ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES DLOUSSKY

Colmatage de surfaces holomorphes et classification des surfaces compactes

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 3 (1993), p. 713-741

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_3_713_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 3 (1993), 713-741

COLMATAGE DE SURFACES HOLOMORPHES ET CLASSIFICATION DES SURFACES COMPACTES

par Georges DLOUSSKY

0. Introduction.

1. Généralités sur le colmatage et la complétion holomorphe.

2. L'exemple de H. Rossi.

3. Surfaces contenant une hypersurface strictement pseudoconvexe globale.

Bibliographie.

Les espaces analytiques sont supposés réduits, dénombrables à l'infini. Une surface désigne une variété holomorphe de dimension 2. On note $b_i(S)$ le i-ième nombre de Betti de S.

0. Introduction.

Considérons une variété holomorphe S et enlevons une boule : on a fait un "trou" qu'on peut facilement colmater en recollant la boule. Au lieu d'une sphère, considérons plus généralement une hypersurface (réelle) Σ strictement pseudoconvexe : elle peut disconnecter ou non la variété. Par exemple, si S est une surface de Hopf, une sphère génératrice de $H_3(S, \mathbb{Z})$ ne disconnecte pas S. Quoiqu'il en soit, on obtient une variété dont au moins une composante connexe du bord est strictement pseudoconcave et on peut chercher à colmater ce "trou" en recollant non plus une boule, mais un espace de Stein. Si la dimension de S est au moins 3, H. Rossi a démontré dans [13] que S est toujours le bord d'un espace de Stein.

Mots-clés : Colmatage – Surface holomorphe – Surface compacte – Classification des surfaces – Hypersurface strictement pseudo-convexe.
Classification A.M.S. : 32E10 – 32F10 – 32J15.

Malheureusement en dimension 2, la démonstration, qui repose sur la finitude de la dimension de l'espace de cohomologie $H^1(S,\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un faisceau localement libre, devient fausse. Dans [13] H. Rossi donne un exemple d'une famille de structures holomorphes M_ε sur $\mathbb{R}^4\backslash 0$ qui n'admettent pas de plongement dans une variété M', qu'on appellera complétion holomorphe, dans laquelle toute hypersurface s.pc. Σ de M_ε deviendrait le bord d'un ouvert, relativement compact dans M', ce qui permettrait le colmatage de $M_\varepsilon\backslash\Sigma$. En fait, il est facile de construire des exemples (en toute dimension!) de variétés qui n'admettent pas de complétion holomorphe. Nous allons voir qu'en fait l'exemple de Rossi a une propriété beaucoup plus forte : Il n'existe aucune hypersurface s.pc. Σ de M_ε qui disconnecte M_ε en deux composantes non relativement compactes, et qui soit le bord d'un espace de Stein (théorème 2.5). Venons en maintenant à la classification des surfaces holomorphes compactes : dans [4], Ma. Kato a classé les surfaces compactes qui contiennent une hypersurface Σ s.pc. globale bord d'un espace de Stein. On peut se demander si une hypersurface Σ s.pc. globale dans une surface compacte S est nécessairement bord d'un espace de Stein, puisque on ne connait aucun contre-exemple. Si $b_1(S) = 1$, il suffit de montrer la propriété pour une seule hypersurface. On s'intéresse dans cet article aux surfaces compactes sans fonction méromorphe non constante, pour lesquelles $b_1(S) = 1$ car ce sont les surfaces pour lesquelles la classification de Kodaira est incomplète. On peut remarquer que si $A = S\backslash\Sigma$ et X est obtenu en recollant une infinité de tels anneaux (cf. §3), toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(X)$ admet une limite continue au bout qui a un système fondamental de voisinages pseudoconvexes. On observe par ailleurs que toute fonction holomorphe définie dans un voisinage N de $\Sigma = \partial X$ se prolonge à tout X grâce à un argument cohomologique; ceci permet alors de définir, si $\mathcal{O}(N) \neq \mathbb{C}$, une application $F : X \to \mathbb{C}^m$ telle que $F(x) = F(y)$ si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$, $f(x) = f(y)$. On montre alors que F ne peut pas être de rang 1; en supposant alors qu'il y a assez de fonctions holomorphes non constantes au voisinage de Σ, $F(X)$ est une surface analytique au voisinage de 0, plus précisément :

THÉORÈME PRINCIPAL. – *Soit S une surface holomorphe compacte minimale sans fonction méromorphe non constante, contenant une hypersurface strictement pseudoconvexe globale Σ. On suppose qu'il existe un voisinage N de Σ tel que $\mathcal{O}(N) \neq \mathbf{C}$. On note D le diviseur maximal de S. Alors :*

1) *Si* $b_2(S) > 0$, *S contient un cycle de courbes rationnelles; en particulier S est une déformation de surface de Hopf primaire éclatée en un nombre fini de points.*

2) *Si pour toute composante irréductible A de* $D \cap N$ *il existe une fonction holomorphe sur N non constante sur A,* Σ *est le bord d'un espace de Stein, et soit S contient une coquille sphérique globale, soit S est une surface de Hopf non primaire.*

Remarques. — 1) Puisque toute hypersurface Σ dans la surface de Rossi M a des fonctions holomorphes non constantes au voisinage de Σ qui donnent des cartes locales, on ne peut retrouver un voisinage de cette hypersurface dans une surface compacte S.

2) Le théorème donne une condition pour laquelle S contient des courbes. On ne sait pas en général s'il existe des surfaces avec $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) > 0$ sans courbe.

3) Dans [7], Ma. Kato suppose que les hypersurfaces s.pc. sont analytiques réelles; cela vient du fait qu'il définit une hypersurface Σ s.pc. bord d'un espace de Stein comme étant le bord topologique d'un espace de Stein; on ne s'intéresse dans cet article qu'à des voisinages de Σ (cf. définition 1.4); avec cette définition l'hypothèse d'analyticité devient superflue.

Enfin terminons par le problème suivant :

Problème. — Existe-t'il une surface S et une hypersurface (réelle) strictement pseudoconvexe Σ dans S au voisinage de laquelle (resp. sur laquelle) n'existe aucune fonction holomorphe (resp. fonction de Cauchy-Riemann) non constante? En particulier existe-t'il une telle hypersurface dans une surface compacte? On obtiendrait de cette façon une nouvelle surface de la classe VII de Kodaira.

Je remercie Ma. Kato et J.J. Loeb pour d'éclairantes conversations sur ce sujet.

1. Généralités sur le colmatage et la complétion holomorphe.

DÉFINITION 1.1. — *Soit* Σ *une partie compacte connexe d'un espace analytique* $(X, \mathcal{O}_X)$ *connexe de dimension n. On dira que* Σ *est une*

hypersurface strictement pseudoconvexe (s.pc.) si pour tout $y \in \Sigma$, il existe un voisinage V de y et une fonction φ strictement plurisousharmonique (s.psh) de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur V telle que

$$\Sigma \cap V = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\}.$$

On dira que cette hypersurface est globale si $X \backslash \Sigma$ est connexe. Par exemple, on appelle coquille sphérique globale dans X un plongement ouvert d'un voisinage de la sphère unité de $\mathbf{C}^n$ dans X qui ne disconnecte pas X.

LEMME 1.2 ([13] p.246). — *Soit Σ une hypersurface s.pc. dans un espace analytique $(X, \mathcal{O}_X)$. Alors il existe un voisinage N de Σ et une fonction s.psh. φ de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur N, telle que $\Sigma = \{x \in N \mid \varphi(x) = 0\}$.*

DÉFINITION 1.3. — *On dira qu'un domaine $D \subset X$ est s.pc. (resp.strictement pseudoconcave) si son bord est une hypersurface s.pc. Σ et si φ définit Σ sur un voisinage N de Σ , $D \cap N = \{\varphi < 0\}$ (resp. $D \cap N = \{\varphi > 0\}$).*

DÉFINITION 1.4. — *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique et Σ une hypersurface s.pc. On dira que X est colmatable le long de Σ, ou que Σ est le bord d'un espace de Stein, s'il existe un espace analytique $(Y_\Sigma, \mathcal{O}_{Y_\Sigma})$ et un plongement ouvert $g : N \to Y_\Sigma$ d'un voisinage N de Σ dans Y_Σ, tels que $g(\Sigma)$ soit le bord d'un domaine s.pc. V_Σ, relativement compact dans Y_Σ . On note $D_\Sigma = V_\Sigma \cup g(N)$. On dira que $(X, \mathcal{O}_X)$ est colmatable, s'il est colmatable le long de toute hypersurface s.pc.*

Si Σ disconnecte X, $X \backslash \Sigma$ contient un domaine s.pc. et un domaine strictement pseudoconcave; si Σ est globale, $X \backslash \Sigma$ est un domaine dont le bord a deux composantes connexes l'une s.pc., l'autre strictement pseudoconcave. Notons $(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})$ l'espace analytique obtenu en recollant la composante connexe de $X \backslash \Sigma$ qui a une composante du bord strictement pseudoconcave (c'est tout $X \backslash \Sigma$ si Σ ne disconnecte pas), avec D_Σ grâce à l'isomorphisme $g : N \to g(N)$. On appellera $(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})$ le colmatage de X le long de Σ.

LEMME 1.5. — *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique normal colmatable le long de Σ . Alors il existe un unique colmatage normal tel que Σ soit le bord d'un espace de Stein.*

Démonstration. — Si X est normal, le domaine D_Σ est normal en tout point de N, la normalisation $n : \hat{D}_\Sigma \to D_\Sigma$ est donc un isomorphisme au-dessus de N et $\hat{D}_\Sigma$ est l'espace de Stein cherché. L'unicité résulte du fait que si U est un domaine d'un espace de Stein normal et $K \subset U$ est un compact tel que $U\backslash K$ soit connexe, alors toute application holomorphe de $U\backslash K$ dans un autre espace de Stein se prolonge à U [8]. □

DÉFINITION 1.6. — *On dit qu'un espace analytique $(X, \mathcal{O}_X)$ admet une complétion holomorphe s'il existe un espace analytique $(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ et un plongement ouvert $i : X \to \overline{X}$ tels que pour toute hypersurface Σ s.pc. dans X, $i(\Sigma)$ soit le bord d'un domaine s.pc. relativement compact dans $\overline{X}$.*

PROPOSITION 1.7. — *Si $(X, \mathcal{O}_X)$ admet une complétion holomorphe, alors $(X, \mathcal{O}_X)$ est colmatable.*

Démonstration. — Évidente. □

Le problème du colmatage en dimension ≥ 3 est résolu par H. Rossi :

THÉORÈME 1.8 ([13], p. 249). — *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique de dimension ≥ 3. Alors X est colmatable.*

La proposition suivante va nous permettre de montrer qu'il est facile de construire des variétés colmatables qui n'admettent aucune complétion holomorphe. Vu le théorème 1.8. on supposera être en dimension 2 bien que la démonstration soit valable en toute dimension .

PROPOSITION 1.9. — *Soit S une surface holomorphe compacte telle que $b_1(S) = 1$ et soit Σ une hypersurface s.pc. globale dans S. Si S est colmatable le long de Σ , alors S est colmatable.*

Démonstration (adaptée de [7] p. 539-540 dont on reprend les notations). — Soit Σ' une hypersurface s.pc. On peut supposer que Σ' est globale, sinon il est immédiat que S est colmatable le long de Σ'. On a la suite exacte d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & H_1(S\backslash\Sigma') & \to & H_1(S) & \to & H_1(S, S\backslash\Sigma') & & \\ \to & H_0(S\backslash\Sigma') & \to & H_0(S) & \to & H_0(S, S\backslash\Sigma') & \to & 0. \end{array}$$

D'après le théorème de dualité

$$H_1(S, S\backslash\Sigma') \simeq H^3(\Sigma') \simeq \mathbb{Z}, \qquad H_0(S, S\backslash\Sigma') \simeq H^4(\Sigma') = 0.$$

Comme S et $S\backslash\Sigma'$ sont connexes

$$H_0(S\backslash\Sigma') \simeq H_0(\Sigma) \simeq \mathbb{Z},$$

ce qui donne la suite exacte

$$(*) \cdots \to H_1(S\backslash\Sigma') \to H_1(S) \xrightarrow{p'} \mathbb{Z} \to 0.$$

Soit $h : \pi_1(S) \to H_1(S)$ le morphisme canonique de Hurewicz et posons $j' = p'oh$. On a de la même manière avec Σ une suite exacte

$$(*) \cdots \to H_1(S\backslash\Sigma) \to H_1(S) \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to 0$$

et soit $j = poh$. Comme $b_1(S) = 1$, $\mathrm{Ker}j = h^{-1}(T) = \mathrm{Ker}j'$ où T est le sous-groupe de torsion de $H_1(S)$. Notons $(\tilde{S}, \tilde{\omega}, S)$ le revêtement infini cyclique de S pour lequel le groupe fondamental $\pi_1(\tilde{S}) = h^{-1}(T)$, $i' : S\backslash\Sigma' \subset S$ l'inclusion canonique et

$$i'_* : \pi_1(S\backslash\Sigma') \to \pi_1(S)$$

le morphisme induit. D'après $(*)$, $i'_*(\pi_1(S\backslash\Sigma')) \subset \mathrm{Ker}j$, donc il existe un relèvement $\tilde{i}' : S\backslash\Sigma' \subset \tilde{S}$. Comme on a la même situation pour Σ on obtient les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{S} \\ & \overset{\tilde{i}'}{\nearrow} & \downarrow \tilde{\omega} \\ S\backslash\Sigma' & \subset & S \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \tilde{S} \\ & \overset{\tilde{i}}{\nearrow} & \downarrow \tilde{\omega} \\ S\backslash\Sigma & \subset & S \end{array}$$

Soit $F_0 = \tilde{i}(S\backslash\Sigma)$ (resp $F'_0 = \tilde{i}'(S\backslash\Sigma')$) et $E(\varepsilon)$ (resp. $E'(\varepsilon')$) des petits voisinages de $\overline{F_0}$ et $\overline{F'_0}$ dans $\tilde{S}$. On note $\tilde{g} : \tilde{S} \to \tilde{S}$ l'automorphisme de $\tilde{S}$ tel que $\tilde{S}/\{\tilde{g}^n\} = S$. Quitte à changer la numérotation, il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$E'(\varepsilon') \subset\subset \bigcup_{i=0}^{p} \tilde{g}^i(E(\varepsilon)) =: Z.$$

Comme Σ est le bord d'un espace de Stein, on peut colmater Z pour obtenir un espace analytique normal Z_Σ dans lequel Σ' est le bord d'un domaine s.pc. relativement compact. □

Exemple 1.10 [2]. — Notons $B = B^n$ la boule unité de $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$,

$$\Pi = \Pi_k \circ \cdots \circ \Pi_1 : B^\Pi \to B$$

une succession de k éclatement ($k \geq 0$) au-dessus de l'origine de B, où Π_i est l'éclatement en un point $O_i \in \Pi_{i-1}^{-1}(O_{i-1})$, et soit $\sigma : B \to B^{\Pi}$ un germe de plongement ouvert tel que $\sigma(0) \in \Pi_k^{-1}(O_k)$.

L'application $\sigma\Pi$ permet de recoller les deux bords de $A := B^{\Pi}\backslash\sigma(\bar{B})$, ce qui donne une variété compacte $X_1 = X(\Pi, \sigma)$ appelée la variété de Kato associée à (Π, σ) si $k \geq 1$. Par ailleurs, on peut recoller par $\sigma\Pi$ une infinité d'exemplaires $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de A. On obtient une variété non compacte X_2 qui est le revêtement universel de X_1. Dans X_1 et X_2 la réunion des hypersurfaces complexes compactes obtenues par les éclatements est connexe. Les variétés X_1 et X_2 sont évidemment colmatables suivant les "coquilles sphériques" en recollant une boule. La proposition 1.9 montre que X_1 est colmatable et on montre facilement que X_2 aussi. Si $k = 0$, X_1 est une variété de Hopf, X_2 est isomorphe à $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$ est une complétion holomorphe. Si $k \geq 1$, notons Σ_1 une coquille sphérique globale de X_1, Σ_2 un relèvement de Σ_1 dans X_2. On note U la composante connexe s.pc. de frontière Σ_2. Supposons qu'il existe une complétion holomorphe $\overline{X}_2$ de X_2 et soit $i : X_2 \to \overline{X}_2$ le plongement ouvert correspondant. Le domaine $V \subset\subset \overline{X}_2$ de frontière $i(\Sigma_2)$ est une modification de la boule B^n en 0, donc V ne devrait contenir qu'un nombre fini d'hypersurfaces compactes, ce qui est contradictoire avec la construction.

2. L'exemple de Rossi [13].

Par commodité on donne une construction élémentaire de l'exemple de Rossi avec les modifications nécessaires. Des variantes de cette construction se trouvent également dans [1] et [6]. On va mettre sur la variété analytique réelle $\mathbb{R}^4\backslash 0$ une structure de variété holomorphe M_ε de la façon suivante :

On recouvre $\mathbb{C}^2\backslash 0$ par les deux ouverts $U_i = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_i \neq 0\}$, $i = 1, 2$. Soient

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}^2 \qquad (z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_1^2}{2} - \varepsilon\frac{z_1\overline{z_2}}{r^2}\right)$$

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}^2 \qquad (z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2^2}{2} + \varepsilon\frac{z_2\overline{z_1}}{r^2}\right)$$

où $r = r(z) = (|\, z_1 \,|^2 + |\, z_2 \,|^2)^{1/2}$ et $\varepsilon \in \mathbb{C}$.

LEMME 2.1. — *Notons*

$$V_1 := \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \mid \mu + \frac{\varepsilon\bar{\lambda}}{1+\mid\lambda\mid^2} \neq 0 \right\},$$

$$V_2 := \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \mid \mu - \frac{\varepsilon\bar{\lambda}}{1+\mid\lambda\mid^2} \neq 0 \right\}.$$

Alors : 1) *Les* (U_i, φ_i, V_i) *sont des revêtements analytiques réels à deux feuillets* $(i = 1, 2)$.

2) φ_1 *et* φ_2 *définissent sur* $\mathbb{R}^4\backslash 0$ *une unique structure de variété holomorphe notée* M_ε.

Démonstration. — On considère la restriction suivante de l'éclatement en 0 :

$$\begin{array}{rccc} \Pi_1 : & \mathbb{C}^2\backslash\{v=0\} & \to & U_1 \\ & (u,v) & \to & (v, uv) \end{array}.$$

L'application φ_1 est un homéomorphisme local si et seulement si

$$\varphi_1 \circ \Pi_1(u,v) = \left(u, \frac{v^2}{2} - \varepsilon \frac{\bar{u}}{1+\mid u\mid^2} \right)$$

est un homéomorphisme local, ce qui est le cas puisque l'application analytique réelle sous-jacente a pour jacobien $\mid v\mid^2$. On raisonne de même avec φ_2 en prenant

$$\begin{array}{rccc} \Pi_2 : & \mathbb{C}^2\backslash\{v=0\} & \to & U_2 \\ & (u,v) & \to & (uv, v) \end{array}$$

$$\varphi_2 \circ \Pi_2(u,v) = \left(u, \frac{v^2}{2} + \varepsilon \frac{\bar{u}}{1+\mid u\mid^2} \right)$$

le reste de 1) résulte d'un calcul immédiat.

Pour voir que φ_1 et φ_2 définissent localement des cartes, il s'agit de vérifier que localement $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est une application holomorphe, ce qui est le cas puisque en notant $\alpha^{1/2}$ le choix d'une détermination de la racine carrée de α, on a :

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\lambda, \mu) = \varphi_1 \left(\sqrt{2}\lambda \left(\mu - \frac{\varepsilon\bar{\lambda}}{1+\mid\lambda\mid^2} \right)^{1/2}, \sqrt{2} \left(\mu - \frac{\varepsilon\bar{\lambda}}{1+\mid\lambda\mid^2} \right)^{1/2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}, \lambda^2\mu - \varepsilon\lambda \right). \qquad \square$$

LEMME 2.2. — *Notons ∂ et $\bar\partial$ les opérateurs de Cauchy-Riemann usuels, ∂_M et $\bar\partial_M$ ceux de $M = M_\varepsilon$. On a pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$:*

$$\partial_M f = \partial f + \frac{\bar\varepsilon}{r^4}\Big(\overline{z_1}\frac{\partial f}{\partial \overline{z_1}} + \overline{z_2}\frac{\partial f}{\partial \overline{z_2}}\Big)(z_1 dz_2 - z_2 dz_1) + \frac{\varepsilon}{r^4}\Big(z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_2}\Big)(\overline{z_2}d\overline{z_1} - \overline{z_1}d\overline{z_2})$$

$$\overline{\partial_M} f = \bar\partial f + \frac{\bar\varepsilon}{r^4}\Big(\overline{z_1}\frac{\partial f}{\partial \overline{z_1}} + \overline{z_2}\frac{\partial f}{\partial \overline{z_2}}\Big)(z_2 dz_1 - z_1 dz_2) + \frac{\varepsilon}{r^4}\Big(z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_2}\Big)(\overline{z_1}d\overline{z_2} - \overline{z_2}d\overline{z_1}).$$

En particulier une fonction f est holomorphe si et seulement si

$$\overline{z_1}\frac{\partial f}{\partial \overline{z_1}} + \overline{z_2}\frac{\partial f}{\partial \overline{z_2}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z_2}} + \frac{\bar\varepsilon}{r^4}\overline{z_1}\Big(z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_2}\Big) = 0.$$

En posant $u = z_2/z_1$, $v = z_1$, f est holomorphe si et seulement si :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar v} = 0 \qquad \text{et} \qquad v(1+\mid u\mid^2)^2\frac{\partial f}{\partial \bar u} + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Démonstration. — Ne présente aucune difficulté. □

Par construction

$$u : M \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \qquad (z_1, z_2) \mapsto \frac{z_2}{z_1}$$

est holomorphe, donc pour toute droite D passant par l'origine $D\backslash\{0\}$ est une sous-variété de M. En considérant les expressions de φ_1 et φ_2 il est facile de voir que la structure holomorphe induite sur $D\backslash\{0\}$ est celle de $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$. Lorsque $\varepsilon = 0$ on récupère la structure usuelle de $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ et

$$\begin{array}{rccc} \phi_0 : & M & \to & \mathbb{C}^3 \\ & z & \mapsto & (z_1^2, z_2^2, z_1 z_2) \end{array}$$

fait de M un revêtement à deux feuillets de la quadrique privée de l'origine

$$Q_0^* = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3\backslash\{0\} \mid z_3^2 - z_1 z_2 = 0\}.$$

Considérons

$$v_1(z) := \frac{z_1^2}{2} - \varepsilon\frac{z_1\overline{z_2}}{r^2}, \qquad v_2(z) := \frac{z_2^2}{2} + \varepsilon\frac{\overline{z_1}z_2}{r^2}.$$

Ces deux fonctions sont holomorphes sur M_ε par construction . On cherche une troisième fonction de la forme

$$v_3(z) := \frac{z_1 z_2}{2} + \alpha(u, \bar{u}) = \frac{uv^2}{2} + \alpha(u, \bar{u})$$

pour déformer ϕ_0. Les conditions de Cauchy-Riemann du lemme 2.2 s'écrivent

$$(1+ \mid u \mid^2)^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{u}} + \varepsilon u = 0.$$

Choisissons $\alpha(u, \bar{u}) = \dfrac{\varepsilon}{1+ \mid u \mid^2}$ et

$$v_3(z) := \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{\varepsilon}{1+ \mid u \mid^2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{\varepsilon \mid z_1 \mid^2}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

PROPOSITION 2.3. — *Notons Q_ε la sous-variété de $\mathbb{C}^3$ définie par*

$$Q_\varepsilon := \left\{ w \in \mathbb{C}^3 \mid w_3^2 - w_1 w_2 = \frac{\varepsilon^2}{4} \right\} \qquad (\varepsilon \neq 0).$$

Alors, il existe un sous-ensemble analytique réel compact K_ε de Q_ε, de codimension réelle 2 dans Q_ε, tel que, en posant $Q_\varepsilon^* = Q_\varepsilon \backslash K_\varepsilon$:

i) $\lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon = \{0\}$ *pour la distance de Haussdorf.*

ii) *l'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & M = M_\varepsilon & \longrightarrow & Q_\varepsilon^* \\ & z & \longmapsto & (v_1(z), v_2(z), v_3(z)) \end{array}$$

fait de M un revêtement à deux feuillets de Q_ε^*.

Démonstration. — 1) On vérifie facilement que $v_3^2 - v_1 v_2 = \dfrac{\varepsilon^2}{4}$.

2) L'application ϕ est de rang 2 en tout point de M. En effet :

Sur U_1 les fonctions $u_1(z) = z_2/z_1$ et $v_1(z)$ forment un système local de coordonnées. On a :

$$v_2 = v_1 u_1^2 + \varepsilon u_1 \qquad \text{et} \qquad v_3 = u_1 v_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent

$$D\phi(u_1, v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2u_1v_1 + \varepsilon & u_1^2 \\ v_1 & u_1 \end{pmatrix}$$

qui a toujours un mineur d'ordre 2 non nul. De même sur U_2, c'est $u_2(z) = z_1/z_2$ et $v_2(z)$ qui forment un système de coordonnées. On a :

$$v_1 = v_2u_2^2 - \varepsilon u_2 \qquad \text{et} \qquad v_3 = u_2v_2 - \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui donne

$$D\phi(u_2, v_2) = \begin{pmatrix} 2u_1v_1 + \varepsilon & u_1^2 \\ 0 & 1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix}.$$

3) Déterminons maintenant z tel que :

$$\phi(z) = \left(z_1\left(\frac{z_1}{2} - \varepsilon\frac{\overline{z}_2}{r^2}\right), z_2\left(\frac{z_2}{2} + \varepsilon\frac{\overline{z}_1}{r^2}\right), z_1\left(\frac{z_2}{2} + \varepsilon\frac{\overline{z}_1}{r^2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \omega \quad \text{où} \quad \omega \in Q_\varepsilon.$$

Remarquons d'abord que

$$\left\{z \in M \mid \frac{z_1}{2} - \varepsilon\frac{\overline{z}_2}{r^2} = \frac{z_2}{2} + \varepsilon\frac{\overline{z}_1}{r^2} = 0\right\} = \varnothing.$$

En effet, on a $z_1 = 2\varepsilon\dfrac{\overline{z}_2}{r^2}$ et en remplaçant dans l'autre équation on obtient

$$z_2\left(\frac{1}{2} + \frac{2 \mid \varepsilon \mid^2}{r^4}\right) = 0, \text{ donc } z_2 = 0 \text{ et } z_1 = 0.$$

Premier cas. — $\omega_2 = 0$, donc $\omega_3 = \pm\varepsilon/2$.

$*$ Si $\omega_3 = -\dfrac{\varepsilon}{2}$, on a

$$\frac{z_2}{2} + \varepsilon\frac{\overline{z}_1}{r^2} = 0 \tag{2.3.1}$$

donc $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. D'autre part, d'après la remarque, on doit avoir

$$z_1\left(\frac{z_1}{2} - \varepsilon\frac{\overline{z}_2}{r^2}\right) = \omega_1 \neq 0. \tag{2.3.2}$$

De (2.3.1), on tire

$$\frac{r^2}{2} = -\varepsilon\frac{\overline{z}_1}{z_2} \tag{2.3.3}$$

qu'on reporte dans (2.3.2) pour obtenir

$$\frac{r^2}{2} = \frac{\overline{z}_1}{z_1}\omega_1. \tag{2.3.4}$$

En comparant (2.3.3) et (2.3.4) on en déduit

$$z_2 = -\frac{\varepsilon}{\omega_1}z_1. \tag{2.3.5}$$

On reporte dans (2.3.1), ce qui donne

$$z_1^2 = \frac{2\omega_1 \mid \omega_1 \mid^2}{\mid \varepsilon \mid^2 + \mid \omega_1 \mid^2}$$

qui admet deux solutions si $w_1 \neq 0$, c'est-à-dire si $w \neq (0, 0, -\varepsilon/2)$.

$*$ Si $\omega_3 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ on a $z_2 = 0$ d'où $\dfrac{z_1^2}{2} = \omega_1$ qui admet deux solutions si $w_1 \neq 0$ c'est à dire si $w \neq (0, 0, \varepsilon/2)$.

Second cas. — $\omega_3 + \varepsilon/2 = 0$ donc $\omega_1\omega_2 = 0$.

Il reste à considérer le cas $\omega_1 = 0$. On a alors d'après la remarque du début $z_1 = 0$, donc $\dfrac{z_2^2}{2} = \omega_2$ qui a encore deux solutions si $\omega_2 \neq 0$.

Troisième cas. — $\omega_2 \neq 0$ et $\omega_3 + \dfrac{\varepsilon}{2} \neq 0$:

Le point $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ doit vérifier le système

$$z_1\left(\frac{z_1}{2} - \varepsilon\frac{\overline{z}_2}{r^2}\right) = \omega_1 \tag{2.3.6}$$

$$z_2 = z_1\frac{\omega_2}{\omega_3 + \frac{\varepsilon}{2}} \tag{2.3.7}$$

$$z_1\left(\frac{z_2}{2} + \varepsilon\frac{\overline{z}_1}{r^2}\right) = \omega_3 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3.8}$$

(2.3.7) et (2.3.8) donnent

$$\frac{z_1^2}{2}\frac{\omega_2}{(\omega_3+\frac{\varepsilon}{2})^2}=\frac{|\,\omega_2\,|^2+(\omega_3-\frac{\varepsilon}{2})\overline{(\omega_3+\frac{\varepsilon}{2})}}{|\,\omega_2\,|^2+|\,\omega_3+\frac{\varepsilon}{2}\,|^2}$$

qui a deux solutions sauf si le second membre s'annule. On remarquera que le sous-ensemble analytique réel S_ε de $\mathbb{C}^3$ d'équation

$$(2.3.9)\quad |\,\omega_2\,|^2+\Big(\omega_3-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\overline{\Big(\omega_3+\frac{\varepsilon}{2}\Big)}=|\,\omega_2\,|^2 + |\,\omega_3\,|^2-\frac{|\,\varepsilon\,|^2}{4}+i\,\mathrm{Im}(\bar\varepsilon\omega_3)=0$$

est un cylindre (en ω_1) de section une sphère de dimension 2, qui contient les points $(0,0,\pm\varepsilon/2)$. L'intersection de S_ε avec Q_ε est un sous-ensemble analytique réel K_ε de codimension 2 dans Q_ε qui est compact puisque d'après (2.3.9), ω_2 et ω_3 sont bornés, et $|\,\omega_1\,|=|\,\omega_2\,|$ d'après l'équation de Q_ε. □

Remarques 2.4. — 1) L'application ϕ ne sépare pas z et $-z$.

2) Le choix de $\alpha(u,\bar u)=-\dfrac{\varepsilon\,|\,u\,|^2}{1+|\,u\,|^2}$ amène à une construction analogue.

3) Vu la forme des opérateurs ∂_M et $\bar\partial_M$, lorsque R est assez grand, la sphère de rayon R est une hypersurface s.pc.

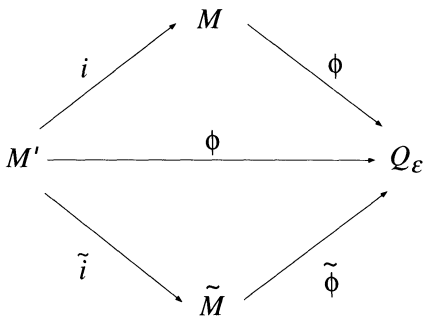
THÉORÈME 2.5. — *Soit Σ une hypersurface s.pc. de $M=M_\varepsilon$ $(\varepsilon\neq 0)$, qui sépare M en deux composantes connexes non relativement compactes. Alors :*

1) *M n'est pas colmatable le long de Σ.*

2) *Si V est la composante non bornée de $M\backslash\Sigma$, l'enveloppe d'holomorphie de (V,ϕ) et celle de (M,ϕ) au-dessus de Q_ε sont isomorphes à Q_ε.*

Démonstration. — 1) a) Notons U la composante bornée de $M\backslash\Sigma$ et supposons qu'il existe un voisinage N de Σ, Y un espace de Stein normal, et $g:N\to Y$ un plongement ouvert tel que $g(\Sigma)$ soit le bord d'un ouvert $\tilde U$ s.pc. relativement compact de Y. On note $M':=(M\backslash\bar U)\cup N$, $Y':=\tilde U\cup g(N)$ et $\tilde M:=M'\bigcup_N Y'$ l'espace analytique normal obtenu en

recollant M' avec Y' le long de N. Soit $\phi = (v_1, v_2, v_3) : M \to Q_\varepsilon$ qui fait de M un revêtement à deux feuillets de Q_ε^*. Comme $\tilde{U}$ est relativement compact dans Y, $\phi_{|M'}$ se prolonge en $\tilde{\phi} : \tilde{M} \to Q_\varepsilon$ de sorte que le diagramme suivant :



où i et $\tilde{\imath}$ sont des inclusions, soit commutatif.

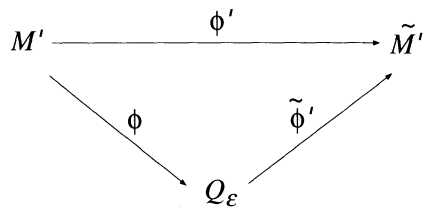
b) *$\tilde{\phi}$ est un isomorphisme propre* : en effet si $\| z \|^2 = | z_1 |^2 + | z_2 |^2 > R^2$, on a $| z_1 |^2 > R^2$, ou $| z_2 |^2 > R^2$. De plus l'inégalité $| z_1 z_2 | \leq r^2$ est vérifiée. Si $| z_1 |^2 > R^2$, on a

$$| v_1(z) | \geq \frac{| z_1 |^2}{2} - | \varepsilon | \frac{| z_1 z_2 |}{r^2} \geq \frac{R^2}{2} - | \varepsilon | .$$

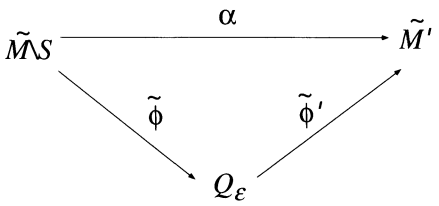
Il en est de même si $| z_2 |^2 > R^2$. Par conséquent si $\| z \| \to \infty$, on a $\| \phi(z) \| \to \infty$. On en déduit que si A est un compact de Q_ε, $\phi^{-1}(A)$ est contenu dans une boule et donc $\tilde{\phi}^{-1}(A)$ est compact.

ϕ est à fibres finies : car $\tilde{\phi}$ est propre et $\tilde{M}$ ne contient pas de sous-ensemble analytique compact de dimension > 0. L'application $\tilde{\phi}$ étant propre à fibres finies, est un revêtement ramifié à deux feuillets de Q_ε. Comme Q_ε est une variété de Stein, $\tilde{M}$ est un espace de Stein.

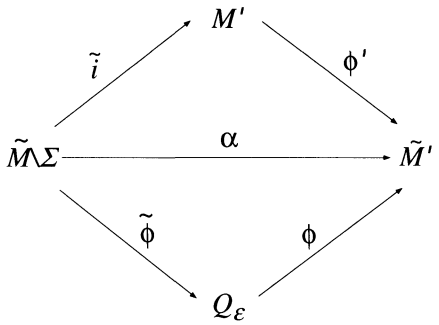
c) Soit



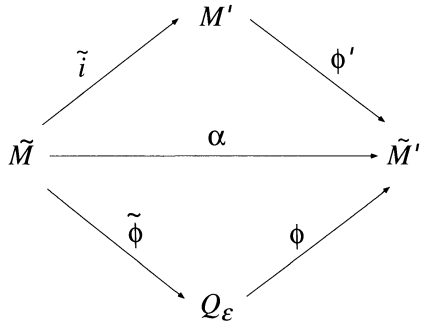
l'enveloppe d'holomorphie de M' au-dessus de Q_ε. Puisque Q_ε est une variété de Stein, $\tilde{M}'$ aussi. Notons S le lieu singulier de $\tilde{\phi}$ (qui contient le lieu singulier de $\tilde{M}$) ; S est un sous-ensemble analytique de $\tilde{M}$ donc est un nombre fini de points. Maintenant, $\tilde{\phi} : \tilde{M}\backslash S \to Q_\varepsilon$ est un domaine étalé auquel toutes les fonctions holomorphes sur M' se prolongent, par conséquent il existe un morphisme de domaines étalés



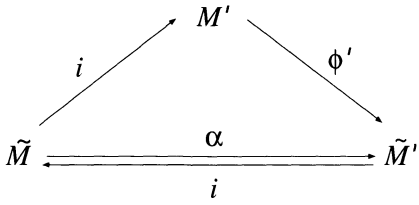
qui fait commuter le diagramme



De plus, S étant de codimension 2 dans un espace normal et $\tilde{M}'$ étant une variété de Stein, α se prolonge à $\tilde{M}$, ce qui donne finalement le diagramme commutatif

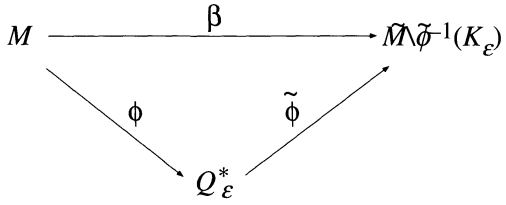


On va voir que α est un isomorphisme : en effet le plongement ouvert $i : M' \to \tilde{M}$ se prolonge en $\tilde{\imath} : \tilde{M}' \to \tilde{M}$ puisque $\tilde{M}$ est de Stein. On déduit alors le résultat du diagramme doublement commutatif

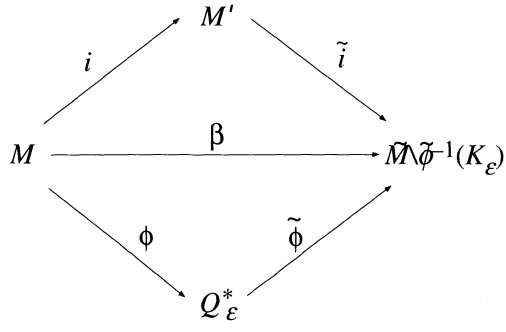


Nous venons de voir que $(\tilde{M}, \tilde{\phi})$ est l'enveloppe d'holomorphie de (M', ϕ) au-dessus de Q_ε. En particulier $\tilde{M}$ est une variété et $(\tilde{M}, \tilde{\phi})$ est un revêtement à deux feuillets de Q_ε.

d) $(M, \phi, Q_\varepsilon^*)$ est un revêtement à deux feuillets ; comme M est simplement connexe c'est le revêtement universel, et $\pi_1(Q_\varepsilon^*) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; par ailleurs nous venons de voir que $(\tilde{M}\backslash\tilde{\phi}^{-1}(K_\varepsilon), \tilde{\phi}, Q_\varepsilon^*)$ est aussi un revêtement à deux feuillets. Par conséquent il existe un diagramme commutatif



où β est un isomorphisme. De plus en composant au besoin β avec un automorphisme de revêtement on peut supposer que



soit commutatif. En particulier M se plonge dans $\tilde{M}$ et $\tilde{M}\backslash M = \tilde{\phi}^{-1}(K_\varepsilon)$.

e) Comme K_ε est compact, l'enveloppe d'holomorphie de Q_ε^* est Q_ε et celle de $(\tilde{M}\backslash\tilde{\phi}^{-1}(K_\varepsilon), \tilde{\phi}, Q_\varepsilon)$ est $(\tilde{M}, \tilde{\phi}, Q_\varepsilon)$. On en déduit que toute fonction holomorphe sur M se prolonge à $\tilde{M}$ et que $(\tilde{M}, \tilde{\phi}, Q_\varepsilon)$ est l'enveloppe d'holomorphie de (M, ϕ, Q_ε). Considérons alors $u : M \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\tilde{u}$ son prolongement à $\tilde{M}$. Pour $c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ fixé, $D_c := u^{-1}(c)$ est une droite de M qui se prolonge à $\tilde{M}$ en $\tilde{D}_c := \tilde{u}^{-1}(c)$ et $\tilde{D}_c\backslash D_c \subset \tilde{\phi}^{-1}(K_\varepsilon)$, d'où D_c est dense dans $\tilde{D}_c$. Or

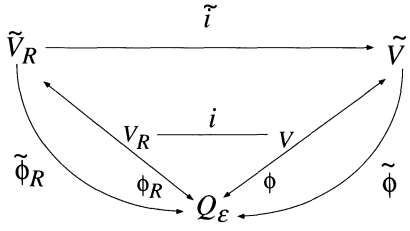
$$\phi(z) = \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{\varepsilon\bar{u}}{1+|u|^2}, \frac{z_2^2}{2} + \frac{\varepsilon u}{1+|u|^2}, \frac{z_1 z_2}{2} + \frac{\varepsilon}{1+|u|^2} - \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

et

$$\lim_{z\to 0, \frac{z_1}{z_2}=c} \phi(z) = \left(-\frac{\varepsilon\bar{c}}{1+|c|^2}, \frac{\varepsilon c}{1+|c|^2}, \frac{\varepsilon}{1+|c|^2} - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

est une valeur fixée de K_ε, donc $\tilde{\phi}$ est constante sur $\tilde{D}_c\backslash D_c$ et $\tilde{D}_c\backslash D_c$ est formé d'au plus deux points et en fait d'un seul puisque D_c est une droite privée de l'origine. Notons x_c ce point ; $\tilde{\phi}$ prend la même valeur sur z et $-z$; donc dans tout voisinage de x_c, $\tilde{\phi}$ identifie deux points, ce qui est en contradiction avec le fait que $\tilde{\phi}$ est un isomorphisme local.

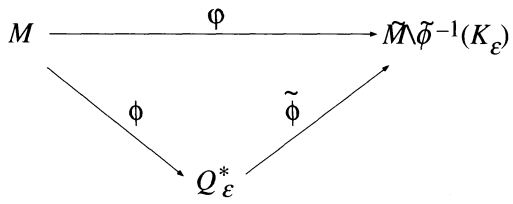
2) a) Soit Σ une hypersurface s.pc. de M et B_R une boule de rayon R assez grand de sorte que ∂B_R soit une surface s.pc. et la composante non bornée V_R de $M\backslash\partial B_R$ soit contenue dans V. Il suffit de montrer le résultat pour V_R : en effet si $(\tilde{V}_R, \tilde{\phi}_R)$ et $(\tilde{V}, \tilde{\phi})$ sont respectivement les enveloppes d'holomorphie de (V_R, ϕ_R) et (V, ϕ) au-dessus de Q_ε, on a un diagramme commutatif



où $\tilde{\phi}_R$ est un isomorphisme. Comme $\tilde{V}$ est connexe il en est donc de même pour $\tilde{\imath}$, ce qui montre que Q_ε est l'enveloppe d'holomorphie de V.

b) Notons $(\varphi, \tilde{M}, \tilde{\phi})$ l'enveloppe d'holomorphie de (M, ϕ) au-dessus de Q_ε, alors $(M, \phi, Q_\varepsilon^*)$ est le revêtement universel de Q_ε^* ; d'après [9], Hilfssatz 2, $(\tilde{M}, \tilde{\phi}, Q_\varepsilon)$ est donc celui de Q_ε. Vu la surjectivité de $\pi_1(Q_\varepsilon^*) \to \pi_1(Q_\varepsilon)$, le groupe fondamental de Q_ε est soit $\{0\}$, soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par conséquent

$(\tilde{M}, \tilde{\phi}, Q_\varepsilon)$ est soit le revêtement trivial, soit un revêtement à deux feuillets. Considérons le diagramme



Par connexité φ est surjective. Si les deux revêtements ont le même nombre de feuillets φ est injective : on aurait donc un plongement ouvert $\varphi : M \to \tilde{M}$ ce qui donnerait une complétion holomorphe de M, ce qui est impossible d'après 1). On en déduit le résultat et $\pi_1(Q_\varepsilon) = \{0\}$.

c) Revenons à l'enveloppe d'holomorphie de (V_R, ϕ) : comme $\partial B_R = \phi^{-1}(\phi(\partial B_R))$, $V_R = \phi^{-1}(\phi(V_R))$ et $(V_R, \phi, \phi(V_R))$ est un revêtement à deux feuillets. Le complémentaire de $\phi(V_R)$ est compact dans Q_ε donc l'enveloppe d'holomorphie de $\phi(V_R)$ est Q_ε. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_R & \xrightarrow{\varphi_R} & \tilde{V}_R \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\phi}_R} \\ \phi(V_R) & \xrightarrow{i} & Q_\varepsilon \end{array}$$

où i est l'inclusion et $(\tilde{V}_R, \tilde{\phi}_R, Q_\varepsilon)$ est un revêtement d'après [9]. On vient de voir que Q_ε est simplement connexe donc $\tilde{\phi}_R$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2.6. — Notons

$$\tilde{v}(c) = \left(-\frac{\varepsilon\bar{c}}{1+|c|^2}, \frac{\varepsilon c}{1+|c|^2}, \frac{\varepsilon}{1+|c|^2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \in K_\varepsilon.$$

L'application $\tilde{v} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to K_\varepsilon$ est surjective, l'image réciproque de (w_1, w_2, w_3) étant précisément $c = \dfrac{w_2}{w_3 + \dfrac{\varepsilon}{2}}$. Le théorème précédent montre que pour compléter M il faudrait rajouter cette surface analytique réelle.

3. Surfaces contenant une hypersurface strictement pseudoconvexe globale.

On s'intéresse maintenant au problème de savoir si une hypersurface Σ s.pc. globale dans une surface compacte S est le bord d'un espace de Stein. On supposera dans la suite que S est une surface holomorphe compacte sans fonction méromorphe non constante avec $b_1(S) = 1$. Soit S une telle surface; on va associer à S des variétés holomorphes obtenues par des recollements d'"anneaux" le long de voisinages épaissis du bord de ces anneaux; plus précisément :

On note $A = S\backslash\Sigma$ un anneau dont le bord est constitué de deux exemplaires de Σ, l'un étant pseudoconvexe, l'autre pseudoconcave, $A' = A \cup N$ obtenu en recollant A avec un voisinage $N = \{-\varepsilon < \varphi < +\varepsilon\}$ de $\Sigma = \{\varphi = 0\}$ du côté pseudoconvexe de A, de sorte que $A \cap N = \{-\varepsilon < \varphi < 0\}$. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (resp.$(A'_i)_{i\in\mathbb{N}}$) une suite d'exemplaires de A (resp. A'). On pose alors

$$X_n = A_0 \bigcup \Big(\bigcup_{1\le i\le n} A'_i \Big), \qquad X = A_0 \bigcup \Big(\bigcup_{1\le i\le \infty} A'_i \Big), \qquad X^n = \bigcup_{n\le i\le\infty} A'_i$$

$$X'_n = \bigcup_{0\le i\le n} A'_i \qquad X' = \bigcup_{0\le i\le\infty} A'_i$$

où le bord pseudoconcave de A_i est recollé avec le bord pseudoconvexe de A_{i+1}. On note $\tilde{g} : X \to X$ l'application qui à $z \in A'_i$ associe $z \in A'_{i+1}$ et $\tilde{\omega} : X \to S$ l'application canonique. Le lemme suivant est un cas particulier de [1], lemma 1.1, p. 234 :

LEMME 3.1. — *Soit $(Y, \mathcal{O})$ un espace analytique normal de dimension 2, (0,0)-convexe-concave, pour une fonction d'exhaustion $\varphi : Y \to]a, b[$ fortement 0-pseudoconvexe (i.e. s.pc.) sur tout Y. Posons pour $a \le c < d \le b$, $X_c^d = \{c < \varphi < d\}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{O}(X_a^d)$, on a* $\mathrm{Sup}_{X_a^d} \mid f(z) \mid = \mathrm{Sup}_{X_c^d} \mid f(z) \mid$.

LEMME 3.2. — *Notons $\hat{O}$ le bout de X défini par les ouverts connexes $(X^n)_{n\ge 0}$ et $\hat{X} = X \cup \{\hat{O}\}$ l'espace topologique obtenu en rajoutant ce bout à X. Alors :*

i) *toute fonction holomorphe f sur X se prolonge continûment à $\hat{X}$;*

ii) $\| f \|_\Sigma = \mathrm{Sup}_\Sigma \mid f(z) \mid$ *fait de l'algèbre $\mathcal{A}(X)$ des fonctions holomorphes sur X, continues sur $X \cup \Sigma$, une algèbre de Banach. De plus , pour toute fonction f sur X le maximum de f ne peut être atteint en $\hat{O}$.*

Démonstration. — i) Posons $X' = N \cup X$. Quitte à remplacer f par $f \circ g$ on peut supposer que f est holomorphe sur X'. On considère sur X la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ où $f_n = f \circ g^n$; le maximum de f_1 sur $\bar{X}$ est atteint sur Σ d'après le lemme 3.1, par conséquent la suite (f_n) est bornée par $\| f_1 \|_\Sigma$. Le théorème de Montel nous assure de l'existence d'une sous-suite (f_{n_k}) convergente, de limite $h \in \mathcal{O}(X')$. Remarquons que la suite $(\| f_n \|_\Sigma)_n$ est décroissante; d'autre part, comme $\lim_{k\to\infty} \| h - f_{n_k} \|_\Sigma = 0$, on a d'après l'inégalité triangulaire $\| h \|_\Sigma = \lim \| f_{n_k} \|_\Sigma = \lim \| f_n \|$. Maintenant, puisque sur X^1 , (f_{n_k}) converge uniformément vers $h_{|X^1}$, on a en posant $\Sigma_1 = g(\Sigma)$, $\| h \|_{\Sigma_1} = \lim \| f_{n_k|X_1} \|_{\Sigma_1} = \lim \| f_{n_k+1} \|_\Sigma = \lim \| f_n \|_\Sigma = \| h \|_\Sigma$: cela signifie que h est constante. Pour achever la démonstation, remarquons que, puisque h est constante, nous pouvons appliquer le lemme 3.1 à la suite $(f_n - h)_n$, ce qui donne une suite décroissante $(\| f_n - h \|_\Sigma)_n$ dont une sous-suite tend vers 0.

ii) est une conséquence immédiate du lemme 3.1. □

PROPOSITION 3.3. — *Soit S une surface minimale sans fonctions méromorphes non constantes, contenant une hypersurface Σ s.pc. globale, vérifiant $b_1(S) = 1$. Alors toute fonction holomorphe définie sur un voisinage N de Σ se prolonge holomorphiquement à tout X.*

Démonstration. — 1) Si $\mathcal{O}(N) = \mathbb{C}$, le résultat est évident, on suppose donc dans la suite que $\mathcal{O}(N) \neq \mathbb{C}$.

2) D'après [10], p. 790, $h^1(S, \mathcal{O}) = 1$. Soit $\mathcal{U}$ le recouvrement de S constitué des deux ouverts $S\backslash\Sigma$ et $N = \{-\varepsilon < \varphi < +\varepsilon\}$. On note $N^+ = \{0 < \varphi < +\varepsilon\}$ et $N^- = \{-\varepsilon < \varphi < 0\}$. La suite exacte de Mayer-Vietoris pour $\mathcal{U}$ s'écrit :

$$(3.3.1)\quad 0 \to H^0(S, \mathcal{O}) \to H^0(S\backslash\Sigma, \mathcal{O}) \oplus H^0(N, \mathcal{O}) \to H^0(N^+, \mathcal{O}) \oplus H^0(N^-, \mathcal{O}) \xrightarrow{a} H^1(S, \mathcal{O}) \to \cdots$$

où a admet la factorisation :

$$a : H^0(N^+, \mathcal{O}) \oplus H^0(N^-, \mathcal{O}) = Z^1(\mathcal{U}, O) \to H^1(\mathcal{U}, O) \subset H^1(S, \mathcal{O}).$$

Supposons que $H^1(\mathcal{U}, O) = 0$: alors $a = 0$ et (3.3.1) donne

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to H^0(S, \mathcal{O}) \to & H^0(S\backslash\Sigma, \mathcal{O}) \oplus H^0(N, \mathcal{O}) & \xrightarrow{s} & H^0(N^+, \mathcal{O}) \oplus H^0(N^-, \mathcal{O}) \to 0 \\ & (f, g) & \to & \big((f-g)_{|N^+}, (f-g)_{|N^-}\big) \end{array}$$

où $H^0(S, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. Soit $h \in \mathbb{C}^*$, d'après (3.3.2), il existe $f \in \mathcal{O}(S\backslash\Sigma)$ et $g \in \mathcal{O}(N)$ tel que $(h, 0) = s(f, g)$. Cela signifie que f et g se recollent

sur N^- pour donner une fonction holomorphe $k \in \mathcal{O}(A')$, qui vérifie la condition $k_{|N^+} - k \circ \tilde{g}_{|N^+} = h$. La fonction $a(z) = \exp(2i\pi k(z)/h)$ est une fonction holomorphe sur S, donc est constante, ainsi que k, ce qui donne une contradiction. On a donc $H^1(\mathcal{U}, O) = H^1(S, \mathcal{O})$ et l'application a est surjective pour donner en définitive la suite exacte

$$(3.3.3)\quad 0 \to H^0(S,\mathcal{O}) \to H^0(S\backslash\Sigma,\mathcal{O}) \oplus H^0(N,\mathcal{O}) \xrightarrow{s} H^0(N^+,\mathcal{O}) \oplus H^0(N^-,\mathcal{O}) \xrightarrow{a} H^1(S,\mathcal{O}) \to 0.$$

On vérifie comme nous venons de le faire que la classe $[(1,0)]$ engendre $H^1(S,\mathcal{O})$. D'autre part si h est non constante sur N^+, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $[(h,0)] = \lambda[(1,0)]$, donc il existe (f,g) tel que $s(f,g) = (h-\lambda, 0)$ ce qui donne comme avant par recollement une fonction holomorphe $k \in \mathcal{O}(A')$ telle que sur N^+ on ait $h - \lambda = k - k \circ \tilde{g}$.

3) Considérons maintenant (S_n, Π_n, S) le revêtement à n feuillets de S. D'après [4], p. 461, S_n est encore de la classe VII_0 de Kodaira, en particulier $h^1(S_n, \mathcal{O}) = 1$. On peut recouvrir S_n par le recouvrement $\mathcal{U}_n = \{N, S_n\backslash\Sigma\}$ ou par $\mathcal{U}'_n = \Pi_n^{-1}(\mathcal{U})$ et d'après 1) $H^1(\mathcal{U}_n, \mathcal{O}) = H^1(S_n, \mathcal{O})$. Nous allons voir que pour tout n, on a dans $H^1(\mathcal{U}_n, \mathcal{O})$, $[(h,0)] = \lambda[(1,0)]$, λ étant indépendant de n : il existe donc une suite $k_n \in \mathcal{O}(X'_n)$ pour laquelle $h - \lambda = k_n - k_n \circ \tilde{g}^{n+1}$. En effet soit $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que dans $H^1(\mathcal{U}_n, \mathcal{O})$ on ait $[(h,0)] = \lambda_n[(1,0)]$. Par l'isomorphisme de raffinement $H^1(\mathcal{U}_n, \mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{U}'_n, \mathcal{O})$ on voit que dans $H^1(\mathcal{U}'_n, \mathcal{O})$, $[(h,0,...,0)] = \lambda_n[(1,0,...,0)]$. D'autre part, notons $h_j = (0,...,0,h,0,...,0)$ le 2n-uplet où h se trouve à la (2j+1)-ième place. S'il est vrai que pour tout j, $(1 \leq j \leq n)$, $[h_j] = [h_1]$, alors

$$(3.3.4)\qquad [(h,0,h,0,\dots h,0)] = \sum_{j=0}^{n-1} [h_j] = n[(h,0,\dots 0)]$$

en particulier $[(1,0,1,0,...,1,0)] = n[(1,0,...,0)]$. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & \mathbb{C} & & \\
 & & & & & & \uparrow \cong & & \\
\dots \to & \oplus_j \Big(H^0(N_j^+, \mathcal{O} & \oplus & H^0(N_j^-, \mathcal{O}) \Big) & \to & H^1(\mathcal{U}'_n, \mathcal{O}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & & \uparrow & & & \\
\dots \to & H^0(N^+, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}) & \oplus & H^0(N^-, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}) & \to & H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}) & \to & 0 \\
 & & & & & \uparrow \cong & & & \\
 & & & & & \mathbb{C} & & &
\end{array}$$

montre enfin que $[(h,0,h,0,...,h,0)] = \lambda_1[(1,0,...,1,0)]$, ce qui donne finalement $\lambda_n[(1,0,...,0)] = [(h,0,...,0)] = 1/n[(h,0,...,h,0)] = \lambda_1/n[(1,0,...,1,0)] = \lambda_1[(1,0,...,0)]$ c'est-à-dire $\lambda := \lambda_1 = \lambda_n$. Il reste à montrer (3.3.4) : pour ceci, soit μ tel que $[h_1] = \mu[h_0]$. Puisque $(\tilde{g}^*)^j(h_0) = h_j = \mu^j h_0$,

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1}\mu^j\right)[h_0] = \sum_{j=0}^{n-1}[h_j] = [(h,0,\ldots,h,0)]$$

$$= \tilde{g}^*[(h,0,\ldots,h,0)] = \mu\left(\sum_{j=0}^{n-1}\mu^j\right)[h_0]$$

donc $\mu = 1$ ou $\sum \mu^j = 0$. Supposons que cette dernière éventualité soit vérifiée; on a donc $[(h,0,...,h,0)] = 0$. Puisque $H^1(S,\mathcal{O}) \simeq H^1(S,\mathbb{C})$ on peut représenter $[(h,0)]$ par une 1-forme différentielle ω qui vérifie $[\Pi_n^*(\omega)] = 0$; il existe donc une fonction h sur S_n telle que $\Pi_n^*(\omega) = dh$. La fonction h n'est a priori pas invariante par l'automorphisme du revêtement $\tilde{g}^*$, cependant puisque pour tout j, $\Pi_n^*(\omega) = d[(\tilde{g}^*)^j h]$, la fonction

$$H = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\tilde{g}^*)^j h$$

vérifie $\Pi_n^*(\omega) = dH$, où maintenant H est invariante et donc définit une fonction w sur S qui vérifie $\omega = dw$, donc $[\omega] = 0$ ce qui est faux.

4) On note $\mathcal{A}_0(X_n)$ le sous-espace fermé de $\mathcal{A}(X_n)$ des fonctions continues sur l'adhérence de X_n dans X_n', holomorphes sur X_n et s'annulant en un point $\tilde{g}^n(P)$ où P est un point fixé de A_0 . L'application linéaire continue

$$\begin{array}{rccc} \tilde{g}^* : & \mathcal{A}_0(X_n) & \to & \mathcal{A}_0(X_{n-1}) \\ & f & \mapsto & f\circ\tilde{g} \end{array}$$

est de norme $\| \tilde{g}^* \| < 1$. En effet, supposons qu'il existe une suite (φ_m) de fonctions vérifiant

$$\| \varphi_m \| = 1, \qquad 1 - 1/m \leq \| \tilde{g}^*(\varphi_m) \| \leq 1.$$

On peut supposer quitte à prendre une sous-suite, que (φ_m) converge vers φ qui vérifie $\| \varphi \| = \| \varphi\circ\tilde{g} \| = 1$, donc φ est constante d'après le lemme 3.1 ce qui est impossible puisque φ doit s'annuler.

5) Quitte à rajouter une constante à k_n on peut supposer que $k_n \in \mathcal{A}_0(X_n)$. On a donc d'après 3) et 4)

$$\| k_n \| \leq \frac{\| h \| + | \lambda |}{1 - \| \tilde{g}^* \|^{n+1}}.$$

Quitte à restreindre N, on peut supposer que h est bornée sur N, il existe donc une sous-suite convergente de (k_n), qu'on note encore (k_n). Si $k \in \mathcal{O}(X')$ est la limite, elle vérifie grâce au lemme 3.2.i), $h - \lambda = k - k(\hat{O})$ ce qui donne le prolongement cherché de h. □

On considère maintenant la relation d'équivalence sur X

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{O}(X) \quad \text{on a } f(x) = f(y).$$

D'après [5], p. 222, il existe un entier m, $m \leq 5$, et une application holomorphe $F = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{C}^m$ telle que $x \sim y$ si et seulement si $F(x) = F(y)$. Le lemme 3.2. montre que F admet une limite en $\hat{O}$ et nous pouvons supposer que $F(\hat{O}) = 0$.

On supposera dans la suite que l'entier m est le plus petit possible.

LEMME 3.4. — *Soit $G : X \to \mathbb{C}^p$ une application analytique de rang 1. Alors les fibres de G n'ont aucune composante connexe compacte.*

Démonstration. — Soit $\zeta \in G(X)$, et supposons que $G^{-1}(\zeta)$ ait une composante connexe de dimension 1 compacte $\Gamma = \cup \Gamma_i$ où les Γ_i sont irréductibles. Considérons les différents cas suivants :

i) Il existe deux indices j et k et un entier q tels que $\tilde{g}^q(\Gamma_j) \bigcap \Gamma_k \neq \varnothing$. Dans cette hypothèse $\tilde{g}^q(\Gamma) \bigcap \Gamma \neq \varnothing$, et $\tilde{g}^q(\Gamma) \subset G^{-1}(\zeta)$ donc pour tout $p \geq 1$, $\tilde{g}^{pq}(\Gamma) \bigcap g^{(p-1)q}(\Gamma) \neq \varnothing$ et $\bigcup g^{pq}(\Gamma) \subset \Gamma$, par conséquent Γ ne serait pas compacte.

ii) D'après i), $\tilde{\omega} : X \to S$ est injective sur Γ donc la matrice d'intersection de Γ, $M(\Gamma) = M(\tilde{\omega}(\Gamma))$ est semi-définie négative. S'il existe un diviseur $D \neq 0$ tel que $D^2 = 0$, S contient une coquille sphérique globale d'après [4] et Γ n'est pas compacte puisque dans le revêtement universel de S la réunion des courbes compactes est connexe [2]. On peut donc supposer que $M(\Gamma)$ est définie négative, et donc Γ a un système fondamental de voisinages strictement pseudoconvexes et si V est un tel voisinage assez petit, Γ est le sous-ensemble analytique compact maximal de dimension 1 de V. Choisissons une suite (z_n) de $V \backslash \Gamma$ qui converge vers $\Gamma : G^{-1}(G(\zeta_n))$

est une courbe non compacte qui rencontre ∂V en un point v_n. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que (v_n) converge vers un point $v \in \partial V$, mais alors $v \in G^{-1}(G(\Gamma))$ ce qui est impossible. □

LEMME 3.5. — *Soit S une surface compacte sans fonctions méromorphes non constantes pour laquelle $b_1(S) = 1$. Alors, avec les notations précédentes,*

$$F = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{C}^m$$

n'est pas de rang 1.

Démonstration. — Supposons que F soit de rang 1. D'après le lemme 3.2, F a une limite en $\hat{O}$ qu'on peut supposer être 0. Supposons $F^{-1}(0)$ non vide et soit Γ une composante connexe de $F^{-1}(0)$; elle est non compacte d'après le lemme 3.4. Supposons que $\hat{O}$ ne soit pas dans l'adhérence de Γ, alors Γ rencontre Σ. Il ne peut exister qu'un nombre fini de telles composantes, donc il existe $p \geq 0$ tel que en restreignant F à X^p, toute composante connexe de $(F_{|X_p})^{-1}(0)$ ait $\hat{O}$ dans son adhérence. Comme X^p est isomorphe à X, une telle composante Γ n'existe pas. Comme $\hat{O}$ est un point fixe du prolongement continu de $\tilde{g}$, on a $\tilde{g}(F^{-1}(0)) \subset F^{-1}(0)$. Considérons maintenant une composante connexe Γ de $F^{-1}(\zeta)$ où $\zeta \neq 0$. Puisque F est continue en $\hat{O}$ d'après le lemme 3.2 , Γ doit rencontrer Σ, par conséquent toute fibre non vide rencontre Σ. Par le théorème des images semi-propres [11], $Y = F(X)$ est un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Remarquons enfin que puisque X est une variété, quitte à normaliser Y, on peut supposer que Y est régulière. L'application $g : Y \to Y$ définie pour tout $y \in Y$ par $g(y) = F(\tilde{g}(F^{-1}(y))$ est holomorphe, a 0 comme point fixe et est contractante, puisque $F(X^p) \subset\subset F(X^{p-1})$ et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{g}} & X \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Quitte à restreindre on peut supposer que Y est un ouvert de $\mathbb{C}$, et si $t = g'(0)$ on a $\mid t \mid < 1$. Il existe $s \in \mathcal{O}(Y)$ tel que $g^* s = s \circ g = ts$ [2], p. 68, c'est-à-dire t est une valeur propre de g^* ; c'est donc aussi une valeur propre de $\tilde{g}^*$, on conclut donc par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.6. — *Si l'application $\tilde{g}^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$ a une valeur propre, alors S est une surface de Kato de trace $t(S)$ non nulle [2]*

("exceptional compactification" dans la terminologie de [4]), et son spectre est $\{t(S)^p, p \geq 1\}$. *En particulier* S *contient une coquille sphérique globale et* $F : X \to \mathbb{C}^m$ *est de rang 2.*

Démonstration. — Si f est une fonction propre associée à la valeur propre t, $\{f = 0\}$ induit sur S un diviseur D dont le fibré associé [3] est plat, en particulier $D^2 = 0$. D'après [4], Proposition 8.5, S est isomorphe à une surface $S_{n,t,a}$ et d'après [4], (8.10), $S_{n,t,a}$ contient une coquille sphérique globale et est associée (cf. [2]) à l'application $F : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, où en notant $n = b_2(S)$, et $t = t(S)$,

$$F(z_1, z_2) = \left(z_1 z_2^n + \sum_0^{n-1} \alpha_k z_2^k, t z_2 \right).$$

En fait $F = F_C$ est le germe associé à une courbe du revêtement universel de S et avec les notations de [2]

$$F = F_C : \left(\hat{S}_C, \hat{O}_C\right) \to \left(\hat{S}_C, \hat{O}_C\right) \quad \text{avec} \quad \hat{O}_C = (\alpha_0, 0).$$

Si on remplace F_C par F_{C-1} [2], p. 32 où $\Pi \circ F_C = F_{C-1} \circ \Pi$, un rapide calcul où $\Pi(u, v) = (uv, v)$ montre que

$$F_{C-1}(z_1, z_2) = \left(t z_1 z_2^n + \sum_1^n t \alpha_{k-1} z_2^k, t z_2 \right).$$

L'existence d'une fonction propre associée à une valeur propre t' est équivalente à l'existence d'une fonction h au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ qui vérifie la condition $ho F_{C-1} = t'h$. Un rapide calcul montre que $t' = t(S)^p$, $p \geq 1$, de vecteur propre $h_p(z) = \lambda z_2^p$. □

LEMME 3.7. — *Soit* $f \in \mathcal{O}(X)$ *telle que* $f(\hat{O}) = 0$. *Alors* f *s'annule sur* X *et* $H = f^{-1}(0)$ *rencontre* ∂X.

Démonstration. — Si f ne s'annule pas sur N, on a quitte à restreindre N, $M = \| 1/f \|_N < \infty$. D'après la proposition 3.3. $g = 1/f$ se prolonge à tout X et $\| g \|_X \leq \| 1/f \|_N \leq M$. Par conséquent f ne s'annule pas sur X et $| f(z) | > 1/M$ pour tout $z \in X$, donc $f(\hat{O}) \neq 0$. □

LEMME 3.8. — *Soit* Γ *une courbe irréductible de* X *telle que* $\hat{O}$ *soit adhérent à* Γ. *Si* Γ *ne rencontre pas* N *alors* $\Gamma \subset F^{-1}(0)$.

Démonstration. — Principe du maximum appliqué à $F_{|\Gamma}$. □

LEMME 3.9. — *Si la surface X contient des courbes compactes elles sont nécessairement rationnelles et non singulières.*

Démonstration. — Soit Γ une courbe compacte de X et n tel que Γ soit contenue dans la réunion de n anneaux A_i. Quitte à remplacer S par un revêtement à n feuillets, on peut supposer que $\tilde{\omega} : X \to S$ est un isomorphisme au voisinage de Γ. D'après [12], (2.2.2), Γ est soit rationnelle non singulière, soit rationnelle avec un point double ordinaire, soit elliptique. Si Γ était rationnelle singulière ou elliptique, les courbes $\tilde{g}^p(\Gamma)$, $(p \geq 0)$, seraient du même type. Un revêtement S_n de S à n $(n \geq 3)$ feuillets contiendrait alors n courbes rationnelles singulières ou n courbes elliptiques disjointes. Le premier cas est impossible d'après [12], (2.2.1) et (2.7), le second parce que S_n serait une surface de Hopf elliptique. □

Nous avons vu que F est de rang 2, donc $\{z \in X \mid \dim_z F^{-1}(F(z)) > 0\}$ est un sous-ensemble analytique propre dont chaque composante irréductible est de dimension 1.

LEMME 3.10. — *Supposons que* $Z := \{z \in F^{-1}(0) \mid \dim_z F^{-1}(F(z)) > 0\}$ *soit non vide, alors Z a les propriétés suivantes :*

1) *Z est invariante par $\tilde{g}$, en particulier elle induit des courbes sur S;*

2) *Si S ne contient pas de courbe elliptique :*

i) *les composantes irréductibles compactes de Z sont des courbes rationnelles non singulières;*

ii) *toute composante connexe de Z est non compacte;*

iii) *Z a une ou deux composantes connexes qui contiennent $\hat{O}$ dans leur adhérence; si Z en a deux, alors S est une surface d'Inoue-Hirzebruch, en particulier contient une C.S.G.; si Z n'en a qu'une, S contient un cycle de courbes rationnelles.*

Démonstration. — 1) $F^{-1}(0)$ est stable par $\tilde{g}$: En effet, soit $z \in X$ et supposons que $\tilde{g}(z) \notin Z$; si $F = (f_1, ..., f_m)$ il existe i tel que $f_i(\tilde{g}(z)) \neq 0$. Notons $g = f_i \circ \tilde{g}$; comme $g(\hat{O}) = 0$ et $g(z) \neq 0$, $z \notin F^{-1}(0)$. Par conséquent Z est stable et induit des courbes sur S.

2) On va voir que Z ne contient pas de composante connexe compacte : en effet soit Γ une telle composante; on a $\tilde{g}(\Gamma) \cap \Gamma = \varnothing$, donc Z contient une suite (Γ_k) de composantes compactes, $\Gamma_k = \tilde{g}^k(\Gamma)$. Fixons i, $1 \leq i \leq m$, et soit $Z_i = f_i^{-1}(0)$. D'après le lemme 3.4 Z_i n'a pas de composante

connexe compacte. Comme Z_i contient les Γ_k, Z_i contient des composantes irréductibles "entre" Γ_k et Γ_{k+1} nécessairement non compactes (sinon elles seraient dans Z et donc dans Γ). Soit E_k une telle composante : E_k doit rencontrer N, sinon, étant non compacte elle doit contenir $\hat{O}$ dans son adhérence et d'après le lemme 3.8, E_k serait dans Z. De plus $E_k \subset Z_i$, donc seul un nombre fini de E_k sont distincts, c'est à dire il existe une composante irréductible non compacte E dans Z_i qui rencontre une infinité de Γ_k ainsi que N. Remarquons que $\hat{O} \in \bar{E}$ et E n'est pas contenu dans Z, on peut donc choisir une boule B centrée en $0 \in \mathbb{C}^n$ telle que $F^{-1}(\partial B) \cap E \cap Z = \varnothing$. Dans ces conditions l'application $F_{|E\setminus F^{-1}(0)} : F^{-1}(B) \cap E \setminus F^{-1}(0) \to B\setminus\{0\}$ est une application propre, donc un revêtement ramifié, disons à p feuillets, sur une courbe E' qui se prolonge à travers 0. On obtiendrait finalement une application $F : F^{-1}(B) \cap E \to E'$ surjective qui est un revêtement à p feuillets en dehors de $\{0\}$ et dont la fibre au-dessus de 0 contient une infinité de points. On voit facilement que c'est impossible.

3) Si Z est non vide, Z doit contenir au moins une composante connexe qui contient $\hat{O}$ dans son adhérence, puisque Z est invariant par $\tilde{g}$ et d'après 2). Supposons que Z ne contienne qu'une composante connexe ayant $\hat{O}$ dans son adhérence. Comme S ne contient qu'un nombre fini de courbes, Γ induit dans S un cycle de courbes rationnelles d'après le lemme 3.9.

4) Supposons que Z soit la réunion de $p \geq 2$ composantes connexes. L'application $\tilde{g}$ définit une permutation de l'ensemble $\{\Gamma_1 \ldots, \Gamma_p\}$. Si k est l'ordre du groupe engendré par $\tilde{g}$, on a $\tilde{g}^k(\Gamma_i) = \Gamma_i$ pour tout i, donc dans le revêtement à k feuillets de S, il y aurait p cycles de courbes rationnelles. D'après [12], (2.2.1) et (2.7), $p = 2$ et [12], (8.1), nous montre que S est une surface d'Inoue-Hirzebruch (hyperbolique ou "half" dans la terminologie de [12]) et donc contient une C.S.G. d'après [3], 3.9. □

3.11. *Démonstration du théorème principal.* — a) Puisque $\mathcal{O}(N) \neq \mathbb{C}$, l'application $F : X \to \mathbb{C}^m$ est de rang 2 d'après le lemme 3.5. Si Z est vide, $F^{-1}(0)$ ne contient que des points isolés, on peut donc supposer que $F^{-1}(0) \cap N = \varnothing$. Si Z n'est pas vide, mais $\mathcal{O}(N)$ contient des fonctions non constantes sur les composantes irréductibles de $D \cap N$, $F^{-1}(0)$ ne rencontre pas N. Dans tous les cas, soit $\varepsilon > 0$ le minimum de $\| F \|$ sur Σ et soit B une boule centrée en $0 \in \mathbb{C}^m$ de rayon r, $r < \varepsilon$. L'application $F : F^{-1}(B)\setminus F^{-1}(0) \to B\setminus\{0\}$ est propre de rang 2, donc a pour image un sous-ensemble analytique Y de $B\setminus\{0\}$ de dimension 2,

qui admet un prolongement en 0, encore noté Y, d'après le théorème de Remmert-Stein. Soit p le nombre de feuillets du revêtement ramifié. On peut mettre sur $X \cup \{\hat{O}\}$ une structure d'espace analytique de sorte que $\left(F^{-1}(B) \cup \{\hat{O}\}, F, Y\right)$ soit un revêtement ramifié à p feuillets. Comme Y est un espace de Stein, $F^{-1}(B) \cup \{\hat{O}\}$ aussi . Pour n assez grand $\tilde{g}^n(\Sigma)$ est le bord d'un ouvert relativement compact à bord s.pc., donc un espace de Stein, ce qui montre que Σ est le bord d'un espace de Stein. Comme d'après l'hypothèse S n'est pas une surface elliptique, compte-tenu de [7] , de la remarque 3) qui suit l'énoncé du théorème principal, on obtient 2).

b) Supposons maintenant que $b_2(S) > 0$. Si S contient une courbe elliptique, alors S contient un cycle de courbes rationnelles d'après [12], (10.1). Si S ne contient pas de courbe elliptique et Z est vide, d'après a), Σ est le bord d'un espace de Stein, donc puisque $b_2(S) > 0$, S contient une coquille sphérique globale, en particulier S contient un cycle de courbes rationnelles (voir [2]) et donne une contradiction. Enfin, si S n'a pas de courbe elliptique et Z est non vide, on conclut par le lemme 3.10. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI and Y-T SIU, Projective embedding of pseudo-concave spaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 24 (1970), 231-278.

[2] G. DLOUSSKY, Structure des surfaces de Kato, Mémoire de la S.M.F., n° 14 (1984).

[3] G. DLOUSSKY, Une construction élémentaire des surfaces d'Inoue-Hirzebruch, Math. Ann., 280 (1988), 663-682.

[4] I. ENOKI, Surfaces of class VII_0 with curves, Tôhoku Math. J., 33 (1981), 453-492.

[5] R.C. GUNNING, H. ROSSI, Analytic functions of several variables, Prentice-Hall, 1965.

[6] G.M. HENKIN, J. LEITERER, Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas, Mathematical Research, Vol. 43, Akademie-Verlag-Berlin (1988).

[7] Masahide KATO, Compact complex surfaces containing global strongly pseudoconvex hypersurfaces, Tôhoku Math. J., vol. 31 (1979), 537-547.

[8] L. KAUP, B. KAUP, Holomorphic Functions of several variables, W. de Gruyter, 1983.

[9] H. KERNER, Űberlagerungen und Holomorphiehűllen, Math. Ann., 144 (1961), 126-134.

[10] K. KODAIRA, On the structure of compact complex analytic surface. I, Am. J. of Math., 86 (1964), 751-798.

[11] N. KUHLMANN, Űber holomorphe Abbildungen komplexer Raűme, Arch. der Math., 15 (1964), 81-90.

[12] Iku NAKAMURA, On surfaces of class VII_0 with curves, Invent. Math., 78 (1984), 393-443.

[13] H. ROSSI, Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary. Proc. of the Conference on complex Analysis. Minneapolis 1964, Springer-Verlag (1964).

Manuscrit reçu le 10 juin 1992,
révisé le 5 mai 1993.

Georges DLOUSSKY,
CIMPA
Avenue Edith Cavell
F-06000 Nice.