classique où a_0^2 représente la densité d'un nuage de particules se propageant selon les lois de la mécanique classique, l'équation de conservation (0.5) exprime la conservation de la quantité de particules. Jointe à la condition aux limites (0.6), elle détermine entièrement a_0, dont on peut donner une expression explicite en termes de dérivées partielles secondes de S (*cf.* [BB2]).

1. LE DÉVELOPPEMENT DE DIFFUSION MULTIPLE DE BALIAN ET BLOCH

1.0. Calculs formels.

«L'onde sphérique approchée» G_0 du paragraphe précédent a l'avantage d'être un objet simple, défini de façon purement locale. Son défaut est de ne pas être solution de l'équation (0.2)! Toutefois, en désignant par P l'opérateur de «Helmholtz-Schrödinger»

$$P = \Delta + k^2 W(q), \tag{1.0}$$

on a (au sens des distributions)

$$PG_0 = \delta + \Gamma, \tag{1.1}$$

où le terme correctif Γ est une *fonction localement intégrable*, de forme analogue à G_0 :

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} \Gamma(q,q') = \alpha(q,q')\,\mathrm{e}^{ikS(q-q')}, \\ \alpha \sim \dfrac{\mathrm{C^{te}}}{S(q,q')} \quad \text{quand} \quad q \to q'. \end{cases}$$

Pour toute solution G de l'équation (0.2), on aura donc :

$$\text{(1.3)} \qquad P(G - G_0) = \Gamma.$$

S'il est permis d'interpréter G comme noyau de l'opérateur intégral « inverse » de l'opérateur différentiel P, on peut récrire cette équation ainsi :

$$\text{(1.4)} \qquad G - G_0 = G * \Gamma,$$

où $G*$ désigne l'opérateur intégral de noyau G, c'est-à-dire celui qui à une fonction F de la variable q associe la fonction $G * F$ définie par :

$$\text{(1.5)} \qquad (G * F)(q) = \int G(q,q')F(q')\,\mathrm{d}^3q'.$$

Ici, les mathématiciens sont priés de ne pas demander sur quels espaces de fonctions les opérateurs opèrent, ni en quel sens l'intégrale qui vient d'être écrite converge, ni a fortiori pourquoi elle définit l'opérateur inverse de P ! Balian et Bloch ne sont pas muets sur cette question, mais je vais être amené à y répondre plus loin de façon légèrement différente de la leur.

En itérant l'équation (1.4), on obtient pour G le développement

$$\text{(1.6)} \qquad G = G_0 + G * \Gamma = G_0 + G_0 * \Gamma + G_0 * \Gamma * \Gamma + \cdots$$

que Balian et Bloch appellent le *développement de diffusion multiple de G*. Gardant toujours dans notre poche nos scrupules de mathématiciens, nous avons donc obtenu pour la « résolvante » de l'opérateur P la formule « explicite »

$$\text{(1.7)} \qquad G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n\,,$$

où G_n peut s'écrire d'après (0.3), (1.1) et (1.2)

$$G_n = \int e^{ikS(q,q_1,\ldots,q_n,q')} \alpha_n(q,q_1,\ldots,q_n,q')\, d^3q_1 \cdots d^3q_n\,, \tag{1.8}$$

où

$$S(q,q_1,\ldots,q_n,q') = S(q,q_1) + S(q_1,q_2) + \cdots + S(q_n,q'), \tag{1.8'}$$

et

$$\alpha_n(q,q_1,\ldots,q_n,q') = a_0(q,q_1)\alpha(q_1,q_2)\cdots\alpha(q_n,q'). \tag{1.8''}$$

Commentaire. — Dans les calculs qui précèdent, on peut comprendre ainsi le choix de l'approximation initiale G_0 (*cf.* § 0.2) :

(i) la condition (0.4) exprime le fait que PG_0 ne contient pas de terme en k^2 ;

(ii) la condition (0.5) exprime le fait que PG_0 ne contient pas de terme en k ;

(iii) la condition (0.6) est la traduction (en dimension 3) de la condition suivante : *le flux du gradient de a_0 à travers une sphère infinitésimale de centre q' est égal à* 1. Jointe aux deux précédentes, cette dernière entraîne que $PG_0 \equiv \delta$, à une fonction intégrable près de la forme (1.2).

L'existence d'une expression simple G_0 vérifiant à la fois ces trois conditions est une spécificité de la dimension trois (et aussi un). Adapter la construction de Balian et Bloch aux autres dimensions est un problème qui recèle sans doute quelques subtilités.

1.1. Tentative de justification.

A ce stade, il est instructif de mentionner — même si nous allons nous en débarrasser par la suite — les hypothèses que font Balian et Bloch pour tenter de donner un sens aux expressions précédentes. Ils commencent par supposer W « presque réelle », avec une petite partie imaginaire positive (dans le contexte de l'équation de Schrödinger, cela revient à donner une petite partie imaginaire positive au paramètre d'énergie E, le potentiel V étant supposé réel). Sous cette hypothèse, on peut espérer — disent-ils — que la fonction S soit bien définie et non singulière non seulement pour q voisin de q' mais aussi sur tout $\mathbb{R}^3$ (sauf bien sûr en q'), avec une partie imaginaire positive tendant vers $+\infty$ quand q tend vers l'infini.

Ainsi « l'onde sphérique approchée » G_0 est exponentiellement décroissante à l'infini, et il en est de même de l'intégrand dans (1.8), de sorte que l'intégrale converge, et il ne reste plus qu'à justifier la convergence de la série (1.7).

1.2. Une transformation de Laplace.

Pour évaluer l'intégrale (1.8), il est commode de faire une intégration partielle par rapport à la variable $s = S(q, q_1, \dots, q_n, q')$. D'après le principe de moindre action, cette variable atteint son minimum lorsque $q_1, \dots, q_n$ sont situés (dans cet ordre) sur la géodésique qui joint q à q'. On peut ainsi écrire

$$G_n = \int_{S(q,q')}^{\infty} \mathrm{e}^{iks} \boldsymbol{g}_n(q, q'; s)\, \mathrm{d}s \tag{1.9}$$

où

$$\boldsymbol{g}_n(q, q'; s) = \int \delta\big(s - S(q, q_1, \dots, q_n, q')\big) \alpha_n(q, q_1, \dots, q_n, q')\, \mathrm{d}^3 q_1 \cdots \mathrm{d}^3 q_n. \tag{1.9'}$$

En sommant sur n, on trouve ainsi

$$G = a_0\, \mathrm{e}^{ikS} + \int_{S(q,q')}^{\infty} \mathrm{e}^{iks} \boldsymbol{g}(q, q'; s)\, \mathrm{d}s \tag{1.10}$$

où

$$\boldsymbol{g} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{g}_n. \tag{1.10'}$$

La grande idée de Balian et Bloch est que, sous des hypothèses d'analyticité de W, l'intégrand $\boldsymbol{g}$ dans (1.10) *devrait être prolongeable analytiquement dans le plan complexe de la variable s, avec des singularités interprétables comme des actions de trajectoires classiques complexes.*

Mais avant d'en dire plus sur cette idée, je vais la recadrer en me débarrassant des hypothèses parasites 1.1.

2. L'ONDE SPHÉRIQUE MICROLOCALE

Supposant seulement que W est fonction holomorphe de q et q', ce paragraphe affirme l'analyticité locale de la fonction $\boldsymbol{g}$ de 1.2, et propose

une interprétation «microlocale» des calculs formels 1.0, où «microlocal» veut dire local en q et *asymptotique en k modulo des exponentiellements petits*. L'idée essentielle est d'étendre *au domaine complexe* la signification des expressions 1.2.

2.1. Complexification de l'expression (1.9′).

Permettons maintenant à q et q' d'être complexes, et plaçons-nous au voisinage d'un point de $\mathbb{C}^3$ où W est holomorphe non nulle. Il existe alors localement (*cf.* [BB2]) une unique fonction symétrique S des deux variables complexes q et q', solution de l'équation de Hamilton-Jacobi complexe

$$\sum\Big(\frac{\partial S}{\partial q_i}\Big)^2 = W(q), \tag{2.0}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) définie à un signe près, la fonction S est la racine carrée d'une fonction holomorphe sur $U \times U$ (où U est un ouvert assez petit de $\mathbb{C}^3$), s'annulant le long du cône isotrope $\langle q-q'\rangle^2 = 0$, où $\langle q-q'\rangle^2 = x^2+y^2+z^2$, x, y, z désignant les composantes de $(q-q')$;

(ii) S^2 admet un développement convergent

$$S^2(q,q') = \langle q-q'\rangle^2\Big(W\big(\tfrac{1}{2}(q+q')\big) + \cdots\Big), \tag{2.1}$$

où les pointillés «$\cdots$» désignent une fonction holomorphe de q et q', invariante par échange de q et q', nulle sur la diagonale.

Pour q et q' dans le voisinage considéré, posons comme auparavant :

$$S(q, q_1, \ldots, q_n, q') = S(q, q_1) + S(q_1, q_2) + \cdots + S(q_n, q').$$

Pour s assez proche de $S(q,q')$, la condition $S(q, q_1, \ldots, q_n, q') = s$ définit localement une hypersurface complexe $E_n(q, q'; s)$ dans l'espace $\mathbb{C}^{3n}$ des variables $q_1, \ldots, q_n$, et l'intégrale (1.9′) se généralise ainsi :

$$\boldsymbol{g}_n(q, q'; s) = \int_{\varepsilon_n(q,q';s)} \omega_n\,, \tag{2.2}$$

où

$$\omega_n = \frac{\alpha_n(q, q_1, \ldots, q_n, q')\,\mathrm{d}^3q_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}^3q_n}{\mathrm{d}S}\Big|_{E_n(q,q';s)} \tag{2.2′}$$

est la forme différentielle de Leray sur l'hypersurface lisse E_n d'équation $S = s$ (*cf.* [Le]), et où $\varepsilon_n(q,q';s) \in H_{3n-1}(E_n(q,q';s))$ est un cycle convenable de dimension $(3n-1)$ qui, sous les hypothèses de réalité du § 1, n'est autre que la partie réelle de $E_n(q,q';s))$ (*cf.* App. A 1.3).

THÉORÈME. — *Pour q proche de q', en dehors du cône isotrope $\langle q-q'\rangle^2=0$, les fonctions $\boldsymbol{g}_n$ définies par (2.2) sont holomorphes en s dans un même disque de centre $S(q,q')$, et la série $\sum \boldsymbol{g}_n$ converge uniformément dans ce disque.*

Preuve. — Voir l'appendice A2. On verra en 2.4 que ce théorème peut être considéré comme une version complexifiée d'un théorème de Hadamard.

2.2. Rappels sur les classes asymptotiques de type Gevrey 1.

Toutes les « fonctions » de ce paragraphe seront en fait des *germes* de fonctions holomorphes de q, k, définies pour q voisin de q_0 et pour k dans un voisinage sectoriel de l'infini dans la direction réelle positive. On désignera par $\mathcal{E}^0$ le sous-espace des fonctions à croissance moindre qu'exponentielle en k, et par $\mathcal{E}^{<0}$ le sous-espace des fonctions exponentiellement décroissantes en k.

Parmi les éléments de $\mathcal{E}^0$, nous nous intéresserons plus particulièrement à ceux de la forme

$$f(q;k)=f_{-1}(q)+\int_0^{i\tau} \mathrm{e}^{iks}\boldsymbol{f}(q\,;s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.3}$$

où $\boldsymbol{f}$ est un germe de fonction holomorphe au voisinage de $(q_0;0)$, et τ un nombre positif assez petit pour que l'intégrale ait un sens. Il est clair que la classe de f modulo $\mathcal{E}^{<0}$ ne dépend pas du choix de τ; de plus, se donner cette classe équivaut à se donner le couple $(f_{-1},\boldsymbol{f})$, ou encore à se donner le développement asymptotique de f, ce dernier se déduisant du développement de Taylor de $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f}=f_0+f_1s+f_2s^2+\cdots \tag{2.4}$$

par la formule

$$f\propto f_{-1}+0\,!f_0\cdot(ik)^{-1}+1\,!f_1\cdot(ik)^{-2}+2\,!f_2\cdot(ik)^{-3}+\cdots. \tag{2.5}$$

En résumé, nous venons de définir dans $\mathcal{E}^0/\mathcal{E}^{<0}$ un sous-espace $\mathcal{A}$ (qui est en fait une algèbre) isomorphe à l'algèbre des séries formelles (2.5) *« de type Gevrey 1 », c'est-à-dire dont la « transformée de Borel »* (2.4) *a un rayon de convergence non nul.*

Ce sous-espace $\mathcal{A}$ sera appelé espace *des classes asymptotiques.*

Dans la suite, nous désignerons par la même lettre f la fonction (2.3) et l'élément de $\mathcal{A}$ qu'elle définit, c'est-à-dire sa classe modulo $\mathcal{E}^{<0}$. Suivant la terminologie d'Écalle, $\boldsymbol{f}$ est le *mineur* de f ; nous appellerons f_{-1} le *coefficient résiduel de* f.

Nous allons désormais travailler avec des « fonctions d'onde microlocales », de la forme

$$F = f\,\mathrm{e}^{ikS}, \tag{2.6}$$

avec $f \in \mathcal{A}$, la « phase » S étant fonction holomorphe de q. Par définition, une telle F est de la forme :

$$F(q;k) = f_{-1}(q)\,\mathrm{e}^{ikS} + \int_0^{i\tau} \mathrm{e}^{iks}\boldsymbol{f}(q\,;S(q)+s)\,\mathrm{d}s \pmod{\mathcal{E}^{<0}\mathrm{e}^{ikS}}. \tag{2.7}$$

La fonction $s \mapsto \boldsymbol{f}(q\,;S(q)+s)$ (translatée en $S(q)$ du mineur de f) sera appelée *mineur* de F.

2.3. Interprétation microlocale des calculs formels 1.0.

Une variante évidente des définitions 2.2 consiste à remplacer les germes de fonctions de (q,k) par des germes de fonctions de $(q,q';k)$ à dépendance holomorphe en $(q,q',\langle q,q'\rangle;k)$ au voisinage de $(q=q_0,q'=q_0\,;$ $k\to+\infty)$. Continuant à noter $\mathcal{A}$ l'ensemble des classes asymptotiques de tels germes, on peut (*cf.* appendice A.2.2) définir dans $\mathcal{A}\mathrm{e}^{ikS}$ une loi de composition interne notée « $*$ », qui constitue l'interprétation microlocale de la formule (1.5), ou plus exactement de la formule :

$$(G*F)(q,q') = \int G(q,q_1)F(q_1,q')\,\mathrm{d}^3q_1. \tag{2.8}$$

En fait, les calculs formels 1.0 se déroulent dans un espace un peu plus grand, car nos noyaux de départ G_0 et Γ sont singuliers comme $1/\langle q-q'\rangle$. Mais il est facile de vérifier que cette singularité n'empêche pas les intégrales écrites dans l'appendice de converger (d'après le lemme A.1.1, la réécriture de la forme volume canonique $\mathrm{d}^3q_1 = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ en coordonnées ellipsoïdales fait apparaître deux facteurs qui compensent les singularités du dénominateur). Interprétée de cette façon la série (1.6) converge vers ce que j'appellerai *l'onde sphérique microlocale*, donnée par la formule

$$G = a_0\,\mathrm{e}^{ikS} + \int_{S(q,q')}^{S(q,q')+i\tau} \mathrm{e}^{iks}\boldsymbol{g}(q,q';s)\,\mathrm{d}s \pmod{\mathcal{E}^{<0}\mathrm{e}^{ikS}}, \tag{2.9}$$

où $\boldsymbol{g}$ (qui est le mineur de l'onde sphérique microlocale) est la somme de la série $\sum \boldsymbol{g}_n$ de 2.1.

Remarque. — Considérons le développement asymptotique de l'onde sphérique microlocale :

$$G(q,q';k) \propto \hat{a}(q,q';k)\,\mathrm{e}^{ikS}, \tag{2.10}$$

$$\hat{a} = a_0(q,q') + a_1(q,q')k^{-1} + a_2(q,q')k^{-2} + \cdots. \tag{2.10'}$$

Étant formellement solution fondamentale de l'équation de Helmholtz-Schrödinger, ce développement mérite le nom de *développement semi-classique de la fonction de Green.* Son insertion dans l'équation $PG = \delta$ permet d'en déterminer les coefficients successifs, donnés comme solutions d'équations différentielles linéaires du premier ordre le long des géodésiques issues de q' (les « équations de transport »).

On peut ainsi donner de l'affirmation 2.1 la reformulation suivante : *le développement semi-classique de la fonction de Green est de type Gevrey* 1.

On remarquera que cette reformulation ne fait pas intervenir le développement de diffusion multiple de Balian et Bloch, qui n'apparaît dans ce point de vue que comme un artifice de démonstration.

2.4. Retour à Huygens (et au réel !).

Dans le contexte de l'équation de Schrödinger, la variable s de (2.9) s'interprète comme une *action.* Mais dans le contexte de l'optique, où (0.2) est la transformée de Fourier de l'équation des ondes

$$\Big(\Delta - W(q)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)\mathbb{G}(q,q';t) = \delta(q-q')\delta(t), \tag{2.11}$$

cette même variable s s'interprète comme un *temps* (noté t dans l'équation ci-dessus). L'expression (1.10) donne ainsi, par transformation de Fourier inverse, l'expression suivante de la *fonction de Green retardée*, solution nulle pour $t < 0$ de l'équation (2.11)

$$\mathbb{G}(q,q';t) = a_0\delta\big(t - S(q,q')\big) + \boldsymbol{g}(q,q';t)\theta\big(t - S(q,q')\big) \tag{2.12}$$

(où θ désigne la fonction de Heaviside).

Considérée au voisinage de $q = q'$, pour t petit, cette formule répond bien à l'idée qu'on peut se faire d'une onde sphérique dans un milieu inhomogène, émise au temps $t = 0$ par une source placée en q'. Le premier terme est l'approximation de l'optique géométrique, localisée sur la « sphère » $S(q,q') = t$; le second est un terme correctif ayant pour

support l'intérieur de cette «sphère». Il aurait été étonnant que dans ce contexte l'expression (2.12), et le fait que la fonction $\boldsymbol{g}$ soit aussi régulière que l'était W (ici : analytique) ne soit pas un résultat «bien connu des spécialistes». Et effectivement, il s'agit d'une forme déguisée d'un résultat de Hadamard ([Ha], § 68), cité par Bérard [Bé] chez qui il apparaît sous un déguisement différent.

3. QUESTIONS DE RÉSURGENCE

Bien que «l'onde sphérique microlocale» G du § 2 ne soit solution de (0.2) que modulo des exponentiellement petits, elle contient en germe toute l'information nécessaire pour construire des solutions exactes. En effet, la fonction $\boldsymbol{g}$ de 2.1 est solution exacte de l'équation déduite de (0.2) par la transformation de Laplace formelle $k \leftrightarrow i\,\partial/\partial s$. Si donc nous pouvions remplacer l'intégrale de Laplace *tronquée* (2.9) par une vraie intégrale de Laplace (sur un chemin allant jusqu'à l'infini), nous obtiendrions ainsi une vraie solution de (0.2). La question qui se pose est donc de savoir si la fonction $\boldsymbol{g}$ est prolongeable analytiquement jusqu'à l'infini, dans des secteurs convenables du plan des s, avec une croissance au plus exponentielle.

On peut raisonnablement conjecturer que les singularités de $\boldsymbol{g}$ sont celles des $\boldsymbol{g}_n$, c'est-à-dire que la série des $\boldsymbol{g}_n$ converge localement uniformément dans tout leur domaine d'analyticité commun, comme c'est le cas dans le disque d'analyticité du théorème 2.1. (comparer à [CNP], ResII, preuve du lemme-clé 3.2.4). Or les $\boldsymbol{g}_n$ sont donnés par des expressions intégrales dont l'analyticité peut s'étudier par les méthodes initiées par Leray dans [Le] : on sait que le prolongement analytique est toujours possible tant que l'hypersurface $E_n(q, q'; s)$ reste «générique», c'est-à-dire essentiellement quand s n'est pas valeur critique de la fonction $(q_1, \ldots, q_n) \mapsto S(q, q_1, \ldots, q_n, q')$. D'après le principe de moindre action, ces valeurs critiques sont les valeurs de l'action le long des trajectoires classiques (éventuellement complexes) allant de q' à q en passant par $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1$. Même dans le cas d'une seule dimension d'espace, ces valeurs critiques sont très nombreuses, et forment en général un ensemble partout dense dans $\mathbb{C}$!

Pour détecter lesquelles d'entre elles sont effectivement des singularités de $\boldsymbol{g}_n$, une étude topologique plus fine est nécessaire : il s'agit de voir quels sont les prolongements analytiques en s qui donnent lieu à «pincement» du cycle d'intégration $\varepsilon_n(q, q'; s)$. Ce problème, considéré simultanément

pour toutes les valeurs de n, peut être interprété comme un problème de «méthode du col dans un espace de chemins» (pensez au n-uplet des variables d'intégration $q_1, \ldots, q_n$ comme à la donnée d'un chemin «géodésique par morceaux» joignant q' à q). Quand on l'aura résolu, on saura le long de quelles demi-droites du plan des s la fonction $\boldsymbol{g}$ peut être prolongée analytiquement; chacune de ces demi-droites, prise comme chemin d'intégration dans (2.9), fournira une solution exacte de (0.2) que je trouve suggestif d'appeler «onde sphérique exacte». Bien sûr, ces solutions exactes dépendront du choix de la demi-droite d'intégration (dans la mesure où l'existence de singularités nous empêche de déformer ces demi-droites l'une en l'autre), mais — et c'est là toute l'idée de la résurgence — la connaissance des singularités de $\boldsymbol{g}$ nous permettra de comparer ces solutions entre elles, et de suivre par déformation la façon dont elles se recombinent par prolongement analytique en q : *cf.* [DDP1], [DDP2] où ce programme est entièrement réalisé dans le cas unidimensionnel.

C'est ainsi que la fonction de Green de tout problème naturel (caractérisée comme la solution de (0.2) *vérifiant une certaine condition asymptotique en q) pourra être reconstruite comme une combinaison linéaire convenable de ce que j'ai appelé plus haut les «ondes sphériques exactes».*

Au lecteur qui se demanderait où sont cachées les caustiques dans ce programme, je conseille de lire le § 4 de [BB3], où Balian et Bloch suggèrent une façon de traiter les phénomènes de confluence de singularités de la fonction $\boldsymbol{g}$, ce qui fournit pour l'étude des caustiques une méthode concurrente de la méthode usuelle des «approximations uniformes» à base de fonctions spéciales. La mise en œuvre de cette idée pose de jolis problèmes de résurgence (on trouvera dans [DDP3], app. C, un exemple élémentaire de résolution d'un tel problème).

APPENDICE
CALCUL INTÉGRAL SUR LES ELLIPSOÏDES COMPLEXES

Toutes les constructions de cet appendice sont locales dans un petit ouvert U de $\mathbb{C}^3$ où la fonction W est holomorphe non nulle, et où l'on peut définir une fonction S des deux variables q, q' vérifiant les conditions 2.1 (i) et (ii). Si cet ouvert est «infiniment petit», c'est-à-dire (en langage standard) si on lui fait parcourir un filtre de voisinages d'un point donné

de $\mathbb{C}^3$, on aura d'après 2.1 (ii)

$$S^2(q,q') \approx W_0\langle q-q'\rangle^2, \tag{a0}$$

où la constante W_0 est la valeur de W au point limite, et la notation « $\approx$ » signifie que le quotient des deux membres tend vers 1 quand l'ouvert U parcourt le filtre en question.

Les constructions géométriques qui vont suivre sont très faciles à expliciter dans le cas particulier $S^2(q,q') = \langle q-q'\rangle^2$, que j'appellerai le *cas euclidien*. Qu'elles soient encore valables dans le cas général, pour U assez petit, résultera de leur stabilité par déformation. Bien entendu il faudra s'assurer que ces constructions ne nous font jamais sortir de l'ouvert en question : c'est à cela que serviront nos « lemmes de confinement ».

A.0. Géodésiques complexes et coordonnées cylindriques.

A.0.0. — Choisissons un couple (q_0, q_*) appartenant à $U \times U$, et posons $S(q_0, q_*) = S_0$ (une détermination de la racine). Considérons la fonction multiforme

$$s(q) = S(q_0, q) + S(q, q_*). \tag{a1}$$

Étant somme des racines carrées de deux fonctions holomorphes, s est solution d'une équation polynomiale de degré 4 à coefficients holomorphes dans U. Les points critiques de s se disposent le long d'une courbe analytique complexe lisse $L \subset U$, contenant q_0 et q_*, la *géodésique complexe joignant* q_0 à q_* : plus précisément, un point q distinct de q_0 et q_* appartient à L si et seulement s'il existe une détermination de s dont c'est un point critique. La matrice hessienne en un tel point critique est alors de rang $2 = 3 - 1$, et la valeur critique correspondante est constante le long de L (et égale à $\pm S_0$).

Nous supposerons désormais $S_0 \neq 0$ (la géodésique L n'est pas incluse dans le cône isotrope).

La fonction $q \mapsto S(q_0, q)$ admet alors en restriction à L une détermination holomorphe, égale à S_0 en q_*, qui définit une coordonnée holomorphe sur L. En lui retranchant la constante $\frac{1}{2}S_0$ on obtient ainsi sur L une coordonnée holomorphe $x : L \to \mathbb{C}$ telle que $x(q_0) = -\frac{1}{2}S_0$, $x(q_*) = \frac{1}{2}S_0$, que nous appellerons *coordonnée longitudinale* sur L. La *projection orthogonale* de U sur L est la rétraction holomorphe

$$\rho : U \to L$$

qui à tout $q \in U$ (où U est un voisinage assez petit de L) associe l'unique point critique de la fonction $S^2(q,.)|_L$. En composant x avec cette rétraction, on obtient une submersion holomorphe que nous noterons encore x

$$x : U \to \mathbb{C}$$

et que nous appellerons *coordonnée longitudinale* sur U.

Revenons à la fonction $S^2(q,.)|_L$ qui nous a servi à définir la rétraction ρ. La valeur critique de cette fonction sera notée $r^2(q)$, et sa racine carrée $r(q)$ (définie au signe près) sera appelée *coordonnée radiale*. La fonction r^2 s'annule identiquement sur L , avec un hessien transverse non nul, de sorte que les ensembles de niveau $x = \mathrm{C^{te}}$, $r^2 = \mathrm{C^{te}} \neq 0$ définissent un *feuilletage de $U \setminus L$ en cercles complexes*. Ce feuilletage est même une fibration triviale, ce qui permet de compléter les fonctions x, r en un système de coordonnées x, r, θ de $U \setminus L$, où θ est une *coordonnée angulaire* (à valeurs dans $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$).

A.0.1. — Formules explicites dans le cas euclidien ($S(q,q') = \langle q - q' \rangle$).
On peut choisir dans $\mathbb{C}^3$ un système de coordonnées « cartésiennes complexes » x, y, z dans lequel $q_0 = (-\frac{1}{2}S_0, 0, 0)$ et $q_* = (\frac{1}{2}S_0, 0, 0)$. Les coordonnées cylindriques s'en déduisent par la formule habituelle (complexifiée) :

$$\begin{cases} x = x, \\ y = r\cos\theta, \\ z = r\sin\theta. \end{cases}$$

Expression de la forme volume canonique en coordonnées cylindriques :

$$\text{(a2)} \qquad \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}x \qquad \left(\mathrm{d}\theta = \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^2}\right).$$

A.0.2. — Choix de l'origine de la coordonnée angulaire.
Le choix de la coordonnée angulaire θ reste soumis à l'arbitraire du choix de « l'origine des angles », qui se traduit par un arbitraire de translation *complexe* dans $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$. Dans le cas euclidien cet arbitraire reflète la liberté du choix de notre repère cartésien complexe, dont seul l'axe des x est imposé.

La convention ci-après va nous permettre de réduire cet arbitraire à un arbitraire de translation *réelle*, de façon telle que les vecteurs de composante angulaire θ réelle soient « le plus loin possible du cône isotrope ».

Pour tout $X \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, posons $\lambda(X) = \dfrac{|\langle X \rangle|^2}{\|X\|^2}$.

Évidemment $0 \leq \lambda(X) \leq 1$, avec $\lambda(X) = 0$ si et seulement si X appartient au cône isotrope. *De plus la multiplication de X par un scalaire complexe ne change pas $\lambda(X)$, qui peut donc être considéré comme une mesure de la « distance de la droite complexe $\mathbb{C}X$ au cône isotrope ».*

Étant donnée une droite vectorielle complexe D telle que $\lambda|_D = \lambda_0 \neq 0$, considérons les valeurs de λ sur le $\mathbb{C}$-plan vectoriel $D^\perp$, « orthogonal » à D pour le produit scalaire euclidien complexe $\langle\ ,\ \rangle$.

LEMME. — *Le $\mathbb{C}$-plan $D^\perp$ se décompose en somme directe de deux $\mathbb{R}$-plans vectoriels*

$$D^\perp = [D^\perp] \oplus i[D^\perp]$$

tels que pour tout $X \in [D^\perp] \setminus \{0\}$, on ait l'inégalité $\lambda(X) \geq \lambda_0$.

Preuve. — Soit X_0 un générateur de D tel que $\langle X_0 \rangle = 1$. Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ dont la différence des carrés scalaires vaut 1. On peut donc écrire

$$X_0 = \operatorname{ch}\varphi\, e_1 + i \operatorname{sh}\varphi\, e_2,$$

où e_1, e_2, e_3 est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, et

$$\varphi = \tfrac{1}{2} \operatorname{Arg ch}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big).$$

Il suffit alors de poser : $[D^\perp] = \mathbb{R}(-i \operatorname{sh}\varphi\, e_1 + \operatorname{ch}\varphi\, e_2) \oplus \mathbb{R}e_3$.

Convention. — Nous supposerons désormais que la partie $\{\operatorname{Im}\theta = 0\}$ de la fibre de $\rho : U \to L$ est tangente en tout point de L au $\mathbb{R}$-plan $[D^\perp]$, où D désigne la tangente à L (dans le cas euclidien, où ρ est linéaire, on pourra faire coïncider exactement $\operatorname{Im}\theta = 0$ avec $L \oplus [L^\perp]$).

A.1. Géométrie des ellipsoïdes complexes.

A.1.0. — Uniformisation de la fonction S.

Pour lever l'ambiguïté de signe de la fonction S, nous conviendrons désormais d'enlever à $U \times U$ l'image réciproque par S^2 d'une demi-droite de $\mathbb{C}$ issue de l'origine, et de choisir pour S la détermination à valeurs dans le demi-plan ayant cette demi-droite comme normale extérieure (demi-plan

des « arguments permis ») : par exemple, si la « demi-droite interdite » de S^2 est le demi-axe réel négatif, S sera une fonction à partie réelle positive (arguments permis : $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Arg} S < \frac{1}{2}\pi$). L'ouvert de $U \times U$ ainsi défini sera noté $(U \times U)^*$ et ses points seront appelés *couples permis*. Notons que $(U \times U)^*$ est invariant par échange de q et q', et que $S(q, q') = S(q', q)$.

A.1.1. — Coordonnées ellipsoïdales.

Ayant choisi un couple permis (q_0, q_*), nous pouvons maintenant considérer la fonction s de A.0 comme holomorphe sur U^*, ensemble des $q \in U$ tels que (q_0, q) et (q, q_*) soient des couples permis (la fonction $(s - S_0)$ prend alors ses valeurs dans le demi-plan des arguments permis). On prendra garde au fait que $U^* \cap L$ a trois composantes connexes L_+, L_0, L_- (représentées dans le plan complexes des x sur la figure 1) : sur L_0, s est

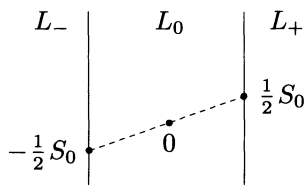

Figure 1. Les trois composantes connexes de $U^* \cap L$, vues dans le plan des x (les arguments permis sont $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Arg} S < \frac{1}{2}\pi$).

constante et égale à S_0 ; sur L_+, $s = 2x$; sur L_-, $s = -2x$. Dans l'espace ambiant U^* les surfaces de niveau E_s^* de s et U_x de x sont tangentes entre elles en chacun des points de L_+ et L_-. Dans $U^* \setminus L$ ces surfaces se coupent transversalement selon des « cercles complexes », qui dégénèrent en cercle de rayon nul (union de deux « géodésiques isotropes ») quand on tend vers L. Le triplet de fonctions s, θ, x définit ainsi sur $U^* \setminus L$ un système de coordonnées que nous appellerons *coordonnées ellipsoïdales de foyers* q_0, q_*.

Il sera commode de remplacer la coordonnée longitudinale x par la *coordonnée longitudinale réduite* $u = 2x/s$, qui prend les valeurs $+1$ et -1 aux deux sommets de l'ellipsoïde E_s^* (points d'intersection de E_s^* avec L). On obtient ainsi les *coordonnées ellipsoïdales réduites* s, θ, u.

LEMME (expression de la forme volume canonique en coordonnées ellipsoïdales). — *Avec* $c = \frac{1}{2}W_0$, *on a* :

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \approx c\, S(q_0, q) S(q, q_*)\, \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}u. \tag{a3}$$

Preuve. — Il suffit de vérifier que l'équivalence est une égalité dans le cas euclidien (où $W_0 = 1$). Cela résulte dans ce cas de (a2) et des formules :

$$\text{(a4)} \qquad r^2 = \tfrac{1}{4}(s^2 - S_0^2)\Big(1 - \frac{4x^2}{s^2}\Big) = \tfrac{1}{4}(s^2 - S_0^2)(1 - u^2),$$

$$\text{(a5)} \qquad S(q_0, q) = \tfrac{1}{2}(s + S_0 u), \quad S(q, q_*) = \tfrac{1}{2}(s - S_0 u).$$

A.1.2. — Ellipsoïdes évanescents.

Choisissons s proche de S_0, tel que l'argument de $(s - S_0)$ soit permis. On notera $\varepsilon(s) = \varepsilon(q_0, q_*; s)$, et on appellera *ellipsoïde évanescent de longueur s, de foyers* q_0, q_*, le cycle à deux dimensions de E_s^* donné en coordonnées ellipsoïdales par le paramétrage suivant : s est fixé à la valeur donnée ; la coordonnée longitudinale réduite u parcourt le segment $[-1, +1]$ (de sorte que x parcourt le segment $[-\frac{1}{2}s, \frac{1}{2}s]$) ; la coordonnée angulaire θ parcourt $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On obtient bien ainsi un cycle, fibré en cercles sur un segment ouvert, avec le rayon des cercles qui tend vers 0 aux extrêmités de ce segment. Lorsque s tend vers S_0 ce cycle à deux dimensions dégénère en un segment de courbe réelle joignant les deux foyers q_0, q_* dans la géodésique complexe L.

On notera $\beta(s) = \beta(q_0, q_*; s)$ — et on appellera *ellipsoïde plein évanescent de longueur s, de foyers* q_0, q_* — le cycle *relatif* à trois dimensions de U^* (mod E_s^*), ayant $\varepsilon(s)$ pour bord, donné en coordonnées ellipsoïdales par un paramétrage analogue, à ceci près que la coordonnée de « longueur » n'est pas fixée à la valeur s mais parcourt le segment rectiligne $[S_0, s]$.

Formules explicites dans le cas euclidien :

• paramètres pour $\varepsilon(s)$: $u \in [-1, +1]$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$;

• paramétrage : $x = \frac{1}{2}us$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, où $r = r(s, u)$ est donné par la formule (a3), avec le choix de détermination de la racine pour lequel l'argument de r est permis (on remarquera que cet argument ne dépend pas de u).

Lemme (i) de confinement. — *Pour U assez petit il existe une constante $a \approx \frac{1}{2}$ et une constante η (petite) telles que si q_0, q_*, s sont choisis de façon à vérifier les conditions suivantes :*

$$(q_0, q_*) \in (U \times U)^*,$$
$$|s - S_0| \leq \eta |S_0| \quad \big(\text{où} \quad S_0 := S(q_0, q_*)\big),$$
$$\operatorname{Arg}(s - S_0) \quad \text{permis},$$

tout point q de $\varepsilon(q_0, q_*; s)$ vérifie la majoration :

$$|S(q, q_*)| \leq |S_0| + a|s - S_0|. \tag{a6}$$

Preuve. — Dans le cas euclidien, l'inégalité avec $a = \frac{1}{2}$ résulte immédiatement de la formule (a5).

Dans le cas euclidien, la convention A.0.2 nous permet de transformer toute majoration de $|S(q, q')|$, pour q et q' dans $L \oplus [L^\perp]$, en une majoration de $\|q - q'\|$. Arguant du fait que la situation générale est, pour U assez petit, « proche » de la situation euclidienne, nous déduisons ainsi du lemme (i), le :

LEMME (ii) de confinement. — *Sous les hypothèses du lemme* (i), *on peut choisir la constante a de façon que tout point q de $\varepsilon(q_0, q_*; s)$ vérifie la majoration :*

$$\|q - q_*\| \leq \|q_0 - q_*\| + a\|q_0 - q_*\| \cdot \frac{|s - S_0|}{|S_0|}. \tag{a7}$$

A.1.3. — Ellipsoïdes itérés.

En remplaçant la formule (a1) par

$$s = S(q_0, q_1) + S(q_1, q_2) + \cdots + S(q_n, q_*), \tag{a8}$$

on obtient une fonction multiforme sur U^n, dont les hypersurfaces de niveau seront notées $E_n(q_0, q_*; s)$ et appelées *ellipsoïdes complexes itérés.*

Comme en A.1.1, il sera commode de rendre cette fonction uniforme en se restreignant à l'ouvert $(U^n)^*$ des $(q_1, \ldots, q_n)$ tels que tous les couples intervenant dans (a8) soient permis.

Dans $E_n(q_0, q_*; s) \cap (U^n)^*$, un cycle $\varepsilon_n(q_0, q_*; s)$ de dimension $(3n-1)$ est défini ainsi par récurrence sur n :

• pour $n = 1$ c'est l'ellipsoïde évanescent $\varepsilon(q_0, q_*; s)$ défini en A.1.1 ;

• pour $n > 1$, on fait parcourir à q_1 l'ellipsoïde plein évanescent $\beta(q_0, q_*; s)$, tandis que pour chaque valeur de q_1, le $(n-1)$-uplet $(q_2, \ldots, q_n)$ parcourt l'ellipsoïde évanescent $\varepsilon_{n-1}(q_1, q_*; s - S(q_0, q_*))$ (ce dernier s'évanouit lorsque q_1 tend vers le bord $\varepsilon(q_0, q_*; s)$ de $\beta(q_0, q_*; s)$). Le cycle ainsi construit sera appelé *ellipsoïde évanescent itéré.*

Paramétrage de l'ellipsoïde évanescent itéré $\varepsilon(q_0, q_*; s)$. — Les paramètres sont :

- $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, qui parcourt le simplexe standard à $(n-1)$ dimensions $\Delta_{n-1} : t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$;
- $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, qui parcourt $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$;
- $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, qui parcourt $[-1, +1]^n$.

Posant $s_1 = S_0 + t_1(s - S_0)$, on définit q_1 comme le point de coordonnées ellipsoïdales réduites (s_1, θ_1, u_1) de foyers q_0, q_* ; posant $s_2 = S_1 + t_2(s - S_0)$, avec $S_1 = S(q_1, q_*)$, on définit q_2 comme le point de coordonnées ellipsoïdales réduites (s_2, θ_2, u_2) de foyers q_1, q_* ; etc. Posant $s_n = S_{n-1} + t_n(s - S_0)$, avec $S_{n-1} = S(q_{n-1}, q_*)$, on définit q_n comme le point de coordonnées ellipsoïdales réduites (s_n, θ_n, u_n) de foyers q_{n-1}, q_*.

Remarque. — Posant $S_{i-1,i} = S(q_{i-1}, q_i)$, on a $s_i = S_{i-1,i} + S_i$.

LEMME (de confinement des ellipsoïdes évanescents itérés). — *Sous les hypothèses des lemmes de confinement* A.1.2, *les mêmes majorations* (a6), (a7) (*avec q remplacé par* q_i) *sont vérifiées par chacune des composantes* q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *de tout point* $(q_1, \ldots, q_n)$ *appartenant à* $\varepsilon(q_0, q_*; s)$.

Preuve. — Il suffit d'appliquer les formules (a6) et (a7) aux ellipsoïdes successifs $\varepsilon(q_0, q_*; s_1)$, $\varepsilon(q_1, q_*; s_2)$, etc., en se souvenant que $s_1 - S_0 = t_1(s - S_0)$, $s_2 - S_1 = t_2(s - S_0), \ldots, s_n - S_{n-1} = t_n(s - S_0)$, avec $t_1 + \ldots + t_n = 1$.

A.2. Justification des énoncés du paragraphe 2.

A.2.1. — Preuve du théorème du paragraphe 2.1.

Compte tenu du paramétrage A.1.3 de ε_n, et de l'expression (a3) de la forme volume canonique en coordonnées ellipsoïdales, l'expression intégrale (2.2) de $\boldsymbol{g}_n$ peut s'écrire sous la forme suivante (en supposant que $(s - S_0)$ est d'argument permis) :

$$\text{(a9)} \qquad \boldsymbol{g}_n(s) = (s - S_0)^{n-1} \int_{\Delta_{n-1}} \frac{g_n(s, \boldsymbol{t})\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n)}{\mathrm{d}(t_1 + \cdots + t_n}},$$

où, en posant $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$,

$$\text{(a10)} \quad g_n(s, \boldsymbol{t}) = \int_{\mathbb{T}^n \times [-1,+1]^n} \underline{\alpha}_n(s; \boldsymbol{t}, \theta, \boldsymbol{u}) \prod_{i=1}^{n} (S_{i-1,i}\, S_i\, \mathrm{d}\theta_i \wedge \mathrm{d}u_i)$$

et où $\underline{\alpha}_n = \alpha_n$ fois une fonction holomorphe inversible.

Or il résulte de l'expression (1.8″) de α_n (compte tenu de (1.2)) que l'expression

$$\underline{\alpha}_n S_{0,1}\, S_{1,2} \ldots S_{n-1,n}\, S_n$$

est une fonction holomorphe.

L'intégrand de (a10) est donc holomorphe, de sorte que $\boldsymbol{g}_n$ est bien holomorphe dans le demi-voisinage de S_0 défini par notre convention que $(s - S_0)$ soit d'argument permis. De plus, $\boldsymbol{g}_n$ est bornée, et tend même vers 0 comme $(s - S_0)^{n-1}$. En faisant tourner le demi-plan des arguments permis, on en déduit que $\boldsymbol{g}_n$ est holomorphe et bornée dans un disque fendu de centre S_0 (fendu le long du segment $[0, S_0]$). D'après le théorème des singularités inexistantes de Riemann, on pourra conclure à l'holomorphie de S dans tout le disque si on sait montrer qu'elle est «monodrome» : or, quand s tourne autour de S_0, l'argument du nombre complexe r^2 dans la formule (a4) augmente de 2π, tandis que le grand axe de l'ellipsoïde évanescent (ensemble des points de L de coordonnée longitudinale $x \in [-\frac{1}{2}s, +s\frac{1}{2}]$) subit une déformation isotope à l'identité. La transformation du cycle $\varepsilon(q_0, q_*; s)$ induite par un tel lacet de s est donc une symétrie de l'ellipsoïde par rapport à son axe, transformation qui ne change pas sa classe d'homologie. Par ailleurs, l'isotopie de ce cycle ne change pas la détermination de l'intégrand. Nous avons ainsi montré l'holomorphie des $\boldsymbol{g}_n$ dans un ouvert U assez petit, qui d'après le lemme de confinement A.1.3 *ne dépend pas de n*. La convergence uniforme de la série des $\boldsymbol{g}_n$ résulte immédiatement du fait que l'intégrand de la formule (a10) est majoré en valeur absolue par $C^n|S_1|\cdots|S_{n-1}|$ (où C est une constante convenable), et que d'après le lemme de confinement A.1.3 on a $|S_i| < \mathrm{C}^{\mathrm{te}}|S_0|$.

A.2.2. — Composition des noyaux microlocaux.

Voici — pour conclure — comment on peut donner un sens dans le domaine complexe à la formule (2.8) du § 2.3.

Pour $F = f\,\mathrm{e}^{ikS}$ (resp. $G = g\,\mathrm{e}^{ikS}$), avec f (resp. $g \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$), de mineur $\boldsymbol{f}$ (resp. $\boldsymbol{g}$) et de coefficient résiduel f_{-1} (resp. g_{-1}) (*cf.* 2.2), on pose $G * F = h\,\mathrm{e}^{ikS}$, où h est l'élément de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ de coefficient résiduel nul et de mineur $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^{--} + \boldsymbol{h}^{-0} + \boldsymbol{h}^{0-} + \boldsymbol{h}^{00}$ défini ainsi :

$$\boldsymbol{h}^{--}\big(q, q'; s - S(q, q')\big) = \int_{\varepsilon(q,q';s)} \frac{g_{-1}(q, q_1) f_{-1}(q_1, q')\, \mathrm{d}^3 q_1}{\mathrm{d}S(q, q_1, q')}\Big|_{E(q,q';s)},$$

$$\boldsymbol{h}^{-0}\big(q, q'; s - S(q, q')\big) = \int_{\beta(q,q';s)} g_{-1}(q, q_1)\, \boldsymbol{f}\big(q_1, q'; s - S(q, q_1, q')\big)\, \mathrm{d}^3 q_1,$$

$$\boldsymbol{h}^{0-}(q,q';s-S(q,q')) = \int_{\beta(q,q';s)} \boldsymbol{g}(q,q_1;s-S(q,q_1,q'))f_{-1}(q_1,q')\,\mathrm{d}^3q_1,$$

$$\boldsymbol{h}^{00}(q,q';s-S(q,q')) = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{\beta(q,q';s)} \boldsymbol{g}(q,q_1;s_0(t))\boldsymbol{f}(q_1,q';s_1(t))\,\mathrm{d}^3q_1,$$

où :

$$s_0(t) = S(q,q_1) + t(s-S(q,q')),$$

$$s_1(t) = S(q_1,q') + (1-t)(s-S(q,q')).$$

On remarquera que les trois premières formules peuvent être interprétées comme des « cas limites » de la dernière où l'on aurait remplacé la *fonction* $\boldsymbol{f}$ ou $\boldsymbol{g}$ (ou les deux) par une « microfonction de Dirac » portée par l'ellipsoïde adéquat.

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] V. ARNOLD, Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of the projections of Lagrangean manifolds, Funct. Anal. and its Appl., 6–3 (1972).

[AVG] V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GUSSEIN–ZADÉ, Singularités des applications différentiables, trad. française, éd. Mir, Moscou, 1986.

[Be] M.V. BERRY, Cusped rainbow and incoherence effects..., J. Phys. A, 8–4 (1975).

[Bé] P. BÉRARD, On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points, Mathematische Zeitschrift, 155 (1977).

[BNW] M.V. BERRY, J.F. NYE, F.R.S. & F.J. WRIGHT, The elliptic umbilic diffraction catastrophe, Phil. Trans. Royal Soc. London, A 291 (1979).

[BB1] R. BALIAN and C. BLOCH, Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain I, Ann. of Physics, 60–2, (1970), II, Ann. of Physics, 63–2 (1971), III, Ann. of Physics, 69–1 (1972).

[BB2] R. BALIAN and C. BLOCH, Asymptotic evaluation of the Green's function for large Quantum numbers, Ann. of Physics, 64–1 (1971).

[BB3] R. BALIAN, C. BLOCH, Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths, Ann. of Physics, 85 (1974).

[BW] M. BORN, E. WOLF, Principles of Optics, Pergamon, 1975.

[Ch] J. CHAZARAIN, Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes, Inventiones Math., 24 (1974).

[CNP] B. CANDELPERGHER, J.–C. NOSMAS, F. PHAM, Approche de la résurgence, Actualités Mathématiques, Hermann, 1993.

[Co] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques, Compositio Mathematica, 27–1 et 27–2 (1973).

[De] E. DELABAERE, Résurgence de l'équation de Schrödinger (en préparation).

[DDP1] E. DELABAERE, H. DILLINGER, F. PHAM, Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, Ann. Inst. Fourier, 43–1 (1993).

[DDP2] E. DELABAERE, H. DILLINGER, F. PHAM, Exact semi–classical expansions for one–dimensional Quantum oscillators (en préparation).

[DDP3] E. DELABAERE, H. DILLINGER, F. PHAM, Resurgent methods in semi–classical asymptotics (en préparation).

[DG] J. DUISTERMAAT and V. GUILLEMIN, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Inventiones Math., 29 (1975).

[Ec] J. ÉCALLE, Singularités irrégulières et résurgence multiple, in « Cinq applications des fonctions résurgentes », Prépub. Univ. Orsay, 62 (1984).

[GS] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG, Geometric Asymptotics, A.M.S. Surveys, 14 (1977).

[Ha] J. HADAMARD, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques, Hermann, 1932.

[Le] J. LERAY, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), Bull. Soc. Math. France, 87 (1959).

[LT] V.F. LAZUTKIN, D.Ya. TERMAN, Complexified Quantum rules, *in* Séminaire de théorie spectrale et Géométrie n° 11 (1993), Institut Fourier, Grenoble.

[Ta] M. TAYLOR, Pseudodifferential Operators, Princeton Univ. Press, 1981.

[Vo] A. VOROS, The return of the quartic oscillator, Ann. Inst. Henri Poincaré, 29–3 (1983).

Frédéric PHAM,
Laboratoire de Mathématiques (URA CNRS n° 168)
UNSA
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 2 (France).