ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL BARLET
A. MARDHY

Un critère topologique d'existence de pôles pour le prolongement méromorphe de $\int_A f^\lambda \square$

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 3 (1993), p. 743-750
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_3_743_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 3 (1993), 743-750

UN CRITÈRE TOPOLOGIQUE D'EXISTENCE DE PÔLES POUR LE PROLONGEMENT MÉROMORPHE DE $\int_A f^\lambda \square$

par D. BARLET & A. MARDHY

Soit $\widetilde{f} : (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0)$ un germe de fonction analytique réelle non identiquement nul. Soit U un ouvert semi-analytique contenant 0 dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et soit $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ un représentant de $\widetilde{f}$. Soit $A_1 \cdots A_\kappa$ les composantes connexes de $U - f^{-1}(0)$ et $a_1 \cdots a_\kappa$ des nombres complexes. Pour $\varphi \in C_c^\infty(U)$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, définissons $\int_A f^\lambda \varphi$ où $A = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha A_\alpha \in H^0(U - f^{-1}(0), \mathbf{C})$ de la façon suivante :

$$\int_A f^\lambda \varphi = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha e^{-i\pi\lambda\varepsilon_\alpha} \int_{A_\alpha} |f(x)|^\lambda \varphi(x)\, dx$$

où

$$\varepsilon_\alpha = 0 \quad \text{si} \quad A_\alpha \subset \{f > 0\}$$

et

$$\varepsilon_\alpha = 1 \quad \text{si} \quad A_\alpha \subset \{f < 0\}.$$

On a bien sûr un prolongement méromorphe de la distribution $\int_A f^\lambda \square$ au plan complexe tout entier avec un nombre fini de séries de pôles rationnels de la forme $-u - m$ où $u \in]0, 1] \cap \mathbf{Q}$ et $m \in \mathbf{N}$.

Mots-clés : Cycles évanescents – Fibre de Milnor.
Classification A.M.S. : 32S55.

Notre propos est de donner une condition suffisante simple de nature topologique assurant l'existence d'un pôle en $-u-m$ pour $m \in \mathbf{N}$, $m \gg 1$, pour $u \in]0,1[\cap \mathbf{Q}$ donné, dans le prolongement analytique de la distribution $\int_A f^\lambda \square$.

Ceci est destiné à compléter le résultat de [B1]. L'exemple le plus simple où le critère de [B1] se montre insuffisant est celui de la forme quadratique de $\mathbf{R}^3$ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ pour laquelle on a trois composantes connexes.

On vérifiera à la fin de cet article que cet exemple est complètement décrit par notre résultat.

De manière plus générale, le critère de [B1] est inopérant pour les singularités isolées (dans le complexe) dès que la fibre de Milnor réelle est non compacte. Nos hypothèses seront toujours vérifiées quand la complexifiée est à singularité isolée.

Pour pouvoir énoncer notre résultat, il nous faut d'abord introduire la situation topologique qui sous-tend notre hypothèse.

Soit $f_{\mathbf{C}} : X \longrightarrow D$ un représentant de Milnor du complexifié de $\widetilde{f}$ (voir [B3]) et notons par $F_{\mathbf{C}}$ la fibre de Milnor de $f_{\mathbf{C}}$.

Si $s_0 \in D^* \cap \mathbf{R}^+$ est choisi comme point base de D^*, $F_{\mathbf{C}} = f_{\mathbf{C}}^{-1}(s_0)$. Soit $U = X_{\mathbf{R}} = X \cap \mathbf{R}^{n+1}$ et $f = f_{\mathbf{C}}/X_{\mathbf{R}}$. Notons par $F_{\mathbf{R}}$ la fibre de Milnor (réelle) de f, c'est-à-dire, par définition

$$F_{\mathbf{R}} = f^{-1}(s_0) \coprod f^{-1}(-s_0).$$

Définissons alors $\theta : F_{\mathbf{R}} \longrightarrow F_{\mathbf{C}}$ de la façon suivante :

$$\theta/f^{-1}(s_0) : f^{-1}(s_0) \longrightarrow f_{\mathbf{C}}^{-1}(s_0) = F_{\mathbf{C}}$$

est simplement l'inclusion donnée par complexification :

$$\theta/f^{-1}(-s_0) : f^{-1}(-s_0) \longrightarrow f_{\mathbf{C}}^{-1}(s_0) = F_{\mathbf{C}}$$

est la composée de la complexification

$$f^{-1}(-s_0) \longrightarrow f_{\mathbf{C}}^{-1}(-s_0)$$

et du difféomorphisme

$$\mathcal{T} : f_{\mathbf{C}}^{-1}(-s_0) \longrightarrow f_{\mathbf{C}}^{-1}(s_0)$$

donné par un demi-tour *dans le sens direct* en utilisant le fait que $f_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}} \smallsetminus f_{\mathbf{C}}^{-1}(0) \longrightarrow D^*$ est une fibration C^∞ localement triviale (Milnor

[M]) et la monodromie correspondante. Donc θ est un plongement fermé sur $f^{-1}(s_0)$ et sur $f^{-1}(-s_0)$; θ est donc une immersion propre.

L'application d'intersection

$$I : H_n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \xrightarrow{\cap F_{\mathbf{R}}} H_0(F_{\mathbf{R}}, \mathbf{C})$$

qui consiste à prendre l'image réciproque d'un n-cycle compact de $F_{\mathbf{C}}$ par θ correspond, via l'identification $H_n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \simeq H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ donnée par la dualité de Poincaré, et le calcul de De Rham, à la forme linéaire qui a une n-forme $C^\infty\varphi$ à support compact d-fermée sur $F_{\mathbf{C}}$ associe pour chaque composante connexe $\widetilde{A}_j$ de $F_{\mathbf{R}}$ (*) le nombre complexe $\displaystyle\int_{\theta(\widetilde{A}_j)} \varphi$.

Considérons maintenant l'application transposée

$$\delta : H^0(F_{\mathbf{R}}, \mathbf{C}) \longrightarrow H^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}).$$

À chaque composante connexe $\widetilde{A}_j$ de $F_{\mathbf{R}}$ elle associe sa classe fondamentale (comme cycle fermé de degré n) via θ_*.

Considérons maintenant la monodromie T_c agissant sur $H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ et notons par $H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$ le sous-espace spectral de T_c pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ ($u \in]0,1[\cap \mathbf{Q}$ est fixé) et par $N_c = \dfrac{1}{2i\pi} \log(e^{2i\pi u} T_c)$ le logarithme nilpotent (à $2i\pi$ près) de la partie unipotente de $T_c / H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$.

Nous montrons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit $u \in]0,1[\cap \mathbf{Q}$ et supposons que $f_{\mathbf{C}}$ ait l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ comme point singulier isolé relativement à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ (**).*

Soit $e \in H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$ et soit $A = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha A_\alpha \in H^0(X_{\mathbf{R}} - f^{-1}(0), \mathbf{C})$.

Posons $\widetilde{A} = A \cap F_{\mathbf{R}} = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha (A_\alpha \cap F_{\mathbf{R}}) \in H^0(F_{\mathbf{R}}, \mathbf{C})$.

Si on a $\langle \delta\widetilde{A}, N_c^h(e) \rangle \neq 0$ avec $h \in \mathbf{N}$, alors pour $m \in \mathbf{N}$ assez grand, le prolongement méromorphe de la distribution $\displaystyle\int_A f^\lambda \square$ admet un pôle d'ordre $\geq h+1$ en $-m-u$. □

(*) $X_{\mathbf{R}} - f^{-1}(0) \longrightarrow D^* \cap \mathbf{R}$ est une fibration localement triviale (C^∞); les composantes connexes de $F_{\mathbf{R}}$ sont en bijection avec celles de $X_{\mathbf{R}} - f^{-1}(0)$.
(**) Voir [B2], définition 1, p. 407.

Démonstration du théorème. — Le premier ingrédient de la démonstration consiste à présenter "analytiquement" la classe de cohomologie $e \in H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$ dont l'hypothèse affirme l'existence.

Fixons $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $N_c^k e = 0$ et $N_c^{k-1} e \neq 0$; on aura donc $k \geq h+1$ et si E désigne le sous-espace vectoriel N_c stable de $H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$ engendré par e, on aura $\dim_{\mathbf{C}} E = k$.

Utilisons maintenant la construction de [B2], pp. 447–448 (dans la preuve de la proposition 3); c'est possible car les hypothèses standards sont moins restrictives que notre hypothèse de singularité isolée relativement à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$.

On peut donc trouver des n-formes semi-méromorphes à pôles dans $\{f = 0\}$ $w_1 \cdots w_k$ sur X, à supports f-propres et vérifiant les conditions suivantes :

i) $dw_j = u\dfrac{df}{f} \wedge w_j + \dfrac{df}{f} \wedge w_{j-1}$ sur $\{f \neq 0\}$, $\forall j \in [1,k]$ avec la convention $w_0 = 0$.

ii) Les images des $w_j/F_{\mathbf{C}}$ dans $H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ forment une base de E.

iii) $1 = \langle \delta\widetilde{A}, w_{k-h}/F_{\mathbf{C}} \rangle = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha \int_{\theta(\widetilde{A}_\alpha)} w_{k-h}$.

En effet la singularité isolée relativement à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ (avec $0 < u < 1$) assure que l'application canonique

$$\text{can} : H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}} \longrightarrow H^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$$

est un isomorphisme ([B2], théorème 3). Donc pour tester la condition ii), il suffit de la tester sur les images par can, ce qui est immédiat d'après la construction de $w_1 \cdots w_k$.

Montrons que iii) se déduit aisément de ii) si l'on suppose h maximal vérifiant $\langle \delta(\widetilde{A}), N_c^h(e) \rangle \neq 0$.

En effet notre hypothèse nous dit que la forme linéaire définie par $\delta(\widetilde{A})$ sur E n'est pas nulle sur $N_c^h(E)$.

Comme $w_{k-h}/F_{\mathbf{C}}$ engendre le quotient (de dimension 1) $\dfrac{N_c^h(E)}{N_c^{h+1}(E)}$ et que $\delta(\widetilde{A})$ est nul sur $N_c^{h+1}(E)$, on aura bien

$$\langle \delta(\widetilde{A}), w_{k-h}/F_{\mathbf{C}} \rangle = 1$$

si on normalise convenablement les w_i.

Choisissons maintenant $m \in \mathbf{N}$ assez grand pour que

$$\widetilde{w}_j = f^m w_j$$

soit C^∞ à support f-propre dans $X_{\mathbf{C}}$ pour $j \in [1,k]$. On aura alors

i bis) $d\widetilde{w}_j = (m+n)\dfrac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_j + \dfrac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_{j-1}$ sur X avec la convention $\widetilde{w}_0 \equiv 0$. De plus on peut supposer que les $\widetilde{w}_j$ vérifient les conditions ii) et iii) précédentes (quitte à renormaliser!).

Posons alors pour $j \in [1,k]$, $\alpha \in [1,\kappa]$ et $s \in D \cap \mathbf{R}$

$$F_{j,\alpha}(s) = \int_{f^{-1}(s)\cap A_\alpha} \widetilde{w}_j.$$

On aura alors, grâce à i bis)

$$s\frac{d}{ds}(F_{j,\alpha})(s) = (m+n)F_{j,\alpha}(s) + F_{j-1,\alpha}(s)$$

et si $A_\alpha \subset \{f > 0\}$

$$F_{j,\alpha}(s_0) = \int_{\widetilde{A}_\alpha} \widetilde{w}_j \quad \text{où} \quad \widetilde{A}_\alpha = A_\alpha \cap F_{\mathbf{R}}.$$

Si $A_\alpha \subset \{f < 0\}$

$$F_{j,\alpha}(-s_0) = \int_{\widetilde{A}_\alpha} \widetilde{w}_j \quad \text{où} \quad \widetilde{A}_\alpha = A_\alpha \cap F_{\mathbf{R}}$$

ce qui donne

$$\sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha F_{j,\alpha}((1-2\varepsilon_\alpha)s_0) = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{w}_j$$

car

$$1 - 2\varepsilon_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } A_\alpha \subset \{f > 0\} \\ -1 & \text{si } A_\alpha \subset \{f < 0\}. \end{cases}$$

On a donc $\sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha F_{k-h,\alpha}((1-2\varepsilon_\alpha))s_0) = 1$ via iii).

Si on pose $\phi_j(s) = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha F_{j,\alpha}((1-2\varepsilon_\alpha)s)$ pour $s \in D \cap \mathbf{R}^+$, on aura donc $\phi_{k-h}(s_0) = 1$ et $\forall j \in [1,k]$ $\quad s\dfrac{d}{ds}(\phi_j)(s) = (m+n)\phi_j(s) + \phi_{j-1}(s)$ avec la convention $\phi_0 \equiv 0$.

Comme on a $\phi_1(s_0) = \cdots = \phi_{k-h-1}(s_0) = 0$ et $\phi_{k-h}(s_0) = 1$, il en résulte que $\phi_{k-h}(s) = \left(\dfrac{s}{s_0}\right)^{m+n}$, $\forall s \in D \cap \mathbf{R}^+$ et donc $\phi_k(s) = \left(\dfrac{s}{s_0}\right)^{m+n} P\left(\log \dfrac{s}{s_0}\right)$, $\forall s \in D \cap \mathbf{R}^+$ où P est un polynôme unitaire de degré h. Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ vaut

identiquement 1 près de 0, on aura $\int_0^{+\infty} s^\lambda \psi(s)\phi_k(s)\,ds$ qui aura un pôle d'ordre $h+1$ en $s=-m-u-1$ de partie principale $\dfrac{(-1)^h h!}{(s+m+u+1)^{h+1}}$. Mais

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} s^\lambda \psi(s)\phi_k(s)\,ds &= \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha \int_{A_\alpha} [(1-2\varepsilon_\alpha)f]^\lambda f^*(\psi)\widetilde{w}_k \wedge df \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha e^{-i\pi\lambda\varepsilon_\alpha} \int_{A_\alpha} |f|^\lambda \varphi\end{aligned}$$

où $\varphi = f^*(\psi)\widetilde{w}_k \wedge df$.

Ceci achève la preuve du théorème. □

Examinons l'exemple $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ donné par $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$.

Par homogénéité de f, on peut supposer que $X_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^3$, $X_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^3$; on a alors

$$X_{\mathbf{R}} - f^{-1}(0) = A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$$

avec $A_1 = \{f > 0\}$, $A_2 = \{f < 0,\ z > 0\}$ et $A_3 = \{f < 0,\ z < 0\}$. On a donc

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_1 &= \{x^2+y^2-z^2 = 1\} \\ \widetilde{A}_2 &= \{x^2+y^2-z^2 = -1,\ z > 0\} \\ \widetilde{A}_3 &= \{x^2+y^2-z^2 = -1,\ z < 0\}\end{aligned}$$

$$F_{\mathbf{R}} = \widetilde{A}_1 \coprod \widetilde{A}_2 \coprod \widetilde{A}_3$$

et enfin

$$F_{\mathbf{C}} = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1\}.$$

Alors $H^0(F_{\mathbf{R}}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}\widetilde{A}_1 \oplus \mathbf{C}\widetilde{A}_2 \oplus \mathbf{C}\widetilde{A}_3$ et $H^2(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}w$ avec

$$w = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy.$$

La monodromie agit sur $H^2(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ par $T = -1$ car $dw = \dfrac{3}{2}\dfrac{df}{f} \wedge w$ montre que $\dfrac{w}{f^{3/2}}$ est une base horizontale multiforme du fibré de Gauss-Manin de $f_{\mathbf{C}}$.

La sphère standard $S = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{R}^3 \mid \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1\}$ s'injecte naturellement dans $F_{\mathbf{C}}$ via $\eta_0 : (\alpha,\beta,\gamma) \longrightarrow (\alpha,\beta,i\gamma)$ et ceci donne un

générateur de $H_2(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{Z})$ puisque

$$\int_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} i(\alpha d\beta \wedge d\gamma + \beta d\gamma \wedge d\alpha + \gamma d\alpha \wedge d\beta)$$
$$= i \int_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<1} 3 d\alpha d\beta d\gamma = 4i\pi \neq 0.$$

Malheureusement $\eta_0(S) \cap \widetilde{A}_1$ n'est pas transversal (on trouve le cercle $\{x^2+y^2=1\} \cap \{z=0\}$ de $\widetilde{A}_1$).

En utilisant la déformation suivante de η_0

$$\eta_\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha ch\varphi + i\beta sh\varphi, \beta ch\varphi - i\alpha sh\varphi, i\gamma)$$

pour $\varphi \in \mathbf{R}$, on obtient que

$$\widetilde{A}_1 \cap [\eta_0(S)] = (0) \quad \text{en homologie}$$

puisque pour $\varphi > 0$, $\theta_\varphi(S) \cap \widetilde{A}_1 = \phi$.

Pour calculer $I(\widetilde{A}_2)$ et $I(\widetilde{A}_3)$, nous allons calculer en fait $\mathcal{T}^{-1}(\eta_0(S)) \cap \widetilde{A}_2$ et $\mathcal{T}^{-1}(\eta_0(S)) \cap \widetilde{A}_3$ dans $f_{\mathbf{C}}^{-1}(-1)$.

Le cycle $\mathcal{T}^{-1}(\eta_0(S))$ est homologue à l'image de S via l'application (*)

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longrightarrow (-i\alpha ch\varphi + \beta sh\varphi, -i\beta ch\varphi - \alpha sh\varphi, \gamma).$$

On trouve donc pour $\varphi > 0$

$$-i\eta_\varphi(S) \cap \widetilde{A}_2 = \{(0,0,1)\}$$
$$-i\eta_\varphi(S) \cap \widetilde{A}_3 = \{(0,0,-1)\}.$$

Comme $\widetilde{A}_2$ et $\widetilde{A}_3$ sont échangés par la monodromie qui vaut -1, les signes correspondant à ces intersections sont opposés et on a donc

$$I(\eta_0(S)) = \varepsilon(\widetilde{A}_2 - \widetilde{A}_3)$$

où $\varepsilon = \pm 1$ dépend des orientations choisies.

On a donc $\delta(\widetilde{A}_1) = 0$ et $\delta(\widetilde{A}_2) = \delta(\widetilde{A}_3) \neq 0$ dans $H^2(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$. On en déduit en particulier que le prolongement méromorphe de $\int_A (x^2+y^2-z^2)^\lambda \square$ aura un pôle pour $\lambda = -k - \frac{1}{2}$, $k \in \mathbf{N}$ assez grand, dès que $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ vérifiera

$$\alpha_2 + \alpha_3 \neq 0.$$

(*) On suit $f_{\mathbf{C}}^{-1}(s)$ de 1 à -1 dans le sens indirect cette fois (donc $-i\eta_\varphi(S)$ donne un cycle homologue à $\mathcal{T}^{-1}(\eta_0(S))$ dans $f_{\mathbf{C}}^{-1}(-1)$).

En fait on vérifie facilement que

$$\int_{x^2+y^2-z^2>0} (x^2+y^2-z^2)^\lambda \square$$

n'a pas de pôle en $\lambda = -k - \frac{1}{2}$, $\forall k \in \mathbf{N}$ et donc que notre critère est nécessaire et suffisant pour cet exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] D. BARLET, Contribution effective dans le réel, Comp. Math., vol. 56 (1985), 351–359.

[B2] D. BARLET, Interaction de strates consécutives pour les cycles évanescents, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 24 (1991), 401–506.

[B3] D. BARLET, Monodromie et pôles du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda}\square$, Bull. Soc. Math. France, t. 114 (1986), 247–269.

[M] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies, n° 61, Princeton (1968).

Manuscrit reçu le 5 janvier 1993.

D. BARLET,
Université de Nancy I
Département de Mathématiques
BP 239
54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex (France)
&
A. MARDHY,
Université Chouaib Doukkali
Département de Mathématiques
BP 20
El Jadida (Maroc).