ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

C. E. CANCELIER
J. Y. CHEMIN
C. J. XU

Calcul de Weyl et opérateurs sous elliptiques

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 4 (1993), p. 1157-1178
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_4_1157_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 4 (1993), 1157-1178

CALCUL DE WEYL ET OPÉRATEURS SOUS-ELLIPTIQUES

par C.E. CANCELIER, J.-Y. CHEMIN et C.J. XU

Introduction.

Dans ce travail, on considère une suite $(p_j), 1 \leq j \leq q$, de symboles classiques réels de $S^1(\Omega \times \mathbf{R}^n), \Omega$ étant un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On suppose que la condition de sous-ellipticité de Hörmander est vérifiée à l'ordre 2 : pour tout compact K de Ω, il existe deux constantes $c, C > 0$, telles que tout $X = (x, \xi) \in K \times \mathbf{R}^n$, $|\xi| > C$, l'on ait

$$\sum_{j=1}^{q} p_j^0(X)^2 + \sum_{i,j=1}^{q} \{p_i^0, p_j^0\}(X)^2 \geq c|\xi|^2, \tag{1}$$

p_j^0 désignant le symbole principal de $p_j, 1 \leq j \leq q$.

Soit P_j une réalisation proprement supportée de $p_j, 1 \leq j \leq q$, on considère l'opérateur laplacien généralisé

$$\Delta_H = \sum_{j=1}^{q} P_j^* P_j. \tag{2}$$

On sait que Δ_H est sous-elliptique ([6], [2], [5]). On se propose de démontrer que Δ_H admet localement une paramétrixe qui est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole a une croissance régie par une métrique et un poids convenables. Cette démarche est bien connue lorsque les opérateurs

Mots-clés : Calcul de Weyl – Sous-ellipticité – Conditions de Hörmander – Paramétrixe – Calcul symbolique.
Classification A.M.S. : 35A20 – 35H05.

$P_j, 1 \leq j \leq q$, sont des champs de vecteurs réels réguliers ([6], [9], [10]). Elle nécessite ici le calcul de Weyl. Plus précisément :

THÉORÈME A. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un symbole* $b \in S^{-1}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ *tel que,* B *étant une réalisation proprement supportée de* b, $\mathrm{Id} - \Delta_H B = \mathrm{Id} - B\Delta_H$ *soit un opérateur infiniment régularisant.*

De plus, pour tout compact K *de* Ω, *pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$, *il existe une constante* C *telle que*

$$(3) \quad \forall (x,\xi) \in K \times \mathbf{R}^n \ |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x,\xi)| \leq C\, m(x,\xi)^{-2-|\beta|-|\alpha|} < \xi >^{|\beta|}$$

$$\text{avec} \quad m(x,\xi) = \left(\sum_{j=1}^{q} p_j^0(x,\xi)^2 + < \xi > \right)^{1/2}.$$

Remarques :

• Aux points $X = (x,\xi)$ où le système est elliptique, on a alors $m(X) \geq \mathrm{Cte} \ < \xi >$ et l'estimation (3) est du type $S^{-2}_{1,o}$.

• Un poids de ce type a été introduit par R. Beals dans [1].

• Lorsque les opérateurs P_j sont des champs de vecteurs, A. Nagel, E.M. Stein et S. Wainger ont obtenu dans [8] des estimations très précises sur le noyau de la paramétrixe en utilisant la géométrie sous-unitaire associée aux systèmes de champs de vecteurs. Notre résultat étant valable dans le cas où les opérateurs P_j ne sont pas nécessairement des champs de vecteurs, le lien avec la structure sous-unitaire n'est pas clair. Nous ne savons pas comparer nos résultats avec ceux de A. Nagel, E.M. Stein et S. Wainger.

L'article sera organisé de la manière suivante : Dans la *section 1*, on décrit les classes de symboles de Hörmander que l'on utilisera et l'on rappelle quelques unes de leurs propriétés de base. Dans la *section 2*, on énoncera et on démontrera un théorème d'inversion exacte. La démonstration nécessite l'introduction de l'espace de Sobolev associé à un poids m et à une métrique g déterminés par le système d'opérateurs pseudo-différentiels considéré. Dans la *section 3*, on déduira le théorème A du théorème d'inversion exacte démontré dans la précédente section et enfin

la *section 4* sera consacrée à des résultats d'inclusion dans L^p des espaces de Sobolev associés à un système sous-elliptique de champs de vecteurs.

Remerciements. — Nous tenons à remercier J.-M. Bony, J. Camus, N. Lerner et G. Métivier pour de fructueuses discussions.

1. Classes de symboles.

On commencera par rappeler les résultats classiques du calcul de Weyl ([7]) repris dans l'article [4], puis on démontrera un lemme utilisé à la section 2.

1.1. *Rappels.*

A une distribution tempérée a définie sur l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}_X = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi$, la quantification de Weyl associe un *opérateur* a^w : $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ par la formule

$$a^w u(x) = (2\pi)^{-n} \int\int e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi. \tag{1.1}$$

L'opération # de composition des symboles, définie par $(a\#b)^w = a^w b^w$ conduit au moins dans le cas où a et b appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, au résultat :

$$a\#b(X) = \pi^{-2n} \int\int e^{-2i[Y-X,Z-X]} a(Y) b(Z) dY dZ, \tag{1.2}$$

où $[\cdot,\cdot]$ désigne la forme symplectique $[X,Y] = y\cdot\xi - x\cdot\eta$; $X = (x,\xi), Y = (y,\eta) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Soit g une métrique, c'est-à-dire la donnée, pour tout $X \in \mathbf{R}^{2n}$, d'une forme quadratique définie positive $g_X(\cdot)$. On note g^σ_X la métrique duale de g_X pour la dualité définie par la forme symplectique. Pour tout $T \in \mathbf{R}^{2n}$, on a

$$g^\sigma_X(T) = \sup_{W \neq 0} \frac{[T,W]^2}{g_X(W)}. \tag{1.3}$$

On dira que g est une métrique de Hörmander si l'application $X \to g_X$ dépend mesurablement de X et si elle satisfait les trois propriétés suivantes :

g est une *métrique lente* : il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$g_X(X-Y) \leq 1/C \Rightarrow (g_Y(\cdot)/g_X(\cdot))^{\pm 1} \leq C. \tag{1.4}$$

g vérifie le *principe d'incertitude* : $g_X(\cdot) \leq g_X^\sigma(\cdot)$, ce qui revient à dire que

$$\lambda_g(Y) = \inf_{W \neq 0} (g_Y^\sigma(W)/g_Y(W))^{1/2} \geq 1. \tag{1.5}$$

g est une *métrique tempérée* : il existe une constante $C > 0$ et un entier N tels que l'on ait

$$(g_Y(\cdot)/g_X(\cdot))^{\pm 1} \leq C(1 + g_Y^\sigma(Y-X))^N. \tag{1.6}$$

Soit M une fonction strictement positive, définie sur $\mathbf{R}^{2n}$. On dira que M est un *poids admissible* pour g s'il existe une constante $\widetilde{C}$ et un entier $\widetilde{N}$ tels que l'on ait

(1.7)

$$g_X(X-Y) \leq 1/C \quad \Rightarrow \quad (M(Y)/M(X))^{\pm 1} \leq \widetilde{C} \qquad X, Y \in \mathbf{R}^{2n},$$

$$(M(Y)/M(X))^{\pm 1} \quad \leq \quad \widetilde{C}(1 + g_Y^\sigma(Y-X))^{\widetilde{N}} \qquad X, Y \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Une fonction a de classe $C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ appartient à la *classe de symboles* $S(M,g)$ si toutes les semi-normes suivantes sont finies :

$$||a||_{k;S(M,g)} = \sup_{\substack{\ell \leq k \ ; \ X \in \mathbf{R}^{2n} \\ g_X(T_j) \leq 1}} |\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} a(X)|/M(X), \tag{1.8}$$

en notant ∂_T la dérivée directionnelle $a \rightarrow < da, T >$.

Lorsque $a \in S(M,g)$, l'opérateur a^w est borné de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même, de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même et, si $M = 1$, de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même. De plus les classes $S(M,g)$ forment une algèbre graduée, par le groupe multiplicatif des poids, pour l'opération $\#$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [7].

1.2. *Enoncé et démonstration du lemme 1.2.1.*

Soit a un symbole classique, positif, de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$. Considérons les fonctions m et g_X définies par

$$m(X) = (a(X) + < \xi >)^{1/2} \qquad X \in \mathbf{R}^{2n}, \tag{1.9}$$

$< \xi >$ désignant $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$,

$$g_X(dx, d\xi) = m^{-2}(X)(< \xi >^2 dx^2 + d\xi^2) \qquad X \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{1.10}$$

LEMME 1.2.1. — *Soient a un symbole classique, positif de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$, m et g les fonctions définies en (1.9) et (1.10), alors*

1) *a appartient à $S(m^2, g)$,*

2) *g est une métrique de Hörmander, m un poids admissible pour g et*

$$\lambda_g(X) = \frac{m^2(X)}{< \xi >}. \tag{1.11}$$

Démonstration du lemme 1.2.1. — 1) Pour démontrer que $a \in S(m^2, g)$, on a, d'après la définition (1.8) à vérifier que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe une constante C_k telle que l'on ait pour tous $X, T_1, \cdots, T_k \in \mathbf{R}^{2n}$

$$| < a^{(k)}(X) \ ; \ T_1 \otimes \cdots \otimes T_k > | \leq C_k \ m^2(X) \prod_{j=1}^{k} g_X^{1/2}(T_j),$$

où $a^{(k)}$ est le tenseur k-dérivé de a au point X pour la structure affine de $\mathbf{R}^{2n}$. On utilisera le fait suivant très simple :

Toute fonction f positive de classe $C^2(\mathbf{R})$ satisfait l'inégalité

$$(f')^2 \leq 2\|f''\|_{L^\infty} f. \tag{1.12}$$

Il s'agit maintenant de vérifier que, pour tout $2n$-uplet $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$, on a

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(X)| \leq \text{ Cte } m^{2-|\alpha|-|\beta|}(X) < \xi >^{|\beta|}$$

puisque, pour tout $T = (t, \tau) = (t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n)$,

$$t_i / g_X^{1/2}(T) \leq m(X) / < \xi > \text{ et } \tau_j / g_X^{1/2}(T) \leq m(X).$$

Lorsque $k = 1$, on utilise la positivité du symbole $a \in S^2(\mathbf{R}^{2n})$ et l'inégalité (1.12). Il en résulte que

$$|(\partial a / \partial x_j)(X)|(1/m^2(X))(m(X)/ < \xi >) \leq \text{ Cte } (a^{1/2}(X)/m(X)) \leq \text{ Cte.}$$

De même, on démontre que

$$|(\partial a/\partial \xi_j)(X)|(1/m^2(X))m(X) \leq \text{ Cte.}$$

Lorsque $k \geq 2$, on utilise seulement l'appartenance de a à $S^2(\mathbf{R}^{2n})$, ce qui donne

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(X)| &\leq C_{\alpha,\beta} < \xi >^{2-|\alpha|} \\ &\leq m^2(X) < \xi >^{|\beta|} m^{|\beta|-|\alpha|} < \xi >^{2-|\alpha|-|\beta|} m^{-2+|\beta|+|\alpha|}.\end{aligned}$$

Comme $m(X) \geq < \xi > 1/2$ et que $2 \leq |\alpha| + |\beta|$, on a

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(X)| \leq C_{\alpha,\beta}\, m^2(X) < \xi >^{|\beta|} m^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Donc $a \in S(M^2, g)$.

2) Remarquons que

$$g_X = \frac{< \xi >^2}{m^2(X)} g_{1,0,X} \quad \text{avec} \quad g_{1,0,X}(dx, d\xi) = dx^2 + \frac{d\xi^2}{< \xi >^2}.$$

La métrique $g_{1,0}$ est tempérée. De plus, il est clair que

$$\frac{< \xi >^2}{m^2(X)} \geq 1.$$

Il en résulte imédiatement que $g \leq g^\sigma$. Il suffit maintenant, d'après la proposition 18.5.6 de [7], de démontrer que la métrique g est lente.

Pour ce dernier point, considérons le poids équivalent au précédent, que l'on notera encore m, défini par

$$m(X) = (a^2(X) + < \xi >^2)^{1/4}.$$

On va démontrer en fait une propriété plus forte que la lenteur de g, à savoir, la lenteur de m pour la métrique de Hörmander de type $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\tilde{g}_X(dx, d\xi) = < \xi > dx^2 + < \xi >^{-1} d\xi^2 \qquad X \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{1.13}$$

Ecrivons tout d'abord que

$$\begin{aligned}m^4(X) - m^4(Y) &= a^2(X) - a^2(Y) + |\xi|^2 - |\eta|^2 \\ &= (a(X) - a(Y) + a(Y))^2 - a^2(Y) + |\xi|^2 - |\eta|^2.\end{aligned}$$

Il vient alors que

$$|m^4(X) - m^4(Y)| \leq \text{Cte}\,\big((a(X) - a(Y))^2 + a^2(Y) + ||\xi|^2 - |\eta|^2|\big).$$

Or, vu que $m^2(Y) \geq < \eta >$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\big||\xi|^2 - |\eta|^2\big|}{m^4(Y)} &\leq \text{Cte}\,\Big(\frac{|\xi - \eta|^2}{m^4(Y)} + \frac{|\eta|^2}{m^4(Y)}\Big)\\ &\leq \text{Cte}\,(1 + \tilde{g}_Y(X - Y)).\end{aligned}$$

Donc pour majorer

$$\frac{m^4(X)}{m^4(Y)} = \frac{m^4(X) - m^4(Y)}{m^4(Y)} + 1,$$

il ne reste plus qu'à considérer le terme

$$\frac{(a(X) - a(Y))^2}{m^4(Y)}.$$

Supposons que

$$|\xi - \eta|^2 \leq \epsilon < \eta > \quad \text{et que} \quad |x - y|^2 \leq \epsilon < \eta >^{-1}. \tag{1.14}$$

On utilise alors l'inégalité de Taylor à l'ordre deux.

$$|a(X) - a(Y) - da(Y) \cdot (X - Y)| \leq C \sup_{t \in [0,1]} |d^2 a(Y + t(X - Y)) \cdot (X - Y)^2|.$$

Comme $a \in S^2(\mathbf{R}^n)$, on a

$$\sup_{t \in [0,1]} |d^2 a(Y + t(X - Y)) \cdot (X - Y)^2| \leq C|x - y|^2 < \eta >^2 + |\xi - \eta|^2.$$

D'après l'inégalité (1.12), il vient

$$\begin{aligned}|da(Y) \cdot (X - Y)| &\leq |\partial_x a(Y) \cdot (x - y)| + |\partial_\xi a(Y) \cdot (\xi - \eta)|\\ &\leq a^{1/2}(Y)\big(< \eta > |x - y| + < \eta >^{1/2} |\xi - \eta|\big).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$|a(X) - a(Y)|^2 \leq C\big(1 + |x - y|^4 < \eta >^4 + |\xi - \eta|^4 + a(Y)|\xi - \eta|^2\big).$$

D'après les conditions (1.14), on a

$$|a(X) - a(Y)|^2 \leq C(1 + \epsilon < \eta >^2 + < \eta > a(Y)).$$

Comme $m(Y) \geq C(a(Y) + < \eta >^{1/2})$, il vient

$$\frac{(a(X) - a(Y))^2}{m^4(Y)} \leq C(1 + \epsilon).$$

Comme le poids $< \xi >$ est de toute évidence lent pour la métrique $\tilde{g}$, ceci conclut la démonstration du lemme.

Comme $g \leq \tilde{g}$, on a $\tilde{g}^\sigma \leq g^\sigma$. Il résulte donc du lemme ci-dessus que m est un poids tempéré pour la métrique $\tilde{g}$. D'où le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.2.2. — *Le poids m défini par (1.9) est un poids pour la métrique $\tilde{g}$ définie par (1.13).*

2. Enoncé et démonstration du théorème global.

THÉORÈME 2.1. — *Soit a un symbole classique de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$ dont la partie principale a_0 est positive. On suppose que a^w est inversible et que $a^w(x,D)^{-1}$ applique continûment $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $H^1(\mathbf{R}^n)$. Alors il existe un symbole $b \in S(m^{-2}, g)$ tel que $a \# b = b \# a = 1$ (m et g définis par (1.9) et (1.10) avec a_0).*

La démonstration de ce résultat nécessite plusieurs théorèmes démontrés dans [3] et [4], concernant en particulier les espaces de Sobolev associés à une métrique de Hörmander et l'inversibilité, dans l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels, d'opérateurs inversibles en tant qu'opérateurs entre espaces de Sobolev. Les hypothèses de ces théorèmes sont vérifiées pour la métrique g du théorème 2.1 ci-dessus.

Soit $U_{Y,r}$ la boule $\{X \mid g_Y(Y - X) < r^2\}$ où $r^2 < C^{-1}$ (C constante de lenteur (1.4)). Par définition l'espace des *symboles confinés dans $U_{Y,r}$* est l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ muni de la famille de semi-normes

(2.1)

$$||d||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} = \sup_{\substack{\ell \leq k \ ; \ X \in \mathbf{R}^{2n} \\ g_X(T_j) \leq 1}} |\ \partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} d(X)| (1 + g_Y^\sigma(X - U_{Y,r}))^{k/2},$$

en posant

$$g_Y^\sigma(X - U_{Y,r}) = \inf_{W \in U_{Y,r}} g_Y^\sigma(X - W).$$

Une famille de symboles $(d_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est dite *uniformément confinée dans les boules* $U_{Y,r}$ si les semi-normes $||d||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}$ sont majorées par des constantes C_k indépendantes de Y.

• Il existe une g-partition de l'unité (théorème 3.1.3 de [3]), c'est-à-dire une famille uniformément confinée de fonctions $(\varphi_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ à support dans $U_{Y,r}$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} \varphi_Y |g_Y|^{1/2}\, dY = 1, \tag{2.2}$$

où $|g|$ désigne le déterminant de g.

Si M est un poids admissible pour g, on peut alors décomposer tout symbole $d \in S(M,g)$ sous forme intégrale en posant $d_Y(X) = M^{-1}(Y)d(X)\varphi_Y(X)$ et

$$d(X) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M(Y) d_Y(X) |g_Y|^{1/2} dY. \tag{2.3}$$

La famille $(d_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est uniformément confinée et réciproquement si $(d_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est une famille de symboles uniformément confinée, l'intégrale (2.3) converge et définit un élément de $S(M,g)$.

• D'après le corollaire 1.2.2, la métrique g est dominée par la métrique de Hörmander $\tilde{g}$ de type $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ((1.13), définition 7.1 de [4]). On a donc toutes les propriétés suivantes pour tous poids M et M_1 admissibles pour g et tout symbole $d \in S(M,g)$:

– On peut définir l'espace de Sobolev $H(M)$ (théorème 7.8 de [4]). L'espace $H(M)$ est l'espace des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y) ||\varphi_Y^w u||^2_{L^2} |g_Y|^{1/2} dY < \infty \tag{2.4}$$

(φ_Y partition de l'unité définie en (2.2)).

L'espace $H(M)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H(M)} = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y)(\varphi_Y^w u, \varphi_Y^w v)_{L^2} |g_Y|^{1/2} dY. \tag{2.5}$$

On notera $||\cdot||_{H(M)}$ la norme associée.

– $H(1)$ est identique à $L^2(\mathbf{R}^n)$ (théorème 4.6 de [4]).

– Opérance dans les espaces de Sobolev (corollaire 4.5 de [4]); d^w applique continûment $H(M_1)$ dans $H(M_1/M)$.

– La condition suffisante d'inversibilité (corollaire 7.7 de [4]) : Pour qu'il existe $d' \in S(M^{-1}, g)$ tel que $d \# d' = d' \# d = 1$, il suffit que pour un poids admissible $\widetilde{M}$, l'opérateur d^w soit inversible en tant qu'opérateur de $H(\widetilde{M})$ dans $H(\widetilde{M}/M)$.

L'idée directrice de la démonstration du théorème 2.1 consiste à traiter le symbole a comme un symbole elliptique (de poids m^2) au sens suivant :

$$\exists (c, C) \in \mathbf{R}_+^2 \ \forall X \in \mathbf{R}^{2n} \ \lambda_g(X) \geq C \Rightarrow a(x) \geq c m^2(X), \tag{2.6}$$

où λ_g est la fonction définie par la relation (1.5). Ceci suggère la décomposition de l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}$ en la réunion d'une zone dite sous-elliptique

$$\mathcal{S} = \{Y = (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n} \mid m(Y) \leq A < \eta >^{1/2}\} \tag{2.7}$$

et d'une zone dite elliptique $\mathcal{E} = \mathcal{S}^c$ ($A > 0$ désigne une constante assez grande que l'on choisira ultérieurement).

Le théorème 2.1 résulte alors des deux lemmes suivants que nous admettrons momentanément.

LEMME 2.2. — *Soit $(\varphi_Y)_{Y \in \mathbf{R}^{2n}}$ une g-partition de l'unité définie par (2.2). Il existe deux familles $(\delta_Y)_{Y \in \mathbf{R}^{2n}}$ et $(R_Y)_{Y \in \mathbf{R}^{2n}}$ uniformément confinées dans les $U_{Y,r}$ telles que l'on ait, pour $Y \in \mathcal{E}$,*

$$\varphi_Y = m^{-2}(Y) \delta_Y \# a + \lambda_g^{-1}(Y) R_Y. \tag{2.8}$$

LEMME 2.3. — *Soit $(\theta_Y)_{Y \in \mathbf{R}^{2n}}$ une famille de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ uniformément confinée. Alors pour tout poids M admissible pour g, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y) ||\theta_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \leq C ||u||_{H(M)}^2. \tag{2.9}$$

Démonstration du théorème 2.1. — Comme $a \in S(m^2, g)$, alors a^w applique continûment $H(m^2)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Donc en vertu de la condition suffisante d'inversibilité, il suffit dès lors de vérifier que

$$||u||_{H(m^2)} \leq \text{ Cte } ||a^w u||_{L^2}. \tag{2.10}$$

Or

(2.11)
$$\begin{aligned}||u||_{H(m^2)} &= \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^4(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &= \int_{\mathcal{S}} m^4(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY + \int_{\mathcal{E}} m^4(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Comme par hypothèse, l'opérateur $a^w(x,D)^{-1}$ applique continûment $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $H^1(\mathbf{R}^n)$, on a, pour le premier terme I_1 :

(2.12)
$$\begin{aligned}I_1 &\leq A^4 \int_{\mathbf{R}^{2n}} <\eta>^2 ||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &\leq A^4 ||u||_{H^1(\mathbf{R}^n)}^2 \leq \text{Cte} A^4 ||a^w u||_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Pour majorer I_2, on va décomposer φ_Y dans $\mathcal{E}$. En appliquant le lemme 2.2, puis en quantifiant, il vient

(2.13)
$$\varphi_Y^w = m^{-2}(Y)\delta_Y^w a^w + \lambda_g^{-1}(Y) R_Y^w.$$

D'après le lemme 2.3 d'une part et le fait que $\lambda_g(\cdot) \geq A$ dans $\mathcal{E}$ d'autre part, on en déduit que

(2.14)
$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{\mathcal{E}} m^4(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &\leq \text{Cte} \left(\int_{\mathbf{R}^{2n}} ||\delta_Y^w a^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \right. \\ &\qquad \left. + \sup_{Y\in\mathcal{E}} \left\{ \lambda_g^{-2}(Y) \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^4(Y)||R_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \right\} \right) \\ &\leq \text{Cte} \left(||a^w u||_{L^2}^2 + \frac{1}{A^2} ||u||_{H(m^2)}^2 \right).\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 2.2. — Pour démontrer le lemme 2.2, il est nécessaire d'introduire la notion de biconfinement. On note $\Delta_r(X,Y)$ la quantité suivante qui mesure l'éloignement pour g^σ de deux g-boules.

(2.15)
$$\Delta_r(X,Y) = 1 + \max\{g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}), g_Y^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r})\}$$

où

$$g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}) = \inf \{g_X^\sigma(X' - Y') \mid X' \in U_{X,r}, Y' \in U_{Y,r}\}.$$

La fonction Δ_r vérifie la propriété d'intégration suivante (théorème 3.2.2 de [3], section 2.3 de [4]) :

$$\exists C, \exists N, \forall X \qquad \int_{\mathbf{R}^{2n}} \Delta_r^{-N}(X,Y)\ |g_Y|^{1/2} dY \leq C. \tag{2.16}$$

Les conditions (1.4) et (1.6) de lenteur et de tempérance de la métrique ainsi que le fait, pour un poids M, d'être un g-poids se traduisent (voir également [3]) par

$$\left(\frac{g_X(\cdot)}{g_Y(\cdot)}\right)^{\pm 1} \leq C\Delta_r(X,Y)^N \quad \text{et} \quad \left(\frac{M(X)}{M(Y)}\right)^{\pm 1} \leq C\Delta_r(X,Y)^N. \tag{2.17}$$

Le théorème de biconfinement suivant (théorème 3.2.1 de [3]) donne une estimation du reste $d \# h - dh$ que l'on notera $\lambda_g^{-1}(Y)R(d,h)$:

Soient d et h deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, on a alors l'estimation suivante pour le reste $R(d,h)$ défini ci-dessus :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists \ell \in \mathbf{N} \quad \exists C > 0, \tag{2.18}$$
$$||R(d,h)||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq C||d||_{\ell;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}||h||_{\ell;\mathrm{Conf}(\delta,Z,r)}\Delta_r^{-N}(Y,Z).$$

En particulier, si $(d_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ et $(h_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ sont deux familles de symboles uniformément confinées dans les boules $U_{Y,r}$, la famille $(\Delta_r^{-N}(Y,Z)\ R(d_Y,h_Z))_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est, pour chaque entier N, uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ et dans les $U_{Z,r}$.

Pour obtenir la décomposition (2.8) dans $\mathcal{E}$, on écrit φ_Y sous la forme du produit

$$\varphi_Y(X) = (\varphi_Y(X)/a(X))a(X) \qquad X \in \mathbf{R}^{2n},$$

puis à l'aide de la forme intégrale (2.3) de a

$$\varphi_Y(X) = m^{-2}(Y)\tilde{\delta}_Y(X) \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)a_Z(X)|g_Z|^{1/2} dZ, \tag{2.19}$$

avec

$$\tilde{\delta}_Y(X) = (m^2(Y)\varphi_Y(X)/a(X)). \tag{2.20}$$

La famille $(a_Z)_{Z\in\mathbf{R}^{2n}}$ est uniformément confinée dans les boules $U_{Z,r}$ et la famille $(\delta_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ définie par

$$\delta_Y = \begin{cases} \tilde{\delta}_Y & \text{si } Y \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est uniformément confinée dans les boules $U_{Y,r}$.

D'après le théorème de biconfinement (2.18) on a :

$$\delta_Y a_Z = \delta_Y \# a_Z + \lambda_g^{-1}(Y)\ \widetilde{R}\ (\delta_Y, a_Z). \tag{2.21}$$

De plus la famille $(\Delta_r^{-N}(Y,Z)\widetilde{R}(\delta_Y), a_Z))_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est uniformément confinée pour tout N et la fonction Δ_r vérifie la propriété d'intégration (2.16). Il s'ensuit alors que la famille $(R_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ définie par

(2.22)

$$R_Y(X) = \begin{cases} m^{-2}(Y)\displaystyle\int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)\widetilde{R}(\delta_Y, a_Z)(X)|g_Z|^{1/2}dZ & \text{si} \quad Y \in \mathcal{E} \\ 0 \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$. D'après (2.21), il vient, pour tout $Y \in \mathcal{E}$,

$$\varphi_Y(X) = m^{-2}(Y)\tilde{\delta}_Y(X)\# \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)a_Z(X)|g_Z|^{1/2}dZ + \lambda_g^{-1}(Y)R_Y.$$

Vu que

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)a_Z(X)|g_Z|^{1/2}dZ = a,$$

il vient, pour tout $Y \in \mathcal{E}$,

$$\varphi_Y(X) = m^{-2}(Y)\tilde{\delta}_Y(X)\#a + \lambda_g^{-1}(Y)R_Y,$$

ce qui n'est rien d'autre que l'énoncé du lemme 2.2.

Démonstration du lemme 2.3. — On a pour cela le théorème 7.8 de [4]. Ce théorème affirme qu'étant donnée une g-partition de l'unité $(\varphi_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$, il existe une famille $(\psi_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ telle que l'on ait

$$\int \psi_Y \# \varphi_Y |g_Y|^{1/2}dY = 1. \tag{2.23}$$

On sait par ailleurs que l'on a l'estimation L^2 suivante (proposition 2.4.1 de [3])

$$\exists C > 0\ \exists k \in \mathbf{N} \quad ||d^w||_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C\ ||d||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}, \tag{2.24}$$

pour tout symbole $d \in S(M,g)$.

La démonstration du lemme 2.3 s'inspire de celle de la proposition 4.3 de [4].

Etant donnée une famille de symboles $(\theta_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ uniformément confinée, considérons la partition de l'unité (2.23), alors

(2.25)
$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y)||\theta_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2}dY$$
$$= \int_{\mathbf{R}^{6n}} M^2(Y)(\theta_Y^w\psi_Z^w\varphi_Z^w u, \theta_Y^w\psi_{Z'}^w\varphi_{Z'}^w u)_{L^2}|g_Z|^{1/2}dZ|g_{Z'}|^{1/2}dZ'|g_Y|^{1/2}dY.$$

On a

$$|(\theta_Y^w\psi_Z^w\varphi_Z^w u, \theta_Y^w\psi_{Z'}^w\varphi_{Z'}^w u)_{L^2}| \leq ||\bar{\psi}_{Z'}^w\bar{\theta}_Y^w\theta_Y^w\psi_Z^w||_{\mathcal{L}(L^2)}||\varphi_Z^w u||_{L^2}||\varphi_{Z'}^w, u||_{L^2}.$$

En vertu de l'estimation L^2 (2.24) et du théorème de biconfinement (2.18), on obtient, que, pour tout N,

$$||\bar{\psi}_{Z'}^w\bar{\theta}_Y^w\theta_Y^w\psi_Z^w||_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \text{ Cte } \Delta_r^{-N}(Y,Z)\Delta_r^{-N}(Y,Z').$$

On en déduit finalement que l'expression (2.25) est majorée par

(2.26)
$$\text{Cte } \int_{\mathbf{R}^{4n}} A(Z,Z')M(Z)||\varphi_Z^w u||_{L^2}M(Z')||\varphi_{Z'}^w u||_{L^2}|g_Z|^{1/2}dZ|g_{Z'}|^{1/2}dZ'$$

où la fonction $A(Z,Z')$ est elle-même majorée par

$$\text{Cte } \int M^2(Y)M^{-1}(Z)M^{-1}(Z')\Delta_r^{-N}(Y,Z)\Delta_r^{-N}(Y,Z')|g_Y|^{1/2}dY.$$

D'après (2.17), on a

$$\left(\frac{M(X)}{M(Y)}\right)^{\pm 1} \leq C\Delta_r(X,Y)^{N_0}.$$

En posant $f(Z) = ||\varphi_Z^w u||_{L^2}$, il en résulte que la quantité (2.26) est majorée, pour tout N, par

(2.27)
$$C_N \int_{\mathbf{R}^{6n}} \Delta_r^{-N}(Y,Z)\Delta_r^{-N}(Y,Z')f(Z)f(Z')|g_Y|^{1/2}dY|g_Z|^{1/2}dZ|g_{Z'}|^{1/2}dZ'.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz aux deux fonctions $f(Z)$ et $f(Z')$ et à la mesure

$$\Delta_r^{-N}(Y,Z)\Delta_r^{-N}(Y,Z')|g_Y|^{1/2}dY|g_Z|^{1/2}dZ|g_{Z'}|^{1/2}dZ',$$

on conclut la démonstration du lemme 2.3.

3. Localisation.

Il s'agit de démontrer le théorème A qui n'est rien d'autre qu'une version locale du théorème 2.1. On va préalablement construire une paramétrixe sur chaque compact de Ω.

Soit K un compact de Ω (on utilise les notations de l'introduction), on pose

$$A_K = \sum_{j=1}^{q} (\varphi_K P_j^*)(\varphi_K P_j) - \sum_{j=1}^{n} (1-\tilde{\varphi}_K)\partial_j^2(1-\tilde{\varphi}_K), \tag{3.1}$$

où φ_K et $\tilde{\varphi}_K$ sont deux fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ telles que $\tilde{\varphi}_K$ vaille identiquement 1 près de K et soit supportée à l'intérieur de l'ensemble où φ_K vaut 1.

L'opérateur A_K est un opérateur positif, globalement sous-elliptique avec perte d'une dérivée, donc il existe deux constantes c et C positives telles que

$$||u||_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq C||(A_K + c\ \mathrm{Id})u||_{L^2}. \tag{3.2}$$

Le symbole principal $a_K + c$ de $A_K + c\ \mathrm{Id}$ est positif; on peut lui appliquer le théorème 2.1 avec m_K et g_K définis par (1.9) et (1.10). Donc il existe un symbole $p_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que

$$(a_K + c) \# p_K = p_K \# (a_K + c) = 1. \tag{3.3}$$

De (3.3) on obtient

$$\begin{aligned} u &= p_K^w A_K u &&+ c\, p_K^w u \\ &= p_K^w A_K u &&+ c\, p_K^w (p_K^w A_K u + c p_K^w u) \\ &= p_K^w A_K u &&+ c\, (p_K^w)^2 A_K u + c^2 (p_K^w)^2 u, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ainsi de suite, d'où pour chaque $j \in \mathbf{N}^*$ un symbole b_j défini par

$$b_j = c^{j-1} p_K^{\#j} \in S(m_K^{-2j}, g_K),$$

avec la convention $q^{\#j} = q\# \ldots \#q$, j fois.

Admettons un instant le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soient g une métrique de Hörmander et M un poids admissible pour cette métrique tel que $M \leq 1$. On considère une suite de symboles $(b_j)_{j\in\mathbf{N}}$ telle que $b_j \in S(M^{\mu_j}, g)$ où $(\mu_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite*

strictement décroissante tendant vers $-\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$. Alors il existe un symbole $b \in S(M^{\mu_0}, g)$ tel que, pour tout N, on ait

$$b - \sum_{j<N} b_j \in S(M^{\mu_N}, g).$$

Il en résultera l'existence d'un symbole $\tilde{b}_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que :

(3.5) $\quad A_K \tilde{b}_K^w(x,D) - \text{Id}$ et $\tilde{b}_K^w A_K - \text{Id}$ opèrent de $\mathcal{E}'_K$ dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Le théorème 18.5.10 de [7] assure par ailleurs l'existence d'un symbole b'_K appartenant à $S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que $b_K^w = b'_K(x,D)$. Soit alors b_K défini par $b_K(x,\xi) = \varphi(x) b'_K(x,\xi)$. Il est clair que

(3.6) $\quad \Delta_H b_K(x,D) - \text{Id}$ et $b_K(x,D)\Delta_H - \text{Id}$ opèrent de $\mathcal{E}'_K$ dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Considérons maintenant un recouvrement $(\Omega_j)_{j\in\mathbf{N}}$ localement fini de Ω tel que $K_j = \bar{\Omega}_j$ soit un compact de Ω. Soient $(\varphi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement et $(\chi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $C_0^\infty(\Omega_j)$ telles que, pour tout j, χ_j vaille 1 près du support de φ_j. On pose $B = \sum_{j\in\mathbf{N}} \chi_j b_{K_j}(x,D)\varphi_j$.

Il est évident que le symbole b de B appartient à $S^{-1}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$. Reste à vérifier que $\Delta_H B - \text{Id}$ est un opérateur infiniment régularisant. On a :

$$\Delta_H B = \sum_{j\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H B \varphi_j + \sum_{j\in\mathbf{N}} (1-\chi_j)\Delta_H B\varphi_j. \tag{3.7}$$

Le symbole de $\sum_j (1-\chi_j)\Delta_H B\varphi_j$ appartient à $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$, il est donc infiniment régularisant ; alors

$$\begin{aligned} \Delta_H B &\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H \chi_k b_{K_k}(x,D)\varphi_k\varphi_j \\ &\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H b_{K_k}(x,D)\varphi_k\varphi_j \\ &\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \ \text{Id}\ \varphi_k\varphi_j \\ &\equiv \text{Id} \end{aligned} \tag{3.8}$$

(où l'on a noté $A \equiv B$ si et seulement $A - B$ opère de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$).

Les estimations (3) de l'introduction résultent immédiatement de l'unicité des paramétrixes $b_K(x,D)$ modulo un opérateur infiniment régularisant.

Démontrons alors l'unicité annoncée, ce qui achèvera la démonstration du théorème A :

Pour tout compact K de Ω, $A \equiv B_{(K)}$ signifie $A - B$ opère de $\mathcal{E}'_K$ dans C^∞_o. Soient b_K et c_K deux paramétrixes vérifiant (3.6), alors

$$\begin{aligned} b_K - c_K &\equiv b_K \Delta_H c_K - c_K \Delta_H b_K \\ &\equiv c_K - b_K, \end{aligned} \tag{3.9}$$

d'où l'unicité.

Pour conclure, reste à démontrer le lemme 3.1 qui prouvera l'existence d'un symbole $b_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que $b_K - \sum_{j<N} b_j \in S(m_K^{-2N}, g_K)$.

Démonstration du lemme 3.1. — Remarquons tout d'abord que, quitte à remplacer $M(X)$ par

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M(Y)\varphi_Y(X)|g_Y|^{1/2}dY,$$

on peut supposer que $M \in S(M,g)$.

Nous allons suivre une stratégie "à la Borel". Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ égale à 0 dans un petit voisinage de l'origine, et à 1 pour $|x| \geq 1$. On pose

$$\tilde{b}_j(X) = \chi(M(X)/t_j)b_j(X)$$

où $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels > 0. On se propose de démontrer que, pour un choix convenable de la suite $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$, le symbole $b = \sum_{j\in\mathbf{N}} \tilde{b}_j$ répond à la question. La première étape consiste à majorer les semi-normes de

$$\chi\left(\frac{m(X)}{t}\right)$$

dans l'espace des symboles $S(1,g)$. La formule de Faa-di-Bruno affirme que

$$D^k\left[\chi\left(\frac{m(X)}{t}\right)\right] = \sum_{\substack{q,k_1+\ldots+k_q=k \\ k_i\geq 1}} t^{-q}\chi^{(q)}\left(\frac{M(X)}{t}\right)D^{k_1}M \otimes \ldots \otimes D^{k_q}M.$$

Comme $M \in S(M,g)$, il vient, pour tout $(T_1,\dots,T_k) \in (\mathbf{R}^{2n})^k$ tels que $g_X(T_i)=1$,

$$|(D^{k_1}M \otimes \dots \otimes D^{k_q}M)(T_1,\dots,T_k)| \leq C_k M^q(X).$$

D'où il résulte que

$$\left|\partial_{T_1}\dots\partial_{T_k}\chi\left(\frac{M(X)}{t}\right)\right| \leq C_k \sum_{\substack{q,k_1+\dots+k_q=k\\ k_i\geq 1}} t^{-q}M^q(X)\chi^{(q)}\left(\frac{M(X)}{t}\right).$$

Or, il existe une constante A strictement supérieure à 1 telle que

$$\chi^{(q)}\left(\frac{M(X)}{t}\right) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}t \leq M(X) \leq At.$$

Il en résulte que, pour tout λ et pour tout α, on a

$$\left|\partial_{T_1}\dots\partial_{T_k}\chi\left(\frac{M(X)}{t}\right)\right| \leq C_k A^{|\lambda|}M^\alpha(X)t^{-\lambda}.$$

D'après la formule de Leibnitz, pour tout entier j et k, il existe une constante $C_{j,k}$ telle que, pour tout λ et tout t, on ait

$$\left|\partial_{T_1}\dots\partial_{T_k}\left(b_j(X)\chi\left(\frac{M(X)}{t}\right)\right)\right| \leq C_{k,j}A^{|\lambda|}M^{\mu_j+\lambda}(X)t^{-\lambda}.$$

En prenant $\lambda = \mu_{j-1}-\mu_j$, il en résulte que

$$\left\|b_j\chi\left(\frac{M(\cdot)}{t}\right)\right\|_{k,S(M^{\mu_{j-1}},g)} \leq C_{j,k}t^{\mu_j-\mu_{j-1}}. \tag{3.10}$$

Posons alors

$$t_j = \left(2^j(1+C_{j,j})\right)^{\frac{1}{\mu_{j-1}-\mu_j}} \quad \text{et} \quad \widetilde{b}_j(X) = \chi\left(\frac{M(X)}{t_j}\right)b_j(X).$$

D'après l'inégalité ci-dessus, on a, pour tout $j \geq \max\{N,k\}$,

$$\|\widetilde{b}_j\|_{k;S(M^{\mu_{N-1}},g)} \leq 2^{-j}.$$

D'autre part, d'après (3.10), on sait que, pour tout $j \geq N$, $\widetilde{b}_j \in S(M^{\mu_{j-1}},g)$. Donc la $(\widetilde{b}_j)_{j\geq N}$ est une série convergente dans l'espace $S(\mu_{N-1},g)$.

En particulier,

$$b = b_0 + \sum_{j\geq 1}\widetilde{b}_j \in S(\mu_0,g).$$

Il reste maintenant à vérifier que

$$b - \sum_{j<N} b_j \in S(\mu_N, g).$$

Pour ce faire, on écrit

$$b - \sum_{j<N} b_j = \sum_{j\geq N} \widetilde{b}_j + \sum_{j<N} \chi\left(\frac{M}{t_j}\right) b_j.$$

La série $(\widetilde{b}_j)_{j>N}$ est une série convergente dans l'espace $S(\mu_N, g)$. Comme $\widetilde{b}_N$ appartient à $S(\mu_N, g)$, il vient

$$\sum_{j\geq N} \widetilde{b}_j \in S(\mu_N, g).$$

Enfin,

$$b_j \in S(M^{\mu_j}, g) \quad \text{et} \quad \left\| \chi\left(\frac{M}{t_j}\right) \right\|_{k;S(1,g)} \leq C_k.$$

Donc, d'après la formule de Leibnitz, il existe pour tout entier k une constante C_k telle que

$$\forall X, \forall j, \left| \partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} \left(\chi\left(\frac{M}{t_j}\right) - 1 \right) \right| \leq C_k M^{\mu_j}(X) \prod_{1\leq \ell \leq k} g_X(T_\ell)^{1/2}.$$

Or, comme χ vaut identiquement 1 près de l'origine, il existe une constante c telle que

$$\chi\left(\frac{M}{t_j}\right) - 1 \neq 0 \Rightarrow t_j \geq cM(X).$$

Comme on a supposé que $M \geq 1$, on a

$$\left| \partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} \left(\chi\left(\frac{M}{t_j}\right) - 1 \right) \right| \leq C_k M^{\mu_N}(X) t_j^{\mu_j - \mu_N} \prod_{1\leq \ell \leq k} g_X(T_\ell)^{1/2}.$$

D'où le lemme.

4. Inclusion dans les espaces L^p.

On se propose de démontrer, dans le cas d'une somme de carrés de champs de vecteurs, le théorème 4.1 d'inclusion dans les espaces L^p. On

utilisera les résultats de la section 4.6 de [4] que nous allons rappeler après avoir énoncé le théorème 4.1.

THÉORÈME 4.1. — *On suppose que les opérateurs $P_j, 1 \leq j \leq q$, sont des champs de vecteurs à coefficients C^∞. On note Ω_ℓ l'ouvert*

(4.1) $\Omega_\ell = \{x \in \mathbf{R}^n$; *le système* $P_1(x,\xi), \cdots, P_q(x,\xi)$ est de rang ℓ en $x\}$.

Soit $p > 2$; on pose

$$h_{s,p}(x) = \Big(\int (1 + p_j^0(x,\xi)^2 + <\xi>\Big)^{-sp/(p-2)} d\xi)^{(p-2)/2p}. \tag{4.2}$$

Pour tout compact K de Ω, pour tous s, p, ℓ tels que $s > (n-\ell/2)(1-2/p)$, il existe $c > 0$ tels que l'on ait :

$$||h_{s,p}^{-1} u||_{L^p(\Omega_\ell \cap K)} \leq C \; ||u||_{H(m_K^s)} \tag{4.3}$$

pour m_K et g_K définis par (1.9) et (1.10).

Remarque. — La condition sous laquelle (4.3) est vraie revient à

$$p < \frac{2Q}{Q-2s} \qquad \text{avec} \qquad Q = l + 2(n-l).$$

L'entier Q est la dimension homogène du système de champs de vecteurs $(P_j)_{1 \leq j \leq q}$.

Démonstration. — La métrique g_K est scindée c'est-à-dire qu'il existe des formes quadratiques définies positives $g_{1,X}$ et $g_{2,X}$ sur $\mathbf{R}^n$ telles que

$$g_K(dx, d\xi) = g_{1,X}(dx) + g_{2,X}(d\xi). \tag{4.4}$$

On a alors le théorème suivant (théorème 4.7 de [4]) que l'on rappelle pour la commodité du lecteur :

Soient M un poids admissible pour g et $p \in]2, +\infty[$. On note Ω_p l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que la quantité

$$h_p(x) = ||M^{-1}(x,\xi)||_{L^{2p/(p-2)}(d\xi)}$$

soit finie.

Si la mesure de Ω_p est > 0, alors l'application $u \to h_p^{-1} u|_{\Omega_p}$ définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ se prolonge en une application définie sur $H(M)$ vérifiant

$$||h_p^{-1} u||_{L^p(\Omega_p)} \leq \text{ Cte } ||u||_{H(M)}.$$

On observe alors qu'un changement de variable ramène, via le théorème 4.7 de [4] ci-dessus, à l'étude évidente de la convergence de l'intégrale

$$\int (1+\xi_1^4+\cdots+\xi_\ell^4+\xi_{\ell+1}^2+\cdots+\xi_n^2)^{-sp/(2(p-2))}d\xi.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEALS, Characterization of pseudodifferential operators and applications, Duke Math. J., 44 (1977), 45-57.

[2] P. BOLLEY, J. CAMUS, J. NOURRIGAT, La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels, Comm. in P.D.E., 7 (1982), 197-221.

[3] J.-M. BONY et N. LERNER, Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur I, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 22, (1989), p.377-433.

[4] J.-M. BONY et J.-Y. CHEMIN, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, Preprint n°1042 de l'Ecole Polytechnique, octobre 1991, à paraître au Bull. Soc. Math. France et Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique 1991-1992, exposé n°23.

[5] C.E. CANCELIER et J.-Y. CHEMIN, Sous-ellipticité d'opérateurs intégro-différentiels vérifiant le principe du maximum, Preprint n°1016, octobre 1991, Ecole Polytechnique, à paraître aux Annali della Scuola Normale superiore di Pisa

[6] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., 119 (1967), 147-171.

[7] L. HÖRMANDER, The analysis of partial differential operators III, Springer-Verlag 1985.

[8] A.NAGEL, E.M. STEIN and S. WAINGER, Balls and metrics defined by vector fields I : Basic properties, Acta Math., 155 (1985), 103-147.

[9] L. ROTHSCHILD and E.M. STEIN, Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups, Acta Math., 137 (1977), 247-320.

[10] C.-J. XU, Opérateurs sous-elliptiques et régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre en deux variables, Comm. in P.D.E., 11 (1986), 1575-1603.

[11] C.-J. XU, Subelliptic variational problems, Bull. Soc. Math. France, 118 (1990), 147-159.

Manuscrit reçu le 25 février 1993.

C.E. CANCELIER,
Université de Reims
Dépt. de Mathématiques
B.P. 347
F-51062 Reims Cedex.

J.-Y. CHEMIN,
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Plateau de Palaiseau
F-91128 Palaiseau Cedex.

C.J. XU,
Department of mathematics
Wuhan University
Wuhan 430072 (P.R. China).