ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTOPHE BAVARD

L'aire systolique conforme des groupes cristallographiques du plan

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 3 (1993), p. 815-842

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_3_815_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 3 (1993), 815-842

L'AIRE SYSTOLIQUE CONFORME DES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES DU PLAN

par Christophe BAVARD

Introduction.

En 1949, C. Loewner établissait l'inégalité isosystolique optimale pour le tore T de dimension 2. Ce résultat relie deux invariants géométriques d'une métrique riemannienne g sur T, qui sont l'aire, notée Aire g, et la plus petite longueur d'une courbe non contractile, ou systole, notée Sys g :

$$\text{Aire } g/\text{Sys}^2\, g \geq \sqrt{3}/2.$$

De plus, l'égalité caractérise le tore plat équilatéral à isométrie et homothétie près.

La systole d'une variété riemannienne V est aussi définie par l'action isométrique du groupe fondamental Γ sur le revêtement universel X :

$$\text{Sys } V = \inf_{x \in X} \inf_{\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}} \text{dist}(x, \gamma.x). \tag{1}$$

Cette formulation permet d'étendre la notion de systole à un groupe discret quelconque Γ d'isométries d'une variété riemannienne X : Sys Γ est donné par (1), où l'on écarte les éléments de Γ qui ont des points fixes.

Nous établissons dans ce travail des inégalités optimales, analogues au résultat classique de Loewner, pour tous les groupes cristallographiques du plan euclidien :

Mots-clés : Systole – Groupes cristallographiques du plan euclidien – Groupes du triangle.
Classification A.M.S. : 53C20 – 51F15.

THÉORÈME. — *Soit* Π *un groupe cristallographique du plan euclidien. Alors pour toute métrique riemannienne* Π*-invariante* g *sur* $\mathbb{R}^2$ *on a l'inégalité :*

$$\mathrm{Aire}_g(\mathbb{R}^2/\Pi)/\mathrm{Sys}_g^2\,\Pi \geq C_\Pi,$$

où C_Π *est une constante optimale dont la valeur numérique est donnée par la table (b) §3.2.*

La constante C_Π ne dépend que de la classe d'isomorphisme de Π. Les 17 valeurs explicites de C_Π sont classées par ordre décroissant dans la table (b) §3.2. Deux de ces constantes isosystoliques étaient déjà connues : celle du tore (Loewner) et celle de la bouteille de Klein ($C = 2\sqrt{2}/\pi$, [Ba1]).

Pour déterminer C_Π, nous nous intéresserons à un invariant plus fin associé à Π : *l'aire systolique conforme*, définie comme la borne inférieure de l'aire systolique $\mathrm{Aire}_g(\mathbb{R}^2/\Pi)/\mathrm{Sys}_g^2\,\Pi$ quand g décrit les métriques Π-invariantes conformes à la métrique plate usuelle du plan (voir § 1.2). Nous expliciterons complètement l'aire systolique conforme pour 15 des 17 classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques, et nous aurons une bonne estimation pour les deux classes restantes. Là encore, pour le tore et la bouteille de Klein, le résultat était déjà connu.

Le calcul de l'aire systolique conforme s'effectuera en décrivant une métrique optimale, i.e. qui minimise l'aire systolique. La géométrie d'une telle métrique résulte d'une compétition entre les actions des divers éléments du groupe considéré. Dans les exemples étudiés (voir la partie 2), on remarque qu'une métrique optimale est plate (resp. sphérique) quand les petites isométries - celles qui réalisent la systole - sont directes (resp. indirectes) ; la géométrie peut même être mixte (plate-sphérique) si le groupe contient les deux types (direct et indirect) de petites isométries.

Nous donnerons également une autre généralisation du résultat de Loewner concernant les groupes du triangle $T_{p,q,r}$. Rappelons que $T_{p,q,r}$ est le groupe d'isométries directes (hyperboliques ou euclidiennes) associé à un triangle d'angles $\pi/p, \pi/q, \pi/r$ (p, q et r étant trois entiers tels que $2 \leq p \leq q \leq r$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} \leq 1$). Ce groupe agit sur le plan hyperbolique (ou euclidien si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$) et le quotient est le double d'un triangle. Pour les problèmes isosystoliques, les groupes du triangle se répartissent en trois familles, dont chacune est apparentée à l'un des cas euclidiens :

THÉORÈME. — *Le groupe $T_{p,q,r}$ admet une métrique optimale pour laquelle le quotient est le double d'un triangle plat d'angles $\pi/\alpha, \pi/\beta, \pi/\gamma$ avec :*

$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, 6)$ *si* $p = 2$ *et* $q = 3$,
$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 4, 4)$ *si* $p = 2$ *et* $q \geq 4$,
$(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 3, 3)$ *si* $p \geq 3$.

L'aire systolique conforme de $T_{p,q,r}$ vaut respectivement $\sqrt{3}/12$, $1/4$ et $\sqrt{3}/6$.

Cet article est divisé en quatre parties. La partie 1 contient les définitions et les remarques générales. Nous étudierons ensuite l'aire systolique conforme des groupes cristallographiques du plan euclidien (partie 2), avec comme corollaire les inégalités isosystoliques (partie 3). Le cas des groupes du triangle (hyperboliques) sera examiné dans la partie 4.

Je remercie Christophe Champetier pour la programmation des figures 6, 8 et 9 (pavages hyperboliques).

1. Volume systolique conforme et métrique optimale.

1.1. La systole d'un groupe d'isométries.

Soit X une variété riemannienne complète et d sa distance. Considérons Γ un groupe *discret* d'isométries de X et notons L l'ensemble des éléments de Γ sans points fixes; l'ensemble L sera supposé non vide. La systole de Γ en un point x de X est alors définie par :

$$\mathrm{Sys}^x\Gamma = \inf_{\gamma \in L} d(x, \gamma.x).$$

Cette quantité est clairement invariante par Γ. D'autre part, comme l'action de Γ est propre, $\mathrm{Sys}^x\Gamma$ est localement le minimum d'un nombre fini de fonctions continues et dépend donc continûment du point x. La borne inférieure de cette fonction sera appelée *systole* de Γ :

$$\mathrm{Sys}\ \Gamma = \inf_{x \in X} \mathrm{Sys}^x\Gamma.$$

On obtient évidemment la systole classique d'une variété riemanienne en prenant pour X le revêtement universel et pour Γ son groupe d'automorphismes.

Le quotient X/Γ est naturellement muni d'une distance de longueur $\overline{d}$: par définition $\overline{d}(x, y)$ est la distance dans X entre les orbites $\Gamma.x$ et $\Gamma.y$

$(x, y \in X)$. Il sera parfois commode d'interpréter Sys Γ comme la longueur d'une famille de courbes de X/Γ (les projections des courbes de X joignant x et $\gamma.x$ pour $x \in X$ et $\gamma \in L$). En particulier, si Γ est co-compact, il existe une courbe de X/Γ dont la longueur est égale à Sys Γ (qui est donc strictement positif).

Dans le cas co-compact, nous appellerons *petite isométrie* tout élément de L qui réalise la systole; cette notion est évidemment liée à la métrique considérée.

Remarque. — Tout ce qui précède est valable pour un espace de longueur X complet et localement compact. La même remarque s'applique aux définitions de 1.2 à condition de choisir une notion de volume adaptée (voir [Ba3]).

1.2. Le volume systolique conforme.

A partir de maintenant, le groupe Γ sera supposé co-compact.

Comme nous allons considérer plusieurs métriques sur la variété initiale, nous la noterons désormais (X, g). Le quotient $(X, g)/\Gamma$ est une variété riemannienne singulière. Notons n la dimension de X, $\mathrm{Sys}(\Gamma, g)$ la systole de Γ, $\mathrm{Vol}(\Gamma, g)$ le volume de $(X, g)/\Gamma$, et posons

$$\mathrm{Vol\,Sys}(\Gamma, g) \;=\; \mathrm{Vol}(\Gamma, g)/\mathrm{Sys}^n(\Gamma, g).$$

C'est le "volume systolique" de Γ pour la métrique g. Enfin, nous appellerons *volume systolique conforme* (*aire systolique conforme* si $n = 2$) de Γ la quantité

$$\inf_{\varphi} \mathrm{Vol\,Sys}(\Gamma, \varphi^2 g)$$

où φ décrit l'espace des fonctions continues et Γ-invariantes sur X. Une métrique réalisant cette borne inférieure sera dite *minimale*, ou encore *optimale*.

Exemple (Loewner). — Pour un groupe discret co-compact de translations du plan euclidien, la métrique plate est optimale.

Deux groupes Γ_i (i = 1,2) d'isométries de (X, g_i) seront dits *conformément équivalents* s'ils sont conjugués par un difféomorphisme conforme de (X, g_1) sur (X, g_2). Cette relation conserve le volume systolique conforme.

1.3. Comment montrer qu'une métrique est optimale.

Dans ce paragraphe, nous rappelons un procédé permettant de vérifier qu'une métrique donnée g_m est optimale. La méthode sera formulée pour les groupes cristallographiques du plan euclidien, mais elle est valable dans le cadre général de 1.1.

Soit $\mathbb{E}^2$ le plan euclidien, c'est-à-dire le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique plate usuelle, et soit Γ un groupe discret co-compact d'isométries de $\mathbb{E}^2$. Pour établir son inégalité isosystolique, C. Loewner utilise l'homogénéité des tores plats (voir [Pu]) ; cette propriété d'homogénéité du quotient $\mathbb{E}^2/\Gamma$ est évidemment particulière aux groupes discrets de translations. Nous estimerons l'aire systolique conforme en employant (comme dans [Ba2]) la méthode des longueurs extrémales, telle qu'elle est décrite au paragraphe 5.5 de [Gr]. Fixons une métrique Γ-invariante g_m sur $\mathbb{R}^2$ conforme à la métrique plate, que l'on considère aussi comme métrique sur $\mathbb{R}^2/\Gamma$, et notons Λ la famille des projections des courbes joignant x et $\gamma.x$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma \in L$, de sorte que

$$\mathrm{Sys}_{g_m}\Gamma = \inf_{c\in\Lambda} \mathrm{Long}_{g_m}(c).$$

A toute mesure positive μ sur Λ, de masse finie, on associe une mesure ${}^*\mu$ sur $\mathbb{R}^2/\Gamma$ en posant, pour toute fonction φ continue sur $\mathbb{R}^2/\Gamma$:

$${}^*\mu(\varphi) = \int_\Lambda \int_c \varphi ds_c \, d\mu(c)$$

où ds_c désigne la mesure de longueur de la courbe c. Dans le cas où ${}^*\mu$ admet une densité f par rapport à la mesure d'aire dg_m, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne une minoration de l'aire systolique conforme :

$$\text{Aire Sys Conf } \Gamma \;\geq\; \mu^2(\Lambda) \,/ \int f^2 \, dg_m$$

(voir [Gr] 5.5 ou [Ba2]). On observe de plus que si toutes les courbes du support de μ sont "systoliques" et si la densité f est constante, *alors la métrique g_m est optimale* (voir 2.2 Note 1 pour un exemple).

Signalons qu'une métrique optimale éventuelle est unique dans sa classe conforme ; c'est aussi la plus symétrique puisque son groupe d'isométries doit contenir toutes les isométries de toutes les métriques qui lui sont conformes (voir [Ba3] 1.5 et 1.6).

Remarque. — La méthode s'applique encore (avec le cas d'égalité) quand la métrique g_m admet un nombre fini de singularités coniques ;

le coefficient conforme φ entre g_m et une métrique conformément plate est alors défini en dehors des singularités. En fait, de telles métriques se présentent naturellement comme métriques optimales (voir 2.5 ou 2.6).

Pour conclure ces généralités, voici un résultat facile qui sera souvent utilisé.

LEMME 1. — *Soit Γ_1 un sous-groupe d'indice fini de Γ et soit g_m une métrique Γ-invariante optimale pour Γ_1 et vérifiant* $\mathrm{Sys}(\Gamma_1, g_m) = \mathrm{Sys}(\Gamma, g_m)$. *Alors g_m est optimale pour Γ.*

Preuve. — Le lemme résulte de l'inégalité suivante, vérifiée par toute métrique g conforme à g_m et Γ-invariante :

$$\frac{\mathrm{Aire}(\Gamma, g)}{\mathrm{Sys}^2(\Gamma, g)} \geq \frac{\mathrm{Aire}(\Gamma, g_m)}{\mathrm{Sys}^2(\Gamma, g_m)} \frac{\mathrm{Sys}^2(\Gamma, g_m)}{\mathrm{Sys}^2(\Gamma_1, g_m)}.$$

2. Les groupes cristallographiques du plan euclidien.

2.1. Rappels et notations.

Il est bien connu que les groupes discrets co-compacts de $\mathbb{E}^2$ (groupes cristallographiques) sont au nombre de 17, à isomorphisme près (voir par exemple [Be] Tome 1). Pour les énumérer, nous adopterons les notations de [Mo] App. A, qui désignent aussi les quotients ("orbifolds") $\mathbb{E}^2/\Gamma$. Ceux-ci sont homéomorphes à l'une des surfaces suivantes : le tore T, la bouteille de Klein K, l'anneau A, le ruban de Möbius M, la sphère S, le disque D, le plan projectif P. Quant aux points singuliers éventuels, ils sont de deux types : conique d'ordre m (noté m) ou miroir d'ordre m (noté $\overline{m}$) pour $m = 2, 3, 4$ ou 6.

Voici la liste des 17 groupes cristallographiques de $\mathbb{E}^2$. Sur la première ligne figurent les 5 groupes directs, i.e. formés d'isométries directes; les 12 groupes restants sont rangés en colonne, sous leur sous-groupe direct d'indice 2.

Rappelons que d'après le deuxième théorème de Bieberbach (voir [Ch]), deux groupes cristallographiques Γ_1 et Γ_2 isomorphes (abstraitement) sont conjugués par une transformation affine du plan. Cependant, Γ_1 et Γ_2 ne sont conformément équivalents que si cette transformation est une similitude. Nous complèterons donc au besoin les notations précédentes

Table (a) : *Les groupes cristallographiques du plan*

T	$S_{2,2,2,2}$	$S_{3,3,3}$	$S_{2,4,4}$	$S_{2,3,6}$
K A M	$D_{\overline{2},\overline{2},\overline{2},\overline{2}}$ $D_{2,2}$ $P_{2,2}$ $D_{2,\overline{2},\overline{2}}$	$D_{\overline{3},\overline{3},\overline{3}}$ $D_{3,\overline{3}}$	$D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$ $D_{4,\overline{2}}$	$D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}}$

avec un paramètre conforme. Par exemple, les groupes isomorphes à $\mathbb{Z}^2$ (réseaux) seront notés $T^{(a,b)}$, où (a,b) appartient au domaine habituel

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 1/2, \ 0 \leq y \ et \ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Tout groupe cristallographique Γ contient un réseau d'indice fini. On peut supposer que ce réseau est de la forme $T^{(a,b)}$, et en tant que sous-groupe normal de Γ, il possède en général des symétries additionnelles. Ceci permet d'obtenir facilement la description des types conformes dans chaque classe d'isomorphisme.

Une isométrie directe de $\mathbb{E}^2$ est une translation ou une rotation. On notera

$$r[\Omega; \alpha]$$

la rotation d'angle α centrée au point Ω de $\mathbb{R}^2$. D'autre part, toute isométrie indirecte γ se décompose de manière unique comme produit d'une symétrie orthogonale (ou réflexion) par rapport à une droite D et d'une translation de vecteur v parallèle à D; on pose alors :

$$\gamma = s.t[ax + by + c = 0 \ ; v]$$

où $ax+by+c = 0$ est une équation de la droite D. Les symétries-translations ($v \neq 0$) interviennent dans le calcul de la systole puisqu'elles n'ont pas de points fixes.

Pour expliciter les éléments des groupes Γ étudiés ci-dessous, il suffira de donner le sous-groupe des translations, que l'on notera toujours Γ_0, et d'écrire un système (fini) de représentants modulo ce sous-groupe. Une symétrie-translation de Γ dont le vecteur est de norme minimale (non nulle) sera appelée *symétrie-translation minimale* de Γ.

Dans la suite de cette partie, le terme "groupe" signifiera "groupe cristallographique de $\mathbb{E}^2$ ". Les différents cas seront rassemblés par "affinité", suivant la nature de la métrique optimale.

2.2. Le cas des groupes directs.

Comme les rotations ont un point fixe, la systole d'un groupe direct Γ est toujours égale à celle de son sous-groupe de tranlations Γ_0. D'après le lemme 1, la métrique plate est optimale pour Γ, puiqu'elle l'est pour Γ_0 (Loewner). On trouve donc les résultats suivants, où $(a, b) \in \mathcal{D}$:

Γ	$T^{(a,b)}$	$S^{(a,b)}_{2,2,2,2}$	$S_{3,3,3}$	$S_{2,4,4}$	$S_{2,3,6}$
Aire Sys Conf Γ	b	$b/2$	$\sqrt{3}/6$	$1/4$	$\sqrt{3}/12$

Notes. 1) Pour voir que la métrique plate est optimale pour $T^{(a,b)}$, il suffit de prendre (avec les notations de 1.3) $\mu = dy$ mesure sur la famille des courbes horizontales de longueur 1.

2) $S^{(a,b)}_{2,2,2,2}$ est engendré par $T^{(a,b)}$ et par la symétrie par rapport à l'origine. $S_{p,q,r}$ (pour $(p, q, r) = (3, 3, 3), (2, 4, 4)$ ou $(2, 3, 6)$) est engendré par les rotations d'angles $2\pi/p, 2\pi/q, 2\pi/r$ autour des sommets d'un triangle d'angles $\pi/p, \pi/q, \pi/r$; les sous-groupes de translations sont respectivement d'indice 3, 4 et 6.

2.3. Les groupes A et $D_{\overline{2},\overline{2},\overline{2},\overline{2}}$ (anneau et rectangle).

Dans ces exemples, on va pouvoir négliger les isométries indirectes, car leurs parties de translation appartiennent au groupe ; la métrique plate sera donc optimale.

Groupes isomorphes à A.

Les groupes dont le quotient est un anneau sont décrits par un paramètre conforme h, réel strictement positif. Soit A^h le groupe engendré par le réseau $T^{(0,h)} \simeq \mathbb{Z} \oplus ih\mathbb{Z}$ ($i^2 = -1$) et par la symétrie σ d'axe horizontal $y = 0$. Les isométries indirectes de A^h s'écrivent σt où $t \in T^{(0,h)}$; il s'agit des symétries-translations de la forme $s.t[y = mh/2\,; n]$ avec m et n dans $\mathbb{Z}$ (symétrie si $n = 0$).

Il se trouve que les vecteurs des symétries-translations de A^h correspondent à des translations de $T^{(0,h)}$; si g_0 désigne la métrique plate usuelle, on a donc

$$\mathrm{Sys}(A^h, g_0) = \mathrm{Sys}(T^{(0,h)}, g_0),$$

d'où il résulte que g_0 est optimale pour A^h (lemme 1). On obtient finalement :

$$\text{Aire Sys Conf } A^h = \text{Max}\{h/2, 1/2h\} \quad (h > 0).$$

Groupes isomorphes à $D_{\overline{2},\overline{2},\overline{2},\overline{2}}$.

Le cas des groupes du rectangle est analogue. Ils sont conformément équivalents à l'un des groupes $D^h_{\overline{2},\overline{2},\overline{2},\overline{2}}$ engendré par $T^{(0,h)}$ avec $h \geq 1$ et par les symétries σ et τ d'axes respectifs $y = 0$ et $x = 0$. Le groupe $D^h_{\overline{2},\overline{2},\overline{2},\overline{2}}$ contient A^h $(h \geq 1)$; il comprend aussi les éléments $\sigma\tau$ et τt $(t \in T^{(0,h)})$, qui sont les rotations d'angle π centrées aux points de $(\mathbb{Z} \oplus ih\mathbb{Z})/2$ et les symétries-translations $s.t[x = m/2 \ ; nhi]$ (m et $n \in \mathbb{Z}$). Là encore, la métrique plate est optimale pour $D^h_{\overline{2},\overline{2},\overline{2},\overline{2}}$, de sorte que :

$$\text{Aire Sys Conf } D^h_{\overline{2},\overline{2},\overline{2},\overline{2}} = h/4 \ \ (h \geq 1).$$

2.4. Les groupes $K, M, D_{2,2}$.

Nous abordons maintenant l'étude des groupes pour lesquels la métrique plate n'est pas toujours optimale.

Groupes isomorphes à K.

Ce cas étant traité entièrement dans [Ba2], nous nous contenterons de décrire les résultats.

Soit K^β le groupe engendré par la translation de vecteurs $2i\beta$ et par la symétrie-translation $s.t[y = 0; \pi]$ (β est un réel > 0). Son sous-groupe de translations K^β_0 est le réseau rectangulaire $2\pi\mathbb{Z} \oplus 2i\beta\mathbb{Z}$. Les autres éléments de K^β sont les symétries-translations $s.t[y = m\beta; (2n+1)\pi]$ $(m, n \in \mathbb{Z})$; on observe que leurs vecteurs de translation n'appartiennent pas au réseau K^β_0. De ce fait, les axes des symétries-translations jouent un rôle spécial.

Chaque groupe K^β admet une métrique optimale g^β. En fait, il est plus commode de décrire une métrique h^B isométrique à g^β, K^B-invariante pour un certain B dépendant de β. Plus précisément, h^B est de la forme

$$\varphi^2(y)\, dx^2 + dy^2$$

où φ est une fonction convenable, continue, strictement positive, paire et B-périodique. Un calcul élémentaire montre que, pour $\beta = \int_0^B dt/\varphi(t)$,

les groupes (K^β, g_0) et (K^B, h^B) sont conformément équivalents par le difféomorphisme F donné par $F(x,y) = (x, \int_0^y dt/\varphi(t))$. On posera donc $g^\beta = (F^{-1})^* h^B$. Voici les fonctions φ qui définissent h^B (voir [Ba2]) ; elles possèdent toutes la symétrie supplémentaire $\varphi(B/2+y) = \varphi(B/2-y)$ $(y \in \mathbb{R})$, et le réel B est déterminé par la relation $\beta = \int_0^B dt/\varphi(t)$ que l'on peut expliciter dans chaque cas :

(1) $0 < \beta \leq \pi/2$ $[B = \beta]$: $\varphi \equiv 1$,

(2) $\pi/2 \leq \beta \leq 2\ ln(1+\sqrt{2})$ $[B = \pi/2]$: $\varphi(y) = \mathrm{Max}\{\cos y, \cos\lambda\}$ $(0 \leq y \leq \pi/4)$, où λ vérifie la relation

$$2 \ln \mathrm{tg}\Big(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4}\Big) + \cos\lambda\Big(\frac{\pi}{2} - 2\lambda\Big) = \beta, \quad (*)$$

(3) $2\ln(1+\sqrt{2}) \leq \beta \leq 2\ ln(2+\sqrt{3})$ $[\pi/4 \leq B \leq \pi/3]$: $\varphi(y) = \cos y$ $(0 \leq y \leq B/2)$,

(4) $2\ln(2+\sqrt{3}) \leq \beta$ $[\pi/3 \leq B]$: $\varphi(y) = \mathrm{Max}\{\cos y, 1/2\}$ $(0 \leq y \leq B/2)$.

L'évolution de la métrique optimale g^β en fonction de β peut se décrire comme suit. Au début $(0 < \beta \leq \pi/2)$, g^β est plate. Puis pour $\beta = \pi/2$, des bandes sphériques (i.e. à courbure 1) apparaissent et se développent autour des axes des symétries-translations ; la largeur de ces bandes augmente avec β, si bien que g^β devient complètement sphérique (singulière !) à la fin de la phase (2). Ensuite g^β reste sphérique, formée de bandes juxtaposées ; cependant, la longueur du bord de ces bandes diminue relativement à la longueur de leurs âmes, jusqu'au rapport critique de $1/2$. On arrive alors à la phase (4), où les bords des bandes sphériques s'épaississent en bandes plates dont la largeur augmente indéfiniment ...

La systole de (K^β, g^β) est égale à 2β dans le cas (1) et à π dans les autres cas. Quant à l'aire systolique conforme de K^β, elle est donnée par :

(1) $\pi/2\beta$,

(2) $\dfrac{4}{\pi}\Big(\sin\lambda + \Big(\dfrac{\pi}{4} - \lambda\Big)\cos\lambda\Big)$ où λ vérifie $(*)$,

(3) $\dfrac{4}{\pi}\ \mathrm{th}\ \dfrac{\beta}{2}$

(4) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi} + \dfrac{1}{2\pi}(\beta - 2\ln(2+\sqrt{3}))$.

Groupes isomorphes à M.

Soit $M^\beta(\beta > 0)$ le groupe engendré par les translations $t^\beta_\pm$ de vecteurs $\pi \pm i\beta$ et par la symétrie s^β d'axe horizontal $y = \beta/2$. Le quotient $\mathbb{E}^2/M^\beta$ est un ruban de Möbius de longueur π et de largeur β. Le groupe M^β contient K^β comme sous-groupe d'indice 2 et la métrique g^β est invariante par M^β.

Affirmation. — $\mathrm{Sys}(M^\beta, g^\beta) = \mathrm{Sys}(K^\beta, g^\beta)$.

Preuve. — On travaille avec la métrique h^B définie plus haut (isométrique à g^β et K^B-invariante).

Les éléments de $M^B - K^B$ $(= t^B_+ K^B)$ sont les translations de vecteurs $(2m + 1)\pi + (2n + 1)iB$ et les symétries-translations $s.t[y = (m + 1/2)B; 2n\pi]$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. L'affirmation est clairement vérifiée quand la métrique optimale est plate (cas (1)). Dans les autres cas (2), (3) et (4), on observe que la distance pour h^B entre deux points (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$ est minorée par $| y - y' |$ et par $| x - x' | /2$. Les isométries sans points fixes $M^B - K^B$, sauf peut-être les translations $\pm t^B_\pm$, déplacent donc les points d'une distance au moins égale à π.

Il reste à étudier la distance $d(p, t^B_+.p)$ pour $p \in \mathbb{R}^2$. Vu les symétries de la métrique h^B, on peut supposer que $p = (0, y)$ où $0 \leq y \leq B/2$. Toute courbe continue c de p à $t^B_+.p$ doit couper l'axe $y = B/2$. On construit alors, grâce à la symétrie s^B, une courbe de même longueur que c entre p et $s^B t^B_+.p$ (voir Fig. 1) ; comme ce point est aussi l'image de p par l'élément $s.t[y = 0, \pi]$ de K^B, on a : $\log c \geq \mathrm{Sys} K^B = \pi$. Ce qui achève la preuve de l'affirmation.

D'après le lemme 1, g^β est optimale pour M^β, d'où :

$$\text{Aire Sys Conf } M^\beta = \frac{1}{2} \text{ Aire Sys Conf } K^\beta \quad (\beta > 0).$$

Groupes isomorphes à $D_{2,2}$.

Notons $D^\beta_{2,2}$ $(\beta > 0)$ le groupe engendré par la translation de vecteur $2\,i\,\beta$, la rotation d'angle π centrée en $(\pi/2,\ 0)$ et par la symétrie τ d'axe vertical $x = 0$. Le quotient $\mathbb{E}^2/D^\beta_{2,2}$ est un disque avec deux points singuliers situés à distance $\pi/2$ du bord (qui est de longueur 2β).

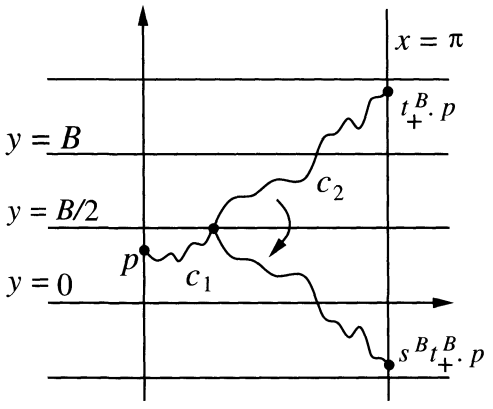

Figure 1

Le groupe $D^\beta_{2,2}$ contient K^β (avec indice 2) et admet $K^\beta_0 \simeq 2\pi\mathbb{Z} \bigoplus 2i\beta\mathbb{Z}$ comme sous-groupe de translations. Les éléments de $D^\beta_{2,2} - K^\beta$ sont les rotations $r[\pi; (m\pi + \pi/2, n\beta)]$ et les symétries-translations $s.t[x = m\pi; 2\ n\ i\ \beta]$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. La métrique g^β est clairement optimale pour $D^\beta_{2,2}$, et on conclut que

$$\text{Aire Sys Conf } D^\beta_{2,2} = \frac{1}{2} \text{ Aire Sys Conf } K^\beta \quad (\beta > 0).$$

2.5. Les groupes $D_{\overline{3},\overline{3},\overline{3}}$, $D_{3,\overline{3}}$, $D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$, $D_{4,\overline{2}}$ et $D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}}$.

Le point commun de ces cinq groupes est d'admettre une métrique optimale *sphérique* (i.e. à courbure 1) avec des singularités coniques. On vérifie facilement que chacune de ces métriques optimales est conforme à la métrique plate en dehors de ses singularités (voir la partie 4).

Voici maintenant un résultat qui sera utile pour montrer la minimalité de la métrique choisie dans chacun des cinq cas étudiés. Considérons le disque sphérique B_Θ de rayon $\pi/2$ dont le centre est singulier d'angle Θ, $\Theta \geq 2\pi$. La métrique de B_Θ s'exprime naturellement en coordonnées polaires r, θ par

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2 \qquad 0 < r \leq \pi/2,\ \theta \in \mathbb{R}/\Theta\mathbb{Z}.$$

Notons g_θ^α la géodésique de longueur π qui joint les points de coordonnées polaires $(\pi/2, \theta)$ et $(\pi/2, \theta+\pi)$ et faisant un angle α avec le bord (supposé orienté) au point $(\pi/2, \theta)$.

LEMME 2. — *Soit* $\mu = \pi^{-1} \sin\alpha \, d\alpha \, d\theta$, *mesure sur la famille* $\{g_\theta^\alpha\}$ *où* $\theta \in \mathbb{R}/\Theta\mathbb{Z}$ *et* $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. *Alors (avec les notations de 1.3)* ${}^*\mu$ *est la mesure d'aire de* B_Θ.

Preuve. — Une géodésique g_θ^α coupe un rayon donné $\theta = \theta_0$ si et seulement si $\theta \in [\theta_0 - \pi, \theta_0]$: on peut donc supposer que $\Theta = 2\pi$. La conclusion résulte alors de la formule de Santaló ([Sa], [Cr]) appliquée à la demi-sphère $B_{2\pi}$.

Explicitons la formule de Santaló pour $B_{2\pi}$ (qui est d'ailleurs facile à vérifier dans ce cas à l'aide d'un calcul élémentaire). Soit U le fibré unitaire tangent à $B_{2\pi}$, muni de la mesure de Liouville dv, et ζ^t le flot géodésique. Au-dessus du bord, les éléments de U sont paramétrés par $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et par l'angle β avec la normale au bord rentrante. On pose

$$U^+\partial = \{u = (\theta, \beta) \in U_{|\partial B_{2\pi}} \ / \ |\beta| \leq \pi/2\}$$

(vecteurs rentrants) ; cet ensemble est muni de la mesure $du = d\theta \, d\beta$. Cela étant, on a la formule de Santaló :

$$\int_U F(v) \, dv = \int_{U^+\partial} \int_0^\pi F(\zeta^t.u) \cos\beta \, dt \, du$$

valable pour toute fonction intégrable $F : U \to \mathbb{R}$.

Groupes $D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$ *et* $D_{4,\overline{2}}$.

Le groupe $D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$ est engendré par les réflexions par rapport aux côtés du triangle de sommets 0, 1 et $1+i$; son sous-groupe de translations est $2\mathbb{Z} \bigoplus 2i\mathbb{Z}$. Voici la liste des symétries-translations de $D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$: $s.t[y = m; 2n]$ $(m, n \in \mathbb{Z})$, $s.t[y = x - m; n(1+i)]$ $(m, n \in \mathbb{Z}, \ m+n$ pair) et leurs conjugués par la rotation $r[0; \pi/4]$. Remarquons que les axes des symétries-translations minimales (de vecteurs $1 \pm i$) sont les droites d'équations $x \pm y = m$, m impair (voir Fig. 2).

Considérons la métrique invariante par $D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$ obtenue en identifiant le triangle fondamental à un triangle sphérique $\mathcal{T}_1$ d'angles $\pi/2, \pi/2, \pi/2$. Ainsi la bande diagonale $\mathcal{B}_\epsilon$ $(\epsilon = \pm)$ bordée par les droites $x - \epsilon y = 0$ et $x - \epsilon y = 2$ est constituée de demi-sphères recollées le long de segments géodésiques de

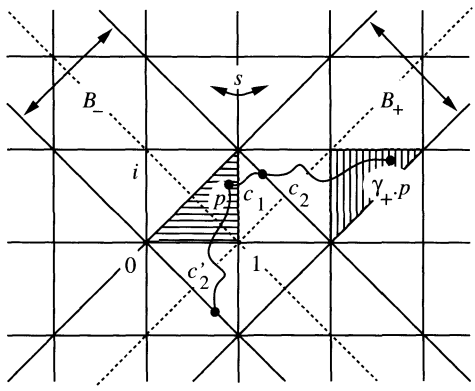

Figure 2

longueur $\pi/2$. L'isométrie $\gamma_\epsilon = s.t[x - \epsilon y = 1\ ;\ 1 + \epsilon i]$ opère dans $\mathcal{B}_\epsilon$ en envoyant chaque demi-sphère sur une demi-sphère voisine.

Vérifions que la systole du groupe pour cette métrique sphérique est égale à π. Toutes les estimations de distance seront basées sur le fait suivant : la distance dans une demi-sphère entre deux points diamétralement opposés vaut π ; on se ramènera à cette situation en utilisant les symétries de la métrique. On voit ainsi que les deux droites $y = m$ et $y = m+1$ (resp. $x = m$ et $x = m+1$) sont distantes de $\pi/2$. Donc, les translations de $D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$, ainsi que les "grandes" symétries-translations déplacent les points d'une distance au moins égale à π.

Il reste à étudier l'effet des isométries $\gamma_\epsilon^{\pm 1}$ sur le triangle fondamental $\mathcal{T}$; examinons par exemple le cas de γ_+. Soit p un point de $\mathcal{T}$ et c une courbe joignant p et $\gamma_+.p$; en utilisant les symétries par rapport aux bords de $\mathcal{B}_+$, on peut supposer que c est incluse dans $\mathcal{B}_+$. On construit alors (voir Fig. 2) une courbe de même longueur que c, incluse dans la demi-sphère $\mathcal{B}_+ \cap \mathcal{B}_-$, et qui joint deux points diamétralement opposés ; d'où long $c \geq \pi$.

Les points diamétralement opposés sur le bord de la demi-sphère $\mathcal{B}_+ \cap \mathcal{B}_-$ se correspondent soit par γ_+, soit par γ_-. En appliquant le lemme 2 et le critère 1.3 on conclut que

$$\text{Aire Sys Conf } D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}} = 1/2\pi.$$

Quant au groupe $D_{4,\overline{2}}$, il apparaît naturellement comme sous-groupe d'indice 2 dans $D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$: c'est le sous-groupe engendré par la symétrie s d'axe

$x = 1$ et par la rotation $r = r[0, \pi/4]$. Vu que $sr = \gamma_+$ et $rs = \gamma_-$, on a clairement

$$\text{Aire Sys Conf } D_{4,\overline{2}} = 1/\pi.$$

Groupes $D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}}$ et $D_{3,\overline{3}}$.

On note $D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}}$ le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés du triangle de sommets $0, 1, 1 + i\sqrt{3}$ (remarquer que $(D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}})_0 = 2\mathbb{Z} \bigoplus (1 + i\sqrt{3})\mathbb{Z}$). Les symétries-translations sont les isométries $s.t[y = m\sqrt{3}/2; x]$, $s.t[y = (x - m)/\sqrt{3}\,;\ m(3/2 + i\sqrt{3}/2)]$ $(m, n \in \mathbb{Z},\ m + n$ pair) ainsi que leurs conjuguées par les rotations $r[0; \pi/3]$ et $r[0; 2\pi/3]$.

Le pavage associé à $D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}}$ comprend 3 types de sommets ("types 2, 3 et 6"). On constate que les axes des symétries-translations minimales, dont les vecteurs sont de norme 1, sont les droites joignant 2 sommets voisins de type 2 (voir Fig. 3).

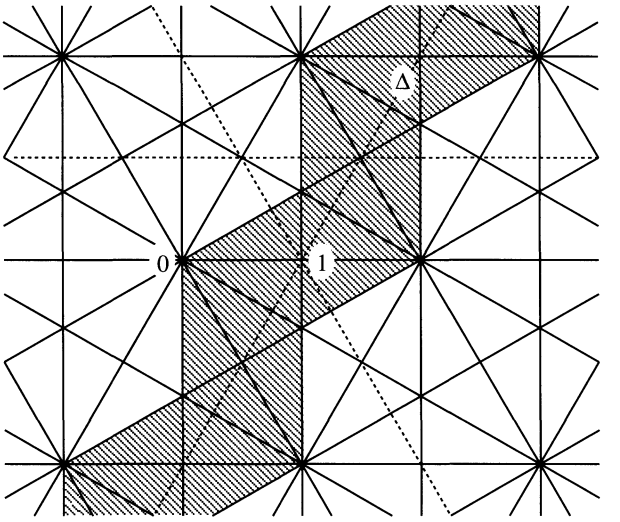

Figure 3

La métrique optimale est obtenue (comme pour $D_{\overline{2},\overline{4},\overline{4}}$) en identifiant le triangle fondamental avec le triangle sphérique $\mathcal{T}_1$ d'angles $\pi/2, \pi/2, \pi/2$. Soit Δ l'axe d'une symétrie-translation minimale; la réunion des triangles

qui coupent Δ est isométrique à la bande B_+ (formée de demi-sphères juxtaposées). En raisonnant comme pour le cas précédent, on vérifie que

$$\text{Aire Sys Conf } D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}} = 1/2\pi.$$

Le groupe $D_{3,\overline{3}}$ est le sous-groupe d'indice 2 de $D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}}$ engendré par la symétrie d'axe $y = 0$ et la rotation $r[1 + i/\sqrt{3}; \pi/3]$, et l'on a

$$\text{Aire Sys Conf } D_{3,\overline{3}} = 1/\pi.$$

Groupes $D_{\overline{3},\overline{3},\overline{3}}$.

Soit $D_{\overline{3},\overline{3},\overline{3}}$ le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés du triangle équilatéral de sommets 0, $1 \pm i/\sqrt{3}$ ($(D_{\overline{3},\overline{3},\overline{3}})_0 = (D_{\overline{2},\overline{3},\overline{6}})_0$). Les symétries-translations du groupe sont les isométries $s.t[y = (x - m)/\sqrt{3}; n(3/2+i\sqrt{3}/2)]$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $m+n$ pair) ainsi que leurs conjugués par les rotations $r[0; 2\pi/3]$ et $r[0\ ;\ 4\pi/3]$. Les plus petits vecteurs translations ont pour norme $\sqrt{3}$, et les axes correspondants passent par les milieux des côtés d'un même triangle du pavage (voir Fig. 4).

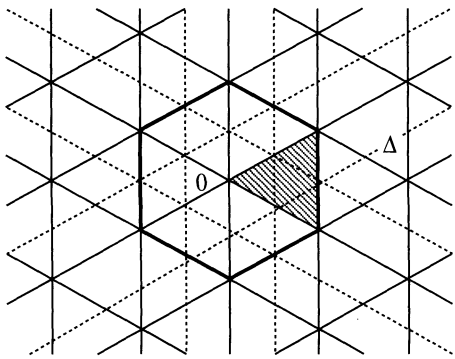

Figure 4

Là encore, la métrique optimale est obtenue quand le triangle fondamental est sphérique, isométrique à $\mathcal{T}_1$. Soit Δ l'axe d'une symétrie-translation minimale ; la réunion des triangles coupant Δ a l'allure suivante (Fig. 5) :

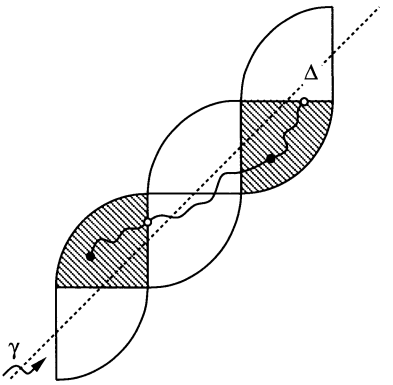

Figure 5

où les triangles sont isométriques à $\mathcal{T}_1$. Notons une propriété remarquable de ce triangle : les milieux des côtés sont distants de $\pi/3$. De façon analogue aux cas précédents, on montre que la systole de $D_{\overline{3},\overline{3},\overline{3}}$ pour cette métrique sphérique est égale à π.

Enfin, pour prouver la minimalité, on applique le lemme 2 au disque sphérique centré à l'origine, d'angle au centre 3π ; on observe que les points du bord distants de π sont identifiés par l'une des symétries-translations minimales dont l'axe coupe ce disque (voir Fig. 4). D'où :

$$\text{Aire Sys Conf } D_{\overline{3},\overline{3},\overline{3}} \;=\; 1/2\pi.$$

2.6. Les groupes $P_{2,2}$ et $D_{2,\overline{2},\overline{2}}$.

Dans ces deux derniers cas, nous n'avons qu'une description partielle de l'aire systolique conforme. Cependant, nous établissons une estimation qui donne une inégalité isosystolique "globale" (i.e. valable pour toutes les métriques invariantes : voir 3).

Groupes isomorphes à $P_{2,2}$.

Ils dépendent d'un paramètre conforme $\beta \geq \pi$. Notons $P^{\beta}_{2,2}$ le groupe engendré par les symétries-translations $s.t[y = 0; \pi]$ et $s.t[x = 0; \beta]$. On remarque que $P^{\beta}_{2,2}$ contient K^{β} (avec indice 2) et que $(P^{\beta}_{2,2})_0 = K^{\beta}_0$. L'aire systolique conforme de $P^{\beta}_{2,2}$ est minimale pour $\beta = \pi$:

PROPOSITION. — *Pour tout $\beta \geq \pi$, on a*

$$\text{Aire Sys Conf } P^{\beta}_{2,2} \geq \frac{2}{\pi},$$

avec égalité si $\beta = \pi$.

Preuve. — On considère des métriques invariantes par $P^{\beta}_{2,2}$ pour $\beta \in [\pi, \infty[$, dont le rectangle fondamental est une demi-sphère avec 4 points distingués sur le bord. Plus précisément, soit $\mathcal{R}$ un rectangle de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ et Λ les sommets du pavage de $\mathbb{R}^2$ associé ; il existe alors un réel a $(0 < a < 1)$ et une fonction elliptique $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui est un revêtement ramifié aux points de Λ, au-dessus des 4 points $-1/a, -a,\ a,\ 1/a$ de l'axe réel ([Di] p.345). La métrique sphérique $\Phi^*(4|dz|^2/(1+|z|^2)^2)$ est conforme à la métrique plate (en dehors de Λ) puisque Φ est holomorphe. L'image de $\mathcal{R}$ est le demi-plan supérieur $\text{Im } z > 0$; quand la distance sphérique entre a et $-a$ varie de 0 à $\pi/4$ (i.e. : $a \in]0, \text{tg}\pi/8]$), le rapport β/π des longueurs euclidiennes des côtés de $\mathcal{R}$ (qui s'expriment avec des intégrales elliptiques) décrit l'intervalle $[1, \infty[$.

Appliquons maintenant le lemme 2 au rectangle (sphérique) $\mathcal{R}$: d'après 1.3, on trouve que l'aire systolique conforme de $P^{\beta}_{2,2}$ est minorée par $2/\pi$ indépendamment de β $(\pi \leq \beta < \infty)$. De plus, l'estimation est optimale pour $\beta = \pi$ car la systole vaut π dans ce cas.

Pour les grandes valeurs de β, on voit que la métrique optimale de K^{β} (voir 2.4) est optimale pour $P^{\beta}_{2,2}$; ainsi :

$$\text{Aire Sys Conf } P^{\beta}_{2,2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{1}{4\pi}\left(\beta - 2\ln(2+\sqrt{3})\right) \qquad \beta \geq \beta_0$$

où $\beta_0 = 2\ln(2+\sqrt{3}) + 2\pi/3$.

Groupes isomorphes à $D_{2,\bar{2},\bar{2}}$.

On appelle $D^{\beta}_{2,\bar{2},\bar{2}}$ le groupe engendré par $P^{\beta}_{2,2}$ et par la rotation $z \to -z$; noter que $(D^{\beta}_{2,\bar{2},\bar{2}})_0 = (\pi + i\beta)\mathbb{Z} \bigoplus (\pi - i\beta)\mathbb{Z}$. Les éléments indirects du groupe sont de la forme $s.t[y = m\beta/2; n\pi]$ et $s.t[x = m\pi/2; ni\beta]$, où m et n sont entiers avec $m+n$ impair.

D'après la proposition précédente (étude de $P^{\beta}_{2,2}$) on a :

$$\text{Aire Sys Conf } D^{\beta}_{2,\bar{2},\bar{2}} \geq \frac{1}{\pi} \qquad (\beta \geq \pi).$$

De plus, l'égalité a lieu pour $\beta = \pi$ car la métrique "sphérique carrée" est optimale. On vérifie aussi (grâce au lemme 1) que

$$\text{Aire Sys Conf } D^{\beta}_{2,\overline{2},\overline{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{8\pi}(\beta - 2\ln(2+\sqrt{3})) \quad \beta \geq \beta_0.$$

3. Inégalités isosystoliques pour les "orbifolds" plates en dimension 2.

3.1. Les métriques à singularités coniques .

Les résultats de la partie 2 entraînent des inégalités isosystoliques optimales pour les 17 "orbifolds" plates en dimension 2. Nous travaillerons avec des métriques à singularités coniques, ce qui est naturel car les métriques singulières de 2.5 et 2.6 sont précisément de ce type.

Soit Π un groupe de difféomorphismes opérant proprement et discontinûment sur une surface C^∞ simplement connexe X (le plan ou la sphère) avec quotient compact ; par exemple si Π est sans points fixes, X/Π est une surface. On parlera indifféremment de métrique Π-invariante ou de métrique sur le quotient X/Π. Soit g une métrique riemannienne continue, Π-invariante, définie sur X en dehors d'un ensemble localement fini Σ ("singularités") ; on dira que g est une *métrique à singularités coniques* si pour tout point x de Σ, il existe une coordonnée locale z centrée en x, de classe C^1, dans laquelle g est donnée par

$$e^{2u(z)}\,|z|^{2\beta}\,|dz|^2$$

où u est une fonction continue et où β est un réel > -1 ("l'angle" de la singularité vaut $2\pi(1+\beta)$). Par exemple, les métriques de 2.5 et 2.6 sont de ce type, avec des singularités d'angle $> 2\pi$. Il faut noter que dans cette définition, les singularités de la métrique g n'ont rien à voir a priori avec les points fixes éventuels du groupe Π.

Soit g est une métrique à singularités coniques sur X/Π ; il lui correspond, comme dans le cas riemannien, une distance sur X notée $\tilde{d}$. On peut vérifier qu'il existe une suite (g_n) de métriques riemanniennes C^∞ et Π-invariantes sur X telle que la suite des distances associées $(\tilde{d}_n)$ converge vers $\tilde{d}$ uniformément sur les compacts de X (et $\tilde{d}_n/\tilde{d}$ converge vers 1 localement uniformément sur $X - \Sigma$). On remarque alors que $\text{Sys}^x_{g_n}$

converge uniformément vers Sys_g^x $(x \in X)$, et que l'aire systolique des métriques g_n converge vers celle de g.

3.2. Inégalités isosystoliques pour les quotients $\mathbb{R}^2/\Pi$.

Fixons un groupe Π dans chacune des 17 classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques du plan euclidien. Ces 17 groupes seront notés comme dans la table (a) de 2.1.

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathbb{R}^2/\Pi$ l'une des 17 "orbifolds" plates de dimension 2. Pour toute métrique continue g à singularités coniques sur $\mathbb{R}^2/\Pi$, on a l'inégalité optimale*

$$\mathrm{Aire}\, g/\mathrm{Sys}^2 g \;\geq\; C_\Pi\,,$$

où C_Π est donnée par la table (b) ci-dessous.

Table (b) : *Les 17 constantes isosystoliques*

Π	K	T	$P_{2,2}$	A	M	$D_{2,2}$	$S_{2,2,2,2}$	$D_{2,\bar{2},\bar{2}}$	$D_{3,\bar{3}}$
C_Π	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$

Π	$D_{4,\bar{2}}$	$S_{3,3,3}$	$S_{2,4,4}$	$D_{\bar{2},\bar{2},\bar{2},\bar{2}}$	$D_{\bar{3},\bar{3},\bar{3}}$	$D_{\bar{2},\bar{4},\bar{4}}$	$D_{\bar{2},\bar{3},\bar{6}}$	$S_{2,3,6}$	
C_Π	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$	

Preuve. — Il suffit d'établir les inégalités pour des métriques C^∞. Soit g une métrique C^∞ et Π-invariante sur $\mathbb{R}^2$. En chaque point z de $\mathbb{R}^2$, g est proportionnelle à une métrique de la forme $|dz + \mu(z)d\bar{z}|^2$, où μ est fonction des coefficients (g_{ij}) de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$(2) \qquad \mu \;=\; \{g_{11} - g_{22} + 2ig_{12}\}\,\{g_{11} + g_{22} + 2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{1/2}\}^{-1/2}.$$

Comme g est Π-invariante, on a $\sup\{|\mu(z)|;\, z \in \mathbb{R}^2\} < 1$; il existe donc un difféomorphisme w solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation de Beltrami $w_{\bar{z}} = \mu w_z$ (voir par exemple [Le] théorème 4.4). Remarquons que $(w^{-1})^* g = \lambda^2 g_0$ où g_0 est la métrique plate usuelle et où λ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Le groupe Π est alors conjugué à un groupe Γ de difféomorphismes conformes

pour g_0, i.e. un groupe de similitudes du plan euclidien $\mathbb{E}^2$. Mais comme les orbites de Γ sont discrètes, il s'agit en fait d'un groupe d'isométries de $\mathbb{E}^2$ (en particulier, la fonction λ est Γ-invariante).

En résumé, nous avons montré que (Π, g) est conformément équivalent à un groupe cristallographique de $\mathbb{E}^2$. Les inégalités cherchées résultent donc de la partie 2; dans chacun des 17 cas, il existe une métrique qui réalise l'égalité : plate pour M, $D_{\overline{2},\overline{2},\overline{2}}$ et pour les groupes directs, sphérique dans les autres cas (voir 2 pour les détails).

3.3. Unicité des métriques optimales.

Considérons une classe d'isomorphisme de groupes cristallographiques, représentée par un groupe Π. D'après la partie 2, une telle classe contient un groupe Γ_m d'aire systolique conforme minimale (qui est unique sauf peut-être dans les deux cas de 2.6). Notons g_m^{Π} la métrique optimale pour Γ_m (voir 2).

PROPOSITION. — *On suppose que Π est distinct de $P_{2,2}$ et $D_{2,\overline{2},\overline{2}}$. Alors toute métrique localement Hölder-continue à singularités coniques sur $\mathbb{R}^2/\Pi$ et qui réalise l'égalité dans le théorème 1 est isométrique à g_m^{Π} (à un facteur près).*

Preuve. — Soit g une telle métrique , considérée comme Π-invariante sur $\mathbb{R}^2$. Notons Σ l'ensemble de ses singularités et μ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \Sigma$ par la formule (2). Comme les coordonnées décrivant localement les singularités sont C^1, on a encore $\sup\{|\mu(z)|; z \in \mathbb{R}^2 - \Sigma\} < 1$. D'où l'existence d'un homéomorphisme w de $\mathbb{R}^2$ solution de $w_{\bar{z}} = \mu w_z$, qui est en fait C^1 en dehors des singularités puisque la métrique est localement Hölder-continue (voir [Le]). Chaque élément du groupe $w^{-1}\Pi w$ est alors une bijection holomorphe (ou anti-holomorphe) de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ (ses singularités ne sont qu'apparentes). On voit ensuite, comme dans la preuve du théorème 1, que $w^{-1}\Pi w$ est un groupe d'isométries de $\mathbb{E}^2$.

Observons maintenant que pour les groupes considérés, il n'y a qu'une seule classe conforme optimale : celle de g_m^{Π}. Il en résulte que (Π, g) est en fait conformément équivalent, en dehors des singularités , à (Γ_m, g_m^{Π}); plus précisément, la métrique g est isométrique à $\lambda^2 g_m^{\Pi}$ où λ est une fonction continue Γ_m-invariante, définie en dehors des singularités . D'après le §1.3 (unicité d'une métrique optimale dans une classe conforme) on conclut que λ est constante.

4. Un exemple hyperbolique : les groupes du triangle.

4.1.

Dans cette partie, nous considérons le disque de Poincaré $\mathbb{H}^2$ muni de la métrique hyperbolique usuelle g_{-1} (i.e. $4|dz|^2/(1-|z|^2)^2$ pour $|z|<1$). Etant donné trois entiers p, q et r tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$, nous noterons $T^*_{p,q,r}$ le groupe discret d'isométries hyperboliques engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle hyperbolique $\mathcal{T}$ d'angles $\pi/p, \pi/q, \pi/r$. Le groupe du triangle associé, $T_{p,q,r}$, est le sous-groupe de $T^*_{p,q,r}$ formé des isométries directes (dans l'esprit des parties précédentes, ces notations classiques correspondent à $D_{\bar{p},\bar{q},\bar{r}}$ et $S_{p,q,r}$). Les images de $\mathcal{T}$ par $T^*_{p,q,r}$ forment un pavage du plan hyperbolique , appelé *pavage* (p,q,r).

Soit α, β et γ trois réels strictement positifs tels que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1$. Nous appellerons *métrique plate* (α,β,γ) associée à $T^*_{p,q,r}$ toute métrique sur $\mathbb{H}^2$ obtenue en identifiant le triangle fondamental $\mathcal{T}$ de $T^*_{p,q,r}$ à un triangle euclidien $\mathcal{T}_0$ d'angles $\pi/\alpha, \pi/\beta, \pi/\gamma$ (autrement dit, le quotient $\mathbb{H}^2/T^*_{p,q,r}$ est isométrique à $\mathcal{T}_0$); deux choix différents de $\mathcal{T}_0$ donnent des métriques homothétiques. Plus précisément, soit $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_0$ "l'application de Riemann" (isomorphisme holomorphe) respectant les sommets ordonnés. La métrique plate (α,β,γ) associée est alors la métrique $T^*_{p,q,r}$-invariante égale à $\Phi^* g_0$ sur $\mathcal{T}$. En fait, cette métrique est bien définie en dehors des sommets du pavage (p,q,r) (appliquer le principe de réflexion de Schwarz à deux triangles voisins) et elle y est conforme à g_{-1} puisque Φ est holomorphe. Les sommets du pavage (p,q,r) sont des singularités coniques d'angles respectifs $2\pi p/\alpha, 2\pi q/\beta, 2\pi r/\gamma$.

La même construction est valable avec des triangles sphériques : on parlera de *métrique sphérique* (α,β,γ) associée à $T^*_{p,q,r}$ $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}>1\right)$.

4.2. L'aire systolique conforme de $T_{p,q,r}$.

THÉORÈME 2. — *Soit p,q et r trois entiers tels que $2 \le p \le q \le r$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$. Alors le groupe du triangle $T_{p,q,r}$ admet une métrique optimale plate dont le type (α,β,γ) dépend de (p,q,r) comme suit :*

1) $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,3,6)$ *si* $p=2$ *et* $q=3$,

2) $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 4, 4)$ *si* $p = 2$ *et* $q \geq 4$,

3) $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 3, 3)$ *si* $p \geq 3$.

L'aire systolique conforme vaut respectivement $\sqrt{3}/12$, $1/4$ *et* $\sqrt{3}/6$.

Remarque. — On voit que ce résultat généralise les trois cas euclidiens où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ (voir 2.2).

Preuve.

1) $p = 2$ *et* $q = 3$ ($r \geq 7$). Le groupe $T^*_{2,3,r}$ contient $T^*_{r,r,r}$ (avec indice 6), de sorte qu'une métrique plate (2,3,6) associée à $T^*_{2,3,r}$ apparaît comme plate (3,3,3) associée à $T^*_{r,r,r}$. Soit $\mathcal{S}$ un triangle fondamental de $T^*_{r,r,r}$ avec un sommet marqué s_0, et soit $\mathcal{L}$ la réunion des deux triangles du pavage $(2, 3, r)$ inclus dans $\mathcal{S}$ et contenant s_0 ; $\mathcal{L}$ est un domaine fondamental pour l'action de $T_{2,3,r}$.

Montrons maintenant que la systole d'une métrique plate (2,3,6) est égale à 1 – on suppose, pour fixer les idées, que $\mathcal{S}$ est équilatéral de côté 1. L'ensemble des sommets du pavage (r, r, r) est muni d'une "distance" combinatoire (c'est le nombre minimal d'arêtes du pavage joignant deux sommets). Soit γ un élément de $T_{2,3,r}$ sans points fixes. Si la "distance" entre les sommets s_0 et $\gamma.s_0$ est au moins égale à 3, on a les inégalités :

$$d(x, \gamma.x) \;\geq\; 3\sqrt{3}/2 - 2\sqrt{3}/3 \;>\; 1 \quad (x \in \mathcal{L}).$$

Sinon, la "distance" entre s_0 et $\gamma.s_0$ est égale à 1 ou 2, et on peut trouver deux symétries σ_D *et* $\sigma_{D'}$ par rapport à des droites D et D' du pavage $(2, 3, r)$ telles que $\sigma_{D'}\sigma_D\gamma$ fixe deux sommets de $\mathcal{S}$ (voir Fig. 6). Comme cette isométrie est directe, c'est l'identité, d'où $\gamma = \sigma_D\sigma_{D'}$. Les droites D et D' sont disjointes (γ est sans points fixes) et leur distance est supérieure ou égale à $1/2$. Tout point x de $\mathbb{H}^2$ vérifie clairement l'égalité :

$$d(x, \gamma.x) \;\geq\; 2\, d(D, D') \;\geq\; 1\ .$$

Les petites isométries de $T_{2,3,r}$ sont de la forme $\gamma = \sigma_D\sigma_{D'}$ avec $d(D, D') = 1/2$. Les triangles du pavage (r, r, r) coupant l'axe de γ (comme isométrie hyperbolique) forment une bande plate infinie $\mathcal{B}$ de largeur $\sqrt{3}/2$ et γ agit dans cette bande comme une translation d'amplitude 1. Cependant, l'allure globale de γ est "hyperbolique" (voir Fig. 6 et Fig. 7-a). On observe enfin qu'il y a trois bandes analogues passant par le triangle

$\mathcal{S}$, et que les axes des petites isométries passent par les sommets de valence 4 du pavage $(2,3,r)$.

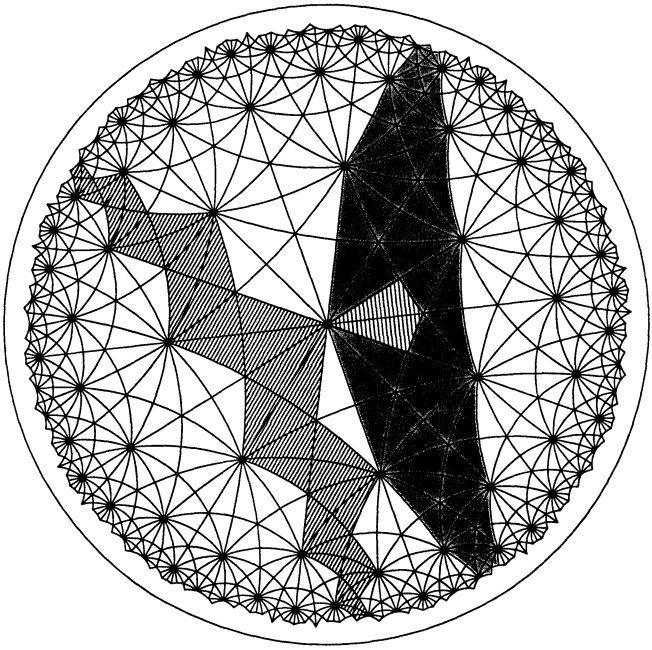

Figure 6. – *Le pavage (2,3,7)*

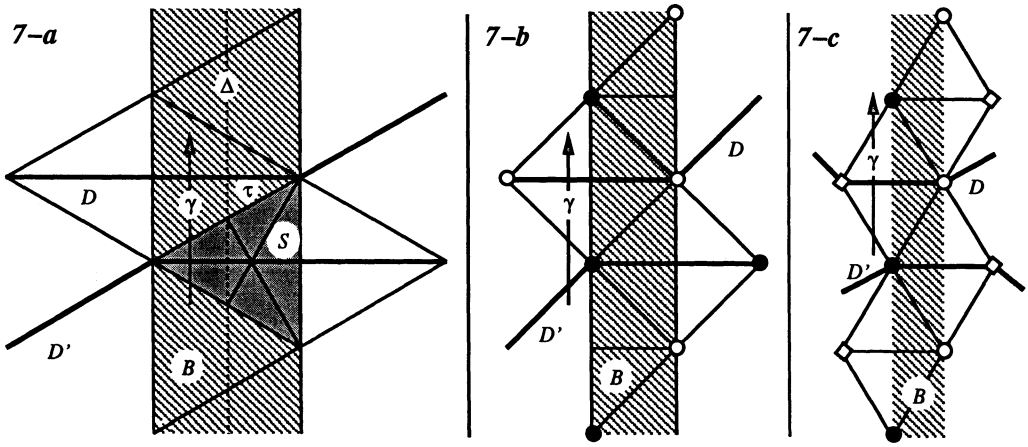

Figure 7. – $\gamma = \sigma_D \sigma_{D'}$

Posons $\tau = D \cap \mathcal{B}$. Pour conclure la preuve du théorème dans ce premier cas, il suffit de considérer la famille des courbes systoliques joignant x et $\gamma.x$ pour $x \in \tau$, munie de la mesure de longueur de τ.

2) $p = 2$, $q \geq 4$. Considérons la métrique plate (2,4,4) associée à $T^*_{2,q,r}$ dont le triangle fondamental est d'aire $1/2$. Il y a deux types de singularités ($\bullet$ et $\circ$) qui correspondent respectivement aux angles π/q et π/r ; ces deux classes ne sont pas équivalentes sous l'action de $T^*_{2,q,r}$, même si $q = r$. Comme domaine fondamental pour $T_{2,q,r}$, on prendra la réunion $\mathcal{L}$ de deux triangles contigüs (voir Fig. 8).

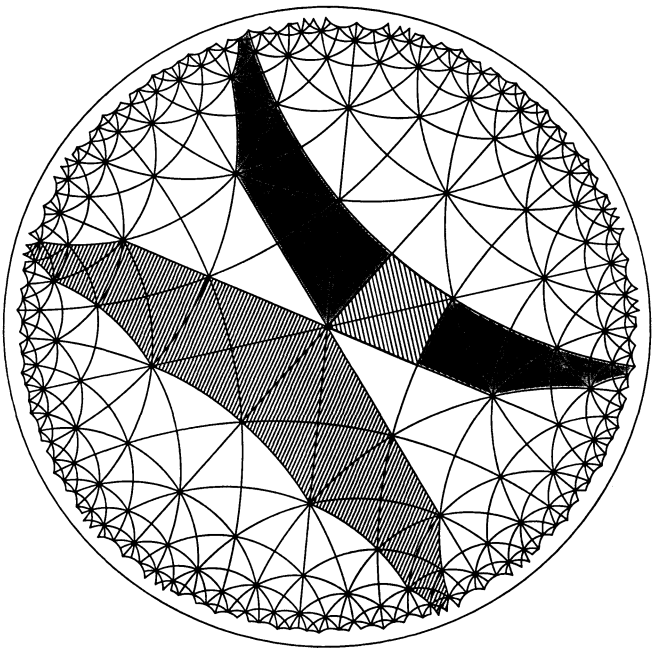

Figure 8. – *Le pavage (2,4,5)*

En raisonnant comme dans le premier cas, on vérifie que la systole est égale à 2. Soit γ un élément de $T_{2,q,r}$ sans points fixes. Si la distance combinatoire entre chaque sommet de $\mathcal{L}$ et son image est au moins 4, on a les inégalités :

$$d(x, \gamma.x) \geq 4 - \sqrt{2} > 2 \quad (x \in \mathcal{L}).$$

Sinon, l'un des sommets de $\mathcal{L}$ est déplacé d'une "distance" 2, et on voit que γ est le produit de deux symétries σ_D *et* $\sigma_{D'}$ par rapport à des droites

disjointes D et D' du pavage $(2, q, r)$. Dans ce cas :

$$d(x, \gamma.x) \ \geq \ 2\, d(D, D') \ \geq \ 2 \qquad (x \in \mathbb{H}^2).$$

Une petite isométrie s'écrit $\gamma = \sigma_D \sigma_{D'}$ avec $d(D, D') = 1$. Elle agit comme une translation d'amplitude 2 dans une bande de largeur 1 (et même de largeur 2 si $q = 4$) : voir Fig. 8 et Fig. 7-b.

On achève ensuite la preuve comme pour le cas précédent.

3) $p \geq 3$. La preuve est analogue à celle des autres cas. On choisit la métrique (3,3,3) dont le triangle fondamental est de côté 1. Les singularités se répartissent en 3 classes ($\bullet, \circ$ et $\diamond$ sur la figure 7-c).

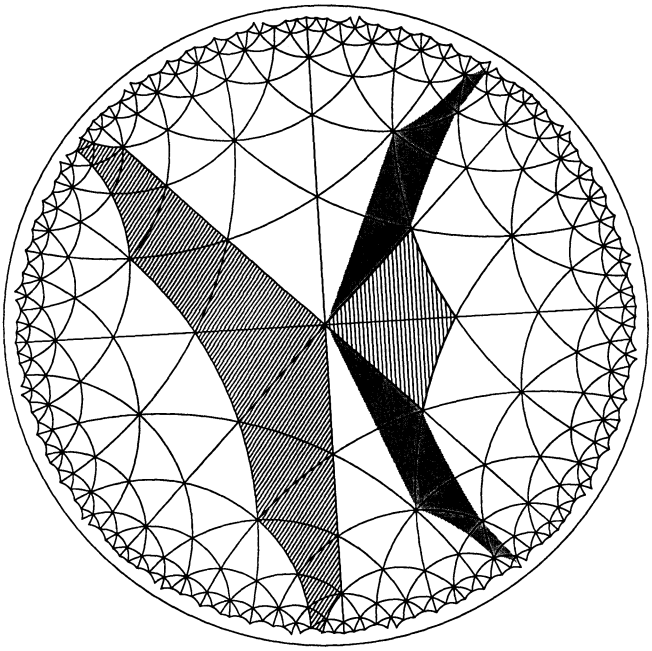

Figure 9. – *Le pavage (3,3,4)*

On vérifie alors que la systole est égale à $\sqrt{3}$ et qu'une petite isométrie opère comme une translation d'amplitude $\sqrt{3}$ dans une bande de largeur $\sqrt{3}/2$ (même plus large si $p = 3$ ou $q = 3$) : voir Fig. 9 et Fig. 7-c.

4.3. L'aire systolique conforme de $T^*_{p,q,r}$.

THÉORÈME 2'. — *La métrique sphérique (2,2,2) est optimale pour* $T^*_{p,q,r}$ *et l'aire systolique conforme de ce groupe est égale à* $1/2\pi$.

Remarque. — Là encore, ce résultat généralise les trois cas euclidiens (voir 2.5).

Preuve. — On remarque d'abord que le voisinage simplicial d'un sous-complexe du pavage (2,2,2) est aussi le $\pi/2$-voisinage pour la métrique sphérique (2,2,2). Puis on vérifie que la systole vaut π.

Rappelons qu'une isométrie hyperbolique indirecte de $\mathbb{H}^2$ est la composée d'un élément hyperbolique avec la symétrie par rapport à son axe Δ^* ("symétrie-translation hyperbolique"). Les petites isométries indirectes de la métrique sphérique (2,2,2) s'obtiennent en composant les trois symétries par rapport aux côtés d'un même triangle du pavage (Fig. 10).

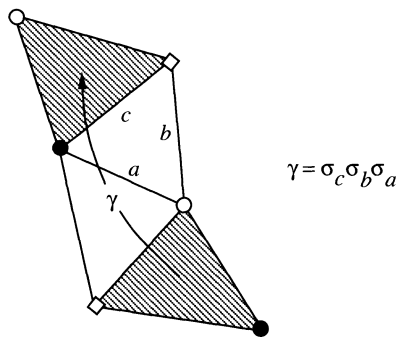

Figure 10

Soit γ une telle isométrie et Δ^* son axe. Si $p \geq 3$, le voisinage simplicial de Δ^* est une réunion de triangles comme sur la figure 5 et Δ^* passe par les milieux de certains côtés des triangles (voir Fig. 9). Si $p = 2$, le voisinage simplicial de Δ^* est une bande formée de demi-sphères recollées suivant des segments de longueur $\pi/2$ comme sur la figure 3 et Δ^* passe par des sommets de valence 4 du pavage (2,q,r) (voir Fig. 6 et Fig. 8); noter que si de plus $q = 3$, le double de γ est une petite isométrie directe du cas plat.

Il reste à établir la minimalité. Pour cela, il suffit d'appliquer le lemme 2 à n'importe quelle boule de rayon $\pi/2$ centrée sur un sommet du pavage

(noter que deux points distants de π sur le bord de sont identifiés par une petite isométrie dont l'axe coupe la boule).

Remarque. — Il est facile de voir que les groupes $T^*_{p,q,r}$ et $T_{p,q,r}$ sont "rigides" du point de vue conforme . On a donc établi des inégalités isosystoliques optimales pour les quotients $\mathbb{H}^2/T^*_{p,q,r}$ et $\mathbb{H}^2/T_{p,q,r}$. On a également des résultats d'unicité dans les mêmes conditions que pour le cas euclidien (voir 3.3).

BIBLIOGRAPHIE

[Ba1] C. BAVARD, Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein, Math. Ann., 274 (1986), 439-441.

[Ba2] C. BAVARD, Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein, Geom. Dedicata, 27 (1988), 349-355.

[Ba3] C. BAVARD, Inégalités isosystoliques conformes, Comment. Math. Helvetici, 67 (1992), 146-166.

[Be] M. BERGER, Géométrie Tome 1, Cedid/Nathan, 1977.

[Ch] L. CHARLAP, Bieberbach Groups and Flats Manifolds, Universitext, Springer-Verlag New-York, 1986.

[Cr] C.CROKE, Curvature free volume estimates, Invent. Math., 76 (1984), 515-521.

[Di] J. DIEUDONNÉ, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris, 1968.

[Gr] M. GROMOV, Filling Riemannian manifolds, J. Diff. Geom., 18 (1983), 1-147.

[Le] O. LEHTO, Univalent Functions and Teichmüller Spaces, GTM 109, Springer-Verlag, New-York, 1987.

[Mo] J. MONTESINOS, Classical Tesselations and Three-Manifolds, Universitext, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.

[Pu] P. PU, Some inequalities in certain non-orientable Riemannian manifolds, Pacific J. Math., 2 (1952), 55-71.

[Sa] L. SANTALÓ, Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Addison-Wesley, 1976.

Manuscrit reçu le 12 juin 1992.

Christophe BAVARD,
Ecole Normale Supérieure de Lyon
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France).