ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

D. BRANDT
JEAN-CLAUDE HAUSMANN

# Théorie de jauge et symétries des fibrés

*Annales de l'institut Fourier*, tome 43, n° 2 (1993), p. 509-537
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_2_509_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**43**, 2 (1993), 509-537

# THÉORIE DE JAUGE ET SYMÉTRIES DES FIBRÉS

**par D. BRANDT et J.-C. HAUSMANN**

## 1. Présentation des résultats.

Soit $G$ un groupe de Lie compact. Soit $\xi = (P \xrightarrow{p} M)$ un fibré principal (différentiable $C^\infty$) de groupe structural $G$ sur $M$. La variété $P = P(\xi)$ (l'espace total de $\xi$) est donc munie d'une $G$-action libre à droite dont l'espace des orbites s'identifie à la variété $M$. On supposera que $M$ est connexe.

Supposons que la variété $M$ est munie d'une action (à gauche) d'un groupe de Lie compact $\Gamma$. On dit qu'une telle action **provient** d'une **action sur le fibré** $\xi$ (ou qu'elle **se relève** en une action sur $\xi$) s'il existe une action de $\Gamma$ sur $P$ telle que

$$p(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot p(x) \quad \text{et} \quad \gamma \cdot (x \cdot g) = (\gamma \cdot x) \cdot g$$

pour tout $x \in P, \gamma \in \Gamma$ et $g \in G$. Cet article est consacré au problème suivant : étant donné une action sur $M$, à quelle(s) condition(s) provient-elle d'une action sur $\xi$ ? Les résultats antérieurs sur le sujet (voir [St], [PS], [HY] et [LMS]) concernent presque exclusivement le cas $G$ abélien et, comme leurs auteurs ont considéré des fibrés sur des CW-complexes, leurs conditions sont de nature homotopique. Tirant avantage de la catégorie différentiable, l'originalité de notre travail consiste en l'apparition de conditions de type "théorie de jauge", comme la condition (C3) ci-dessous. On obtient ainsi une réponse complète au problème dans le cas $G$ abélien

*Mots-clés :* Théorie de jauge – Actions différentiables – Fibrés.
*Classification A.M.S. :* 57S15 – 55R10 – 53C05 – 58D29.

et dans le cas où l'action sur $M$ a un point fixe. Des conditions suffisantes sont également présentées pour le cas général.

L'action de $\Gamma$ sur $M$ détermine un homomorphisme $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$, où $\mathrm{Aut}(M)$ désigne le groupe des self-difféomorphismes de $M$. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, nous pratiquerons, pour $\gamma \in \Gamma$, l'abus de notation $\gamma = \alpha(\gamma) : M \longrightarrow M$. En particulier, on peut parler du fibré induit $\gamma^*\xi$. La condition (C1) s'écrit :

(C1) *L'action de* $\Gamma$ *sur* $M$ *préserve le fibré* $\xi$ c'est-à-dire : $\gamma^*\xi$ *est isomorphe à* $\xi$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$.

*C'est évidemment une condition nécessaire pour relever l'action en une action sur* $\xi$. *Observons que (C1) est toujours vérifiée si* $\Gamma$ *est connexe, cas qui sera le nôtre la plupart du temps.*

*Pour exprimer la condition (C2), choisissons des points-base* $* \in M$ *et* $\tilde{*} \in P_* = p^{-1}(\{*\})$. *Définissons l'application* **évaluation** $e : \Gamma \longrightarrow M$ *par* $e(\gamma) = \gamma \cdot *$.

(C2) *L'application évaluation admet un relèvement différentiable* $\tilde{e}$ : $\Gamma \longrightarrow P$ *tel que* $\tilde{e}(1) = \tilde{*}$.

La nécessité de (C2), essentiellement dégagée dans [St], est facile : si l'on dispose d'une action de $\Gamma$ sur $P$ recouvrant celle sur $M$, on pose $\tilde{e}(\gamma) = \gamma \cdot \tilde{*}$. Puisque $M$ est connexe, le fait que (C2) soit vraie ou pas ne dépend pas du choix de $* \in M$ (les différents choix donnant des évaluations homotopes). La condition (C2) est donc vérifiée si, par exemple, l'action de $\Gamma$ sur $M$ admet un point fixe. Le fibré de Hopf sur $S^2$, avec l'action standard de $SO_3$ est un exemple où (C2) n'est pas vérifiée (voir § 6). Un autre exemple élémentaire où (C2) n'est pas vérifiée est le revêtement $\mathbb{R} \to S^1$ et l'action de $S^1$ sur lui-même par multiplication.

Notre troisième condition nécessaire est de type "théorie de jauge". Dénotons par $\mathcal{A}$ l'espace des connexions sur $\xi$ et par $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(\xi)$ le **groupe de jauge** de $\xi$. Le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ est noté $\mathcal{B}$. Supposons que l'action de $\Gamma$ sur $M$ préserve $\xi$. Pour chaque $\gamma \in \Gamma$ on peut donc choisir (de manière *a priori* non-continue) un élément $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Aut}_G(P)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & P \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array} \tag{1.1}$$

commute. Deux tels $\tilde{\gamma}$ diffèrent par un élément de $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{G}$ est invariant dans $\mathrm{Aut}_G(P)$, ceci permet d'induire une action à droite :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \times \Gamma & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} \\ ([A], \gamma) & \mapsto & [\tilde{\gamma}^* A] \end{array} \tag{1.2}$$

Bien que la correspondance $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ soit *a priori* non-continue, on vérifie que l'action $\beta$ est continue (voir (2.17)). Considérons la condition :

(C3) *L'action $\beta$ sur $\mathcal{B}$ admet un point fixe.* La condition (C3) est réalisée si l'action de $\Gamma$ sur $M$ provient d'une action sur $\xi$ car, par un argument de moyenne, on trouvera une connexion $\Gamma$-invariante (voir (2.17)). Notre résultat général, dans le cas où $G$ est abélien, est le suivant :

(1.3) THÉORÈME A. — *Supposons que $G$ est abélien et que $\Gamma$ est connexe. Alors, une action de $\Gamma$ sur $M$ provient d'une action sur $\xi$ si et seulement si elle satisfait aux conditions C(2) et C(3).*

L'étude de l'espace $\mathcal{B}$ permet d'appliquer le théorème A en trouvant des conditions sur $\Gamma$ ou sur $M$ qui garantissent la condition (C3). Le théorème A1 ci-dessous en fournit un exemple, dans le cas où $G$ est connexe (si $G$ est abélien, cela implique que $G = \mathbb{T}^k$, le tore de dimension $k$). On dénote par $b_1(M)$ le premier nombre de Betti de $M$.

(1.4) THÉORÈME A1(*). — *Supposons que $G = \mathbb{T}^k$ et que $\Gamma$ est connexe. Supposons que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :*

a) $\pi_1(\Gamma)$ *est fini*

b) $b_1(M) = 0$.

(*) N.B. M. Furuta a récemment généralisé le théorème A1 de la façon suivante : si $G = T^k$ et $\Gamma$ est connexe, la condition (C3) est équivalente à la nullité de la composition :

$$H_1(\Gamma; \mathbf{R}) \otimes H_1(M; \mathbf{R}) \to H_2(\Gamma \times M; \mathbf{R}) \to H_2(M; \mathbf{R}) \xrightarrow{c_1(\xi)} \mathbf{R}.$$

*Alors, toute action de $\Gamma$ sur $M$ satisfait à la condition (C3).*

On peut illustrer le théorème A1 dans le cas où $\Gamma = S^1$. La condition (C2) est toujours vraie puisque $\mathbb{T}^k$ est connexe. On a donc, grâce au théorème A :

(1.5) COROLLAIRE. — *Si $G = \mathbb{T}^k$ et $b_1(M) = 0$, toute $S^1$-action sur $M$ provient d'une action sur $\xi$.*

La donnée d'une action de $S^1$ sur une variété est équivalente à la donnée d'un champ de vecteurs dont toutes les trajectoires sont fermées. Le corollaire (1.5) se paraphrase donc en :

(1.6) COROLLAIRE. — *Soit $\xi$ un fibré principal de groupe structural $\mathbb{T}^k$ sur une variété $M$ telle que $b_1(M) = 0$. Soit $X$ un champ de vecteurs sur $M$ dont toutes les trajectoires sont fermées. Alors il existe un champ de vecteurs $G$-équivariant $\tilde{X}$ sur $P$, tel que $T_x p(\tilde{X}_x) = X_{p(x)}$ et $\tilde{X}$ a toutes ses trajectoires fermées.*

Quant à la condition (C2), si $G = \mathbb{T}^k$, l'unique groupe d'obstruction à l'existence d'un relèvement $\tilde{e}$ est $H^2(\Gamma; \pi_1(\mathbb{T}^k))$. Il est classique que $\pi_2(\Gamma) = 0$ pour $\Gamma$ compact. Si $\Gamma$ est simplement connexe, on aura donc $H^2(\Gamma; \pi_1(\mathbb{T}^k)) = 0$ ce qui donne le corollaire suivant des théorèmes A et A1 (à comparer avec [St], théorème (4.1) et [PS], § 12) :

(1.7) COROLLAIRE. — *Supposons que $G = \mathbb{T}^k$ et que $\Gamma$ est connexe et simplement connexe. Alors, toute $\Gamma$-action sur $M$ provient d'une action sur $\xi$.*

Le cas $G$ non-abélien est plus délicat, les conditions (C1), (C2) et (C3) ne sont en général pas suffisantes pour que l'action de $\Gamma$ sur $M$ provienne d'une action sur $\xi$ (voir exemple (6.7)). Les théorèmes B et C ci-dessous sont des extensions dans des cas particuliers du théorème A obtenues en renforçant la condition (C3).

Supposons, comme précédemment, que l'action de $\Gamma$ préserve $\xi$ et admette un relèvement $\tilde{e}$ de l'application évaluation. Choisissons, pour chaque $\gamma \in \Gamma$ un élément $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Aut}_G(P)$ faisant commuter le diagramme (1.1). Lorsque $G$ est connexe, $\mathcal{G}$ agit transitivement sur $P_*$ (c'est aussi le cas si $G$ est abélien ; voir (2.9)) et l'on peut donc toujours supposer que $\tilde{\gamma}(*) = \tilde{e}(\gamma)$. Deux tels automorphismes $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ satisferont à une équation du type $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \circ \mu$, avec $\mu \in \mathcal{G}_1 := \{\chi \in \mathcal{G} \mid \chi(*) = *\}$. Ceci permet de relever l'action $\beta$ de (1.2) en une application (*a priori* non-continue) $\tilde{\beta}_1(\tilde{e}) : \mathcal{A} \times \Gamma \to \mathcal{B}_1$ dépendante de $\tilde{e}$, où $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}/\mathcal{G}_1$.

Envisageons d'abord le cas où l'action de $\Gamma$ sur $M$ admet un point fixe (on suppose alors que $\gamma \cdot * = *$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et l'application $e$ est donc constante). Le choix de $\tilde{*}$ identifie la fibre $P_*$ avec $G$ et on peut donc voir $\tilde{e}$ comme une application différentiable de $\Gamma$ dans $G$. Les éléments $\tilde{\gamma}$ sont dans le sous-groupe $\{\mu \in \mathrm{Aut}_G P \mid \mu(P_*) = P_*\}$. Comme $\mathcal{G}_1$ est invariant dans ce dernier sous-groupe, l'application $\tilde{\beta}_1(\tilde{e})$ induit une application

$$\beta_1(\tilde{e}) \quad : \quad \mathcal{B}_1 \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{B}_1$$

qui relève l'action $\beta$. On vérifie facilement que $\beta_1(\tilde{e})$ est une action lorsque $\tilde{e}$ est un homomorphisme (ce qui est le cas si l'action de $\Gamma$ sur $M$ provient d'une action sur $\xi$). Comme pour $\beta$ on démontre que $\beta_1(\tilde{e})$ est continue (voir (2.17)). Nous montrerons le résultat suivant :

(1.8) THÉORÈME B. — *Supposons que l'action de $\Gamma$ sur $M$ satisfait à (C1) et admet un point fixe $* \in M$. On suppose que $G$ est connexe ou abélien (pas d'hypothèse sur $\Gamma$ autre que la compacité). Soit $\tilde{e} : \Gamma \longrightarrow G$ un homomorphisme différentiable. Alors, l'action de $\Gamma$ sur $M$ provient d'une action sur $\xi$ telle que $\gamma \cdot \tilde{*} = \tilde{*} \cdot \tilde{e}(\gamma)$ si et seulement si l'action $\beta_1(\tilde{e})$ admet un point fixe.*

Dans le cas $G$ abélien, on a $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ et $\beta_1(\tilde{e}) = \beta$ pour tout relèvement $\tilde{e}$ (voir (2.11)). Le théorème B devient :

(1.9) COROLLAIRE. — *Supposons que $G$ est abélien. Supposons que l'action $\alpha$ de $\Gamma$ sur $M$ satisfait aux conditions (C1) et (C3) et admet un point fixe $* \in M$. Soit $\tilde{e} : \Gamma \longrightarrow G$ un homomorphisme différentiable. Alors, $\alpha$ provient d'une action sur $\xi$ telle que $\gamma \cdot \tilde{*} = \tilde{*} \cdot \tilde{e}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

La liberté du choix de $\tilde{e}$ qui apparaît dans le corollaire (1.9) n'est pas conservée dans le cas où $G$ n'est pas abélien, comme le montre notre prochain résultat. Rappelons qu'une connexion est **irréductible** si son groupe d'holonomie est égal à $G$ (par exemple, si $\xi$ n'admet pas de réduction de son groupe structural à un sous-groupe propre de $G$, toute connexion est irréductible). Cette condition est invariante par transformation de jauge et l'on peut donc parler d'un "élément irréductible" de $\mathcal{B}$. Dénotons par $C(G)$ le centre du groupe $G$ et par $\overline{G}$ le quotient $G/C(G)$.

(1.10) THÉORÈME B1. — *Supposons que $G$ est connexe. Supposons que l'action $\alpha$ de $\Gamma$ sur $M$ satisfait à (C1) et admet un point fixe $* \in M$. Supposons que l'action $\beta$ associée à $\alpha$ admet un point fixe irréductible $B \in \mathcal{B}$. Alors, $B$ détermine une unique classe de conjugaison $e_B$*

*d'homomorphismes de* $\Gamma$ *dans* $\overline{G}$, *et, pour tout homomorphisme* $\tilde{e} : \Gamma \longrightarrow G$, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\beta_1(\tilde{e})$ *a un point fixe au dessus de* $B$.

2) $\tilde{e}$ *composé avec la projection* $G \longrightarrow \overline{G}$ *représente* $e_B$.

Les théorèmes B et B1 entraînent les deux corollaires suivants :

(1.11) COROLLAIRE. — *Supposons que* $G$ *est connexe et que* $C(G) = \{1\}$. *Supposons que l'action* $\alpha$ *de* $\Gamma$ *sur* $M$ *satisfait à (C1) et admet un point fixe* $* \in M$. *Supposons que l'action* $\beta$ *associée à* $\alpha$ *admet un point fixe irréductible* $B \in \mathcal{B}$. *Alors,* $\alpha$ *provient d'une action sur* $\xi$.

(1.12) COROLLAIRE. — *Supposons que* $G$ *est connexe, que* $C(G)$ *est fini et que* $\Gamma$ *est simplement connexe. Supposons que l'action* $\alpha$ *de* $\Gamma$ *sur* $M$ *satisfait à (C1) et admet un point fixe* $* \in M$. *Supposons que l'action* $\beta$ *associée à* $\alpha$ *admet un point fixe irréductible* $B \in \mathcal{B}$. *Alors,* $\alpha$ *provient d'une action sur* $\xi$.

Pour exprimer notre dernier résultat, on dira qu'une connexion sur $\xi$ est **co-abélienne** si le centralisateur dans $G$ de son groupe d'holonomie est abélien. Par exemple, une connexion irréductible est co-abélienne. Observons que la co-abélianité est une condition invariante sous l'action de $\mathcal{G}_1$. Notre résultat le plus général est le suivant :

(1.13) THÉORÈME C. — *Supposons que* $G$ *et* $\Gamma$ *sont connexes et que l'action de* $\Gamma$ *sur* $M$ *satisfait à la condition (C2). Soit* $\tilde{e} : \Gamma \longrightarrow P$ *un relèvement de l'application évaluation tel que* $\tilde{e}(1) = \tilde{*}$. *Supposons qu'il existe une connexion co-abélienne* $A$ *telle que, dans* $\mathcal{B}_1$, *on ait l'égalité* $\tilde{\beta}_1(\tilde{e})(A, \gamma) = [A]$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$. *Alors, l'action de* $\Gamma$ *sur* $M$ *provient d'une action sur* $\xi$.

En plus des résultats de cet article, il nous semble intéressant de mettre en évidence la possibilité d'étudier une action $\alpha$ sur une variété $M$ via l'information que porte la collection de toutes les actions $\beta = \beta(\xi)$ sur $\mathcal{B}(\xi)$ associées à $\alpha$ pour tous les fibrés principaux $\xi$ sur $M$. Ce point de vue est utilisé dans le récent travail de Shuguang Wang [Wa].

Le plan de cet article est le suivant : le § 2 contient les résultats de théorie de jauge dont nous avons besoin avec leur démonstration. Dans le § 3, on trouvera un lemme d'algèbre homologique différentiable conséquence du théorème classique de Van Est. Le § 4 est consacré à la preuve des théorème A, B, C, A1 et B1. Le § 5 est une parenthèse

où l'on présente l'idée d'une autre démonstration du théorème A1, de nature homotopique (sans théorie de jauge). Enfin, on trouvera dans le § 6 divers exemples illustrant nos théorèmes. D'autres applications feront l'objet d'une publication ultérieure.

## 2. Théorie de jauge : notations, rappels, etc.

Soit $\xi = (P \xrightarrow{p} M)$ un fibré principal de groupe structural $G$. La fibre $p^{-1}(\{x\})$ au-dessus de $x \in M$ sera notée $P_x$. L'action libre à droite de $G$ sur $P$ donne, pour $g \in G$, un difféomorphisme de $P$ dans $P$, $z \mapsto z \cdot g$ que nous noterons au besoin $R_g$.

Choisissons des points-base $* \in M$ et $\tilde{*} \in P_*$. Le choix de $\tilde{*}$ identifie le groupe structural $G$ à la fibre $P_*$ par $g \mapsto \tilde{*} \cdot g$.

(2.1) *Connexions.* — Une **connexion** sur $\xi$ est un sous-fibré vectoriel A du fibré $TP$ tangent à $P$ tel que $T_zP = T_zP_{p(z)} \oplus A_z$ et $A_{z\cdot g} = T_zR_g(A_z)$, pour tout $z \in P$ et $g \in G$ (voir [KN], chap. 2). On dit que $A_z$ est l'**espace horizontal** en z, formé des vecteurs tangents dits **horizontaux**. L'application tangente $T_zp$ envoie $A_z$ isomorphiquement sur $T_{p(z)}M$. L'espace des connexions sur $\xi$ est dénoté par $\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{A}(\xi)$).

(2.2) *Relevés horizontaux de chemins.* — Soit $A$ une connexion sur $\xi$ et soit $c : [0,1] \to M$ un chemin différentiable par morceaux. Soit $z \in P_{c(0)}$. Le **relevé horizontal** $\mathcal{R}^A(z,c)$ est l'unique chemin $\tilde{c} : [0,1] \to P$ tel que $\tilde{c}(0) = z$, $p \circ \tilde{c}(t) = c(t)$ et $\dot{\tilde{c}}(t)$ est horizontal partout où il est défini. On a la formule :

$$\mathcal{R}^A(z \cdot g, c) = R_g \circ \mathcal{R}^A(z,c). \tag{2.3}$$

Le **transport parallèle** le long du chemin $c$ pour la connexion $A$ est le difféomorphisme $\mathcal{T}_c^A : P_{c(1)} \longrightarrow P_{c(0)}$ défini par :

$$\mathcal{T}_c^A(z) := \mathcal{R}^A(z, c^{-1})(1)$$

où $c^{-1}$ est le chemin "inverse" de $c$ défini par $c^{-1}(t) = c(1-t)$. Si l'on fixe $A \in \mathcal{A}$ et que l'on abrège $\mathcal{T}_c^A$ en $\mathcal{T}_c$, on a les formules :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(z \cdot g) &= \big(\mathcal{T}_c(z)\big) \cdot g \\ \mathcal{T}_{c_1 c_2} &= \mathcal{T}_{c_1} \circ \mathcal{T}_{c_2} \\ \mathcal{T}_c^{-1} &= \mathcal{T}_{c^{-1}}. \end{aligned}$$

L'**holonomie** $\mathcal{H}^A$ d'une connexion $A$ est l'application qui associe à tout lacet $c$ en $*$, lisse par morceau, l'élément $\mathcal{H}^A(c) \in G$ défini par l'équation $\mathcal{T}_c^A(g) = \mathcal{H}^A(c)g$ (rappelons que $P_*$ est identifiée à $G$). On a les formules

$$\mathcal{H}^A(c_1c_2) = \mathcal{H}^A(c_1)\mathcal{H}^A(c_2) \quad , \quad \mathcal{H}^A(c^{-1}) = \mathcal{H}^A(c)^{-1}.$$

L'ensemble des éléments $\mathcal{H}^A(c)$ pour tous les lacets $c$ de $M$ lisses par morceau en $*$ constitue donc un sous-groupe de $G$ appelé le **groupe d'holonomie** de la connexion $A$.

(2.4) *Connexions induites.* — Soit $\eta = (Q \xrightarrow{q} N)$ un autre $G$-fibré principal et soit $(f, \tilde{f}) : \eta \longrightarrow \xi$ un morphisme de $G$-fibrés principaux, c'est-à-dire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

avec $\tilde{f}$ $G$-équivariant. On a donc une identification canonique de $\eta$ avec le fibré induit $f^*\xi$ qui induit une identification des fibrés tangents à $Q$ et à $P(f^*\xi)$. Si $A \in \mathcal{A}(\xi)$, cette dernière identification permet de considérer le fibré vectoriel induit $\tilde{f}^*A$ comme une connexion sur $\eta$. On dira que $\tilde{f}^*A$ est la **connexion induite** par $\tilde{f}$. Les formules correspondantes sont :

$$\tilde{f} \circ \mathcal{R}^{\tilde{f}^*A}(z, c) = \mathcal{R}^A(\tilde{f}(z), f \circ c) \tag{2.5}$$

$$\tilde{f} \circ \mathcal{T}_c^{\tilde{f}^*A}(z) = \mathcal{T}_{f\circ c}^A(\tilde{f}(z)). \tag{2.6}$$

(2.7) *Action du groupe de jauge sur* $\mathcal{A}$. — Le groupe $\mathrm{Aut}_G(P)$ des difféomorphismes $G$-équivariants de $P$ agit à droite sur l'espace des connexions $\mathcal{A}$, action définie par $A \cdot f = f^*A$. On restreint cette action au **groupe de jauge**

$$\mathcal{G} := \mathrm{Aut}\ \xi := \ker(\mathrm{Aut}_G(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}\ M)$$

et au groupe

$$\mathcal{G}_1 := \{\chi \in \mathcal{G} \mid \chi(\tilde{*}) = \tilde{*}\}.$$

On dénote par $\mathcal{B}_1$ et par $\mathcal{B}$ les quotients de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{G}_1$ et par $\mathcal{G}$.

(2.8) PROPOSITION. — *Soient $A, A' \in \mathcal{A}$. Alors :*

(1) *$A' = \chi^* A$ avec $\chi \in \mathcal{G}_1$ si et seulement si $\mathcal{H}^{A'}(\ell) = \mathcal{H}^A(\ell)$ pour tout lacet lisse par morceau $\ell$ en $*$.*

(2) *$A' = \chi^* A$ avec $\chi \in \mathcal{G}$ si et seulement si il existe $a \in G$ tel que $\mathcal{H}^{A'}(\ell) = a^{-1}\mathcal{H}^A(\ell)a$ pour tout lacet lisse par morceau $\ell$ en $*$.*

*Preuve.* — Supposons que $A' = \chi^* A$ avec $\chi \in \mathcal{G}$. On a $\chi(\tilde{*}) = a \in G = P_*$. Soit $\ell$ un lacet lisse par morceau en $* \in M$. D'après (2.6), on a :

$$\mathcal{H}^{A'}(\ell) = \mathcal{T}_\ell^{\chi^* A}(\tilde{*}) = \chi^{-1}(\mathcal{T}_\ell^A(a)) = a^{-1}\mathcal{H}^A(\ell)a$$

ce qui prouve les parties "seulement si" de (2) et (1) ($a = 1$).

Réciproquement, soit $a \in G$ tel que $\mathcal{H}^{A'}(\ell) = a^{-1}\mathcal{H}^A(\ell)a$ pour tout lacet lisse par morceau $\ell$ en $*$ (pour la partie *(1)*, on choisit $a = 1$). Soit $z \in P$. Choisissons un chemin $c$ lisse par morceaux dans $M$ avec $c(0) = *$ et $c(1) = p(z)$ (on utilise ici l'hypothèse générale que $M$ est connexe). On pose

$$y := \mathcal{T}_c^{A'}(z) \in P_* = G \qquad \text{et} \qquad \chi(z) := \mathcal{T}_{c^{-1}}^A(ay).$$

Il est clair que $p(\chi(z)) = p(z)$ et que $\chi(z \cdot g) = \chi(z) \cdot g$. Il reste à voir que $\chi$ ne dépend pas du choix du chemin $c$, que $\chi$ est un difféomorphisme, et que $\chi^* A = A'$.

Soit $\bar{c}$ un autre chemin reliant $*$ à $p(z)$ et posons $\overline{y} := \mathcal{T}_{\bar{c}}^{A'}(z)$. Il faut montrer que $\mathcal{T}_{\bar{c}^{-1}}^A(a\overline{y}) = \chi(z)$ ce qui équivaut à $\mathcal{T}_{\bar{c}}^A(\chi(z)) = a\overline{y}$. Mais :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\bar{c}}^A(\chi(z)) &= \mathcal{T}_{\bar{c}c^{-1}}^A(ay) \\
&= \mathcal{H}^A(\bar{c}c^{-1})(ay) \\
&= a\mathcal{H}^{A'}(\bar{c}c^{-1})(y) \\
&= a\mathcal{T}_{\bar{c}c^{-1}}^{A'}(y) = a\overline{y}.
\end{aligned}$$

Pour démontrer la différentiabilité de $\chi$, on choisit un voisinage $V$ de $z$ dans $P$ de la forme $U \times G$, où $U$ est le domaine d'une carte $\varphi$ qui est un difféomorphisme de $U$ dans $\mathbb{R}^n$. Chaque point $u \in U$ est relié à $p(z)$ par un chemin canonique $c_u$ : l'image par $\varphi^{-1}$ du segment reliant $\varphi(p(z))$ à $\varphi(u)$. On choisit d'autre part un chemin $c$ reliant $*$ à $p(z)$. Si $z' \in V$, on peut, pour définir $\chi(z')$, utiliser le chemin $cc_{p(z')}$. La dépendance différentiable des conditions initiales de l'équation différentielle régissant le transport

parallèle implique alors que $\chi(z')$ dépend différentiablement de $z'$. Le même argument peut être appliqué à $\chi^{-1}$ qui admet la même définition que $\chi$, avec les rôles de $A$ et de $A'$ échangés. On a ainsi montré que $\chi$ est un difféomorphisme et donc un élément de $\mathcal{G}$ (ou de $\mathcal{G}_1$ si $a = 1$).

Enfin, pour démontrer que $\chi^* A = A'$, on utilise le fait classique que deux connexions sont égales si et seulement si elles relèvent horizontalement les chemins de la même manière. Par l'équation (2.5), il s'agit donc de montrer que pour tout chemin $c : [0,1] \to M$, et tout $x \in P_{c(0)}$, on a :

$$\chi \circ \mathcal{R}^{A'}(x, c) = \mathcal{R}^{A}(\chi(x), c).$$

Lorsque $c(1) = *$, ceci découle directement de la définition de $\chi$ (en utilisant des segments du chemin $c^{-1}$ pour définir $\chi$). Dans le cas général, on relie $c(1)$ à $*$ par un chemin $c'$ et on applique l'argument précédent à $cc'$. □

Soit $\delta \in \mathcal{G}$. La restriction de $\delta$ à $P_* = G$ commute avec $R_g | P_*$ qui est la multiplication à droite dans $G$ par $g$. Donc $\delta | G$ est la multiplication à gauche par un élément $\varepsilon(\delta) \in G$. Il est aisé de vérifier que $\varepsilon : \mathcal{G} \to G$ est un homomorphisme dont le noyau est $\mathcal{G}_1$.

(2.9) Lemme. — *Si $G$ est connexe ou abélien, l'homomorphisme $\varepsilon : \mathcal{G} \to G$ est surjectif.*

*Preuve.* — Supposons $G$ connexe. Considérons d'abord le cas où $M = \mathbb{R}^n$ et $* = 0$. Soit $g \in G$. Soit $c : \mathbb{R} \to G$, un chemin lisse avec $c(0) = g$ et $c(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Définissons $\chi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n \times G) = \mathrm{map}(\mathbb{R}^n, G)$ par $\chi(x) = c(\|x\|^2)$. On a $\varepsilon(\chi) = g$. Dans le cas général, on utilise cette construction dans un ouvert de carte au voisinage de $* \in M$.

Lorsque $G$ est abélien, on a en fait une section de $\varepsilon$ donnée par $g \mapsto R_g$. (De plus, $\mathcal{G}$ est abélien et $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}_1 \times G$; voir § 5). □

Soit $A$ une connexion sur $\xi$. On dénote par $\mathcal{G}^A$ le stabilisateur de $A$ pour l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$.

(2.10) Proposition. — *On a $\mathcal{G}^A \cap \mathcal{G}_1 = \{1\}$ et $\varepsilon | \mathcal{G}^A$ envoie $\mathcal{G}^A$ isomorphiquement sur le centralisateur $C_A$ dans $G$ du groupe d'holonomie de $A$.*

*Preuve.* — Soit $z \in P$. Choisissons un chemin $c$ lisse par morceaux dans $M$ avec $c(0) = *$ et $c(1) = p(z)$ ($M$ est connexe). Si $\chi \in \mathcal{G}^A$, la formule

(2.6) donne $\chi \circ \mathcal{T}_c^A(z) = \mathcal{T}_c^A(\chi(z))$. On a donc :

$$\chi(z) \quad = \quad \mathcal{T}^A_{c^{-1}}\big(\chi\,(\underbrace{\mathcal{T}_c^A(z)}_{\in P_*})\big).$$

Donc $\chi = \mathrm{id}_P$ si de plus $\chi \in \mathcal{G}_1$. On a donc que $\varepsilon|\mathcal{G}^A$ est injectif. Le fait que $\varepsilon(\mathcal{G}^A) = C_A$ provient de l'énoncé et de la démonstration de la proposition (2.8) (partie (2), avec $A' = A$). □

(2.11) COROLLAIRE. — *Supposons que $G$ est abélien. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a, dans $\mathcal{A}$, l'égalité des orbites :*

$$A \cdot \mathcal{G}_1 = A \cdot \mathcal{G}.$$

(2.12) LE GROUPE $\mathrm{Aut}_\xi M$ : Dénotons par $\mathrm{Aut}_\xi M \in \mathrm{Aut}\, M$ l'image de $\mathrm{Aut}_G P \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathrm{Aut}\, M$. Le groupe $\mathrm{Aut}_\xi M$ est donc le quotient de $\mathrm{Aut}_G P$ par le sous-groupe invariant $\mathcal{G}$.

(2.13) PROPOSITION.

a) $\mathrm{Aut}_\xi M$ *est un sous-groupe ouvert et fermé dans* $\mathrm{Aut}\, M$.

b) $\mathrm{Aut}_\xi M$ *est localement contractile.*

c) $p : \mathrm{Aut}_G P \longrightarrow \mathrm{Aut}_\xi M$ *est un fibré $\mathcal{G}$-principal.*

*Preuve.* — On utilise le fait classique que $\mathrm{Aut}\, M$ est localement contractile. Soit $f_0 = p(\tilde{f}_0) \in \mathrm{Aut}_\xi M$ et soit $U$ un ouvert contractile de $\mathrm{Aut}\, M$ contenant $f_0$. On va construire une application $\sigma : U \longrightarrow \mathrm{Aut}_G P$ telle que $\mathbf{p} \circ \sigma = \mathrm{id}_U$.

Choisissons une homotopie $h_s : U \longrightarrow U$, $(s \in [0,1])$, telle que, pour tout $f \in U$, on ait $h_1 f = f$, $h_s f_0 = f_0$ et $h_0 f = f_0$. Chaque couple $(x, f) \in M \times U$ détermine un chemin $c(x,f) : [0,1] \longrightarrow M$ par $c(x,f)(s) = h_s f\,(x)$. Choisissons une connexion $A$ sur $\xi$. Pour $f \in U$ et $z \in P$, $\sigma(f)(z)$ est défini par :

$$\sigma(f)(z) := \mathcal{T}^A_{c^{-1}(p(z),f)}(\tilde{f}_0(z)).$$

On vérifie aisément que $\sigma$ a les propriétés désirées.

L'existence de $\sigma$ montre que $U \subset \mathrm{Aut}_\xi M$. $\mathrm{Aut}_\xi M$ est donc un ouvert de $\mathrm{Aut}\, M$ et est donc localement contractile. D'autre part, $\sigma$ donne une

section locale de $p$ ce qui montre c). Enfin, le procédé de la définition de $\sigma$ (ou le relèvement des homotopies dans $\xi$) montre que le complémentaire de $\mathrm{Aut}_\xi M$ dans $\mathrm{Aut}\, M$ est également ouvert. □

La même démonstration s'applique à l'application $p|\,\mathrm{Aut}^*_G P \longrightarrow \mathrm{Aut}^*\, M$, de noyau $\mathcal{G}_1$ où

$$\mathrm{Aut}^*_G P := \{f \in \mathrm{Aut}_G P \mid f(\tilde{*}) = \tilde{*}\}$$
$$\mathrm{Aut}^*\, M := \{f \in \mathrm{Aut}\, M \mid f(*) = *\}$$
$$\mathrm{Aut}^*_\xi M := \mathrm{Aut}_\xi M \cap \mathrm{Aut}^*\, M.$$

En effet, $\mathrm{Aut}^*\, M$ est aussi localement contractile. On a donc :

(2.14) PROPOSITION

a) $\mathrm{Aut}^*_\xi M$ *est un sous-groupe ouvert et fermé dans* $\mathrm{Aut}^*\, M$.

b) $\mathrm{Aut}^*_\xi M$ *est localement contractile.*

c) $p : \mathrm{Aut}^*_G P \longrightarrow \mathrm{Aut}^*_\xi M$ *est un fibré* $\mathcal{G}_1$*-principal.*

Enfin, entre les groupes $\mathrm{Aut}^*_G P$ et $\mathrm{Aut}_G P$ se trouve le groupe

$$\mathrm{Aut}^\flat_G P := \{f \in \mathrm{Aut}_G P \mid f(P_*) = P_*\}.$$

Comme dans (2.9), on a un homomorphisme $\varepsilon : \mathrm{Aut}^\flat_G P \longrightarrow G$, de noyau $\mathrm{Aut}^*_G P$, qui est surjectif si $G$ est connexe ou abélien. On a également un $\mathcal{G}$-fibré principal $\mathrm{Aut}^\flat_G P \longrightarrow \mathrm{Aut}^*_\xi M$. Le groupe $\mathcal{G}_1$ est un sous-groupe invariant de $\mathrm{Aut}^\flat_G P$ et on a :

(2.15) LEMME. — *Si* $G$ *est connexe ou abélien, le groupe quotient* $\mathrm{Aut}^\flat_G P/\mathcal{G}_1$ *est isomorphe au produit* $\mathrm{Aut}^*_\xi M \times G$.

*Preuve.* — L'homomorphisme $p : \mathrm{Aut}^\flat_G P \longrightarrow \mathrm{Aut}^*_\xi M$ se factorise en $\overline{p} : \mathrm{Aut}^\flat_G P/\mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}^*_\xi M$, donnant un épimorphisme de noyau $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$. Si $G$ est connexe ou abélien, on a $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1 \cong G$ par (2.9). L'homomorphisme $\varepsilon$ se factorise également en un épimorphisme $\overline{\varepsilon} : \mathrm{Aut}^\flat_G P/\mathcal{G}_1 \longrightarrow G$ qui donne une rétraction sur $\ker\overline{p}$. □

(2.16) L'ACTION DE $\mathrm{Aut}_\xi M$ SUR $\mathcal{B}$ : On a une action continue à droite

$$b : \mathcal{A} \times \mathrm{Aut}_G P \longrightarrow \mathcal{A}$$

donnée par $A \cdot f := f^*A$. Soit $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ la projection naturelle. Comme $\mathcal{G}$ est un sous-groupe *invariant* de $\mathrm{Aut}_G P$, on a les factorisations :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \times \mathrm{Aut}_G P & \xrightarrow{\pi \times \mathrm{id}} & \mathcal{B} \times \mathrm{Aut}_G P & \xrightarrow{\mathrm{id} \times p} & \mathcal{B} \times \mathrm{Aut}_\xi M \\ \downarrow b & & \downarrow \bar{b} & & \downarrow \mathbf{b} \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{B} & \xrightarrow{=} & \mathcal{B} \end{array}$$

L'application $\bar{b}$ est évidemment continue puisque $\mathcal{B}$ est muni de la topologie quotient. Mais $\mathbf{p} : \mathrm{Aut}_G P \longrightarrow \mathrm{Aut}_\xi M$ est aussi une projection sur un quotient, par la partie c) de (2.13). On en déduit que l'action induite

$$\mathbf{b} : \mathcal{B} \times \mathrm{Aut}_\xi M \longrightarrow \mathcal{B}$$

est également *continue*. On en déduit de même que l'action $b_1 : \mathcal{A} \times \mathrm{Aut}^{\flat}_G P \longrightarrow \mathcal{A}$ induit une action *continue* $\mathbf{b}_1 : \mathcal{B}_1 \times \mathrm{Aut}^{\flat}_G P/\mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_1$.

Soit $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}\, M$ une action différentiable du groupe de Lie $\Gamma$ sur $M$. Cette action induit l'action $\beta : \mathcal{B} \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{B}$ de la condition (C3). Lorsque l'action $\alpha$ fixe $* \in M$, le choix d'un homomorphisme différentiable $\tilde{e} : \Gamma \longrightarrow G$ induit une action $\beta_1(\tilde{e}) : \mathcal{B}_1 \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{B}_1$ dont il est question dans le théorème B. On a le résultat :

(2.17) Lemme. — *Les actions $\beta$ et $\beta_1$ intervenant dans les théorèmes A et B sont continues. De plus, si l'action $\alpha$ provient d'une action sur $\xi$, ces actions admettent un point fixe.*

*Preuve.* — Rappelons la définition de $\beta$ : pour $\gamma \in \Gamma$ et $A \in \mathcal{A}$, on choisit $\tilde{\gamma} \in \mathbf{p}^{-1}(\gamma)$ et on pose : $\beta([A], \gamma) := [\tilde{\gamma}^* A]$. On a alors :

$$\beta([A], \gamma) = [A \cdot \tilde{\gamma}] = [b(A, \tilde{\gamma})] = \mathbf{b}([A], \gamma)$$

comme $\mathbf{b}$ est continue, cela prouve la continuité de $\beta$.

En ce qui concerne l'action $\beta_1$, l'homomorphisme $\tilde{e}$ produit un homomorphisme

$$\mu : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}^*_\xi M \times G \cong \mathrm{Aut}^{\flat}_P M/\mathcal{G}_1 \quad , \quad (\gamma \mapsto (\alpha(\gamma), \tilde{e}(\gamma)))$$

et, dans $\mathcal{B}_1$, on a l'égalité $\beta_1(\tilde{e})([A], \gamma) = \mathbf{b}_1([A], \mu(\gamma))$.

Supposons que l'action $\alpha$ provient d'une action sur $\xi$, c'est-à-dire se relève en $\tilde{\alpha} : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}_G P$. La correspondance $(A, \gamma) \mapsto \tilde{\alpha}^* A$ définit une action $\hat{\alpha} : \mathcal{A} \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{A}$ qui relève l'action $\beta$. Il est classique que $\mathcal{A}$ est un espace affine sur un espace vectoriel de 1-formes sur $M$. Comme $\Gamma$ est compact, l'action $\hat{\alpha}$ admet un point fixe par le procédé habituel : si $A \in \mathcal{A}$, le barycentre $A_0$ de l'orbite de $A$ :

$$A_0 := \int_\Gamma (A \cdot \gamma)\, d\mu(\gamma)$$

est un point fixe de $\hat{\alpha}$ ($\mu$ étant une mesure invariante à gauche sur $\Gamma$, avec $\mu(\Gamma) = 1$). □

(2.18) GROUPE STRUCTURAL PRODUIT : Soient $G_1, G_2, \ldots, G_k$ des groupes de Lie compacts et soit $G = \prod G_i$. La collection des projections $G \longrightarrow G_i$ détermine une équivalence d'homotopie $BG \xrightarrow{\approx} \prod BG_i$ entre les espaces classifiants. On aura donc une bijection $\xi \xrightarrow{\cong} (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ entre les classes d'isomorphisme de $G$ fibrés principaux sur $M$ et les $k$-uples de classes d'isomorphisme de $G_i$-fibrés principaux sur $M$. Au niveau des fibrés principaux, cette bijection peut être induite par les deux constructions suivantes :

a) un $k$-uple $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ donne un G-fibré "produit" :

$$\prod \xi_i : \prod_{i=1}^{k} P(\xi_i) \xrightarrow{\prod p_i} \prod_{i=1}^{k} M$$

sur le produit cartésien de $k$ copies de $M$. Le $G$-fibré $\xi$ sur $M$ sera le fibré induit de $\prod \xi_i$ par l'application diagonale $\Delta : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} M$ (on reconnaît là une construction du type "somme de Whitney").

b) Soit $\xi$ un $G$-fibré principal sur $M$. Pour $j \in \{1, \ldots, k\}$, on définit le groupe

$$\hat{G}_j := \{(g_1, \ldots, g_k) \in \prod_{i=1}^{k} G_i \mid g_j = 1\}.$$

Le $G_j$-fibré $\xi_j$ est alors donné par $P(\xi_j) := P(\xi)/\hat{G}_j$.

(2.19) PROPOSITION. — *Les correspondances* $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \longleftrightarrow \xi$ *décrites dans a) et b) donnent naissance à des homéomorphismes naturels :*

$$\prod_{i=1}^{k} \mathcal{A}(\xi_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(\xi)$$

$$\prod_{i=1}^{k} \mathcal{G}(\xi_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}(\xi) \quad , \quad \prod_{i=1}^{k} \mathcal{G}_1(\xi_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}_1(\xi).$$

*Sous ces homéomorphismes, l'action de* $\mathcal{G}(\xi)$ *(ou* $\mathcal{G}_1(\xi)$*) sur* $A(\xi)$ *est le produit des actions de* $\mathcal{G}(\xi_i)$ *(ou* $\mathcal{G}_1(\xi_i)$*) sur* $A(\xi_i)$*. En conséquence, on a les homéomorphismes :*

$$\prod_{i=1}^{k} \mathcal{B}(\xi_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}(\xi) \quad , \quad \prod_{i=1}^{k} \mathcal{B}_1(\xi_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}_1(\xi).$$

*Preuve.* — Les définitions des flèches ci-dessus sont évidentes et les vérifications, faciles, seront laissées au lecteur. Par exemple, un élément $(A_1, \ldots, A_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathcal{A}(\xi_i)$ donne $A \in \mathcal{A}(\xi)$ par la composition :

$$\prod_{i=1}^{k} \mathcal{A}(\xi_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}\left(\prod_{i=1}^{k} \xi_i\right) \xrightarrow{\Delta^*} \mathcal{A}(\xi).$$

Réciproquement, une connexion $A$ sur $\xi$, étant un sous-fibré vectoriel de $TE(\xi)$ qui est $G$-invariant, détermine un sous-fibré vectoriel de $TE(\xi_j)$ qui est $G_j$-invariant, donc un élément $A_j \in \mathcal{A}(\xi_j)$. De la même manière, $\chi \in \mathcal{G}$ détermine $\chi_j \in \mathcal{G}(\xi_j)$, *etc.* □

De manière analogue, on prouve :

(2.20) PROPOSITION. — *Les correspondances* $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \longleftrightarrow \xi$ *décrites dans a) et b) donnent naissance à des homéomorphismes naturels* $\operatorname{Aut}_\xi M \xrightarrow{\cong} \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Aut}_{\xi_i} M$ *et l'action de* $\operatorname{Aut}_\xi M$ *sur* $\mathcal{B}(\xi)$ *décrite sous (2.16) est le produit des actions de* $\operatorname{Aut}_{\xi_i} M$ *sur* $\mathcal{B}(\xi_i)$. □

## 3. Un résultat d'algèbre homologique différentiable.

Soit $\Gamma$ un groupe de Lie. Soit $Q$ un $\Gamma$-module, c'est-à-dire que $Q$ est un groupe de Lie abélien, noté additivement, avec une action à gauche de $\Gamma$ sur $Q$ par automorphismes. Le groupe $C_d^r(\Gamma;Q)$ des $r$-**cochaînes différentiables** de $\Gamma$ à valeur dans $Q$ est le groupe abélien des applications différentiables de $\Gamma^r$ dans $Q$. L'opérateur cobord $\delta$ : $C_d^r(\Gamma;Q) \longrightarrow C_d^{r+1}(\Gamma;Q)$ est défini par la formule :

$$(\delta f)(\gamma_1,\dots,\gamma_{r+1}) = \gamma_1.f(\gamma_2,\dots,\gamma_{r+1}) + \sum_{i=1}^{r}(-1)^i f(\gamma_1,\dots,\gamma_{i-1},\gamma_i\gamma_{i+1},\gamma_{i+2},\dots,\gamma_{r+1}) + (-1)^{r+1} f(\gamma_1,\dots,\gamma_r).$$

Une cochaîne $f \in C_d^r(\Gamma;Q)$ est dite **normalisée** si $f(\gamma_1,\dots,\gamma_r) = 0$ lorsque que l'un des $\gamma_i$ est égal à 1.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant, qui sera utile dans la démonstration du théorème C :

(3.1) LEMME. — *Supposons que $\Gamma$ est compact et connexe et que $Q$ est compact. Soit $f \in C_d^2(\Gamma;Q)$ une cochaîne normalisée. Si $f$ est un cocycle (i.e. $\delta f = 0$), alors $f$ est un cobord.*

*Preuve.* — Comme $\Gamma$ est connexe, une cochaîne normalisée est à valeur dans la composante connexe de l'élément neutre de $Q$ qui, toujours parce que $\Gamma$ est connexe, est un sous-$\Gamma$-module de $Q$. Il suffit donc de démontrer (3.1) lorsque $Q$ est connexe. En tant que groupe abélien compact $Q$ est alors un tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

La projection $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ s'identifie naturellement à l'application exponentielle du groupe de Lie $\mathbb{T}^n$. L'action de $\Gamma$ sur $\mathbb{T}^n$ se relève donc en une action linéaire de $\Gamma$ sur $\mathbb{R}^n$ et on a une suite exacte de $\Gamma$-modules différentiables :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{j} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\rho} \mathbb{T}^n \longrightarrow 0.$$

Comme $\Gamma$ est connexe, l'action sur $\mathbb{Z}^n$ est triviale (ce qui implique que l'action de $\Gamma$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{T}^n$ est aussi triviale; nous n'utiliserons pas ce fait). La suite exacte ci-dessus induit une suite exacte des complexes de cochaînes

différentiables :

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C_d^3(\Gamma,\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{j_*} & C_d^3(\Gamma,\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\rho_*} & C_d^3(\Gamma,\mathbb{T}^n) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \\
0 & \longrightarrow & C_d^2(\Gamma,\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{j_*} & C_d^2(\Gamma,\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\rho_*} & C_d^2(\Gamma,\mathbb{T}^n) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \\
0 & \longrightarrow & C_d^1(\Gamma,\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{j_*} & C_d^1(\Gamma,\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\rho_*} & C_d^1(\Gamma,\mathbb{T}^n)
\end{array}
\tag{3.2}
$$

Soit $f : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}^n$ une 2-cochaîne différentiable normalisée. On a donc $f(1,\gamma) = f(\gamma,1) = 0$ ce qui implique que $f$ admet une factorisation $\overline{f} : \Gamma \wedge \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}^n$. Comme $\Gamma$ est connexe, le smash-produit $\Gamma \wedge \Gamma$ est simplement connexe et $f$ admet donc un relèvement $\tilde{f} : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui est différentiable puisque $f$ l'est. On a donc $f = \rho_*(\tilde{f})$, pour $\tilde{f} \in C_d^2(\Gamma,\mathbb{R}^n)$. Si $\delta(f) = 0$, un argument standard de "chasse" dans le diagramme (3.2) montre que $\delta(\tilde{f}) = 0$ (on utilise que $C_d^3(\Gamma,\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$ (cochaînes constantes) et que, comme l'action de $\Gamma$ sur $\mathbb{Z}^n$est triviale, $\ker(\delta : C_d^3(\Gamma,\mathbb{Z}^n) \longrightarrow C_d^4(\Gamma,\mathbb{Z}^n)) = 0$). Comme $\Gamma$ est compact, le théorème classique de van Est [VE], théorème 1, p. 233, assure que $H_d^*(\Gamma;\mathbb{R}^n) = 0$. On a donc $\tilde{f} = \delta(\tilde{c})$ d'où $f = \delta(\rho_*(\tilde{c}))$. □

Nous terminerons ce paragraphe en mentionnant une conséquence du lemme (3.1) (que nous n'utilisons pas dans la suite). Soit

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \Omega \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1 \tag{3.3}$$

une suite exacte de groupes de Lie compacts. Une **pseudo-section** de $\pi$ est une application différentiable $s : \Gamma \longrightarrow \Omega$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_\Gamma$ et $s(1) = 1$. Une **section** est une pseudo-section qui est un homomorphisme.

(3.4) Proposition. — *Supposons que, dans la suite (3.1), $\Gamma$ est connexe et compact et que $A$ est abélien (noté additivement). Alors, $\pi$ admet une section si et seulement si il admet une pseudo-section.*

*Preuve.* — Soit $s : \Gamma \longrightarrow \Omega$ une pseudo-section de $\pi$. Comme pour les groupes discrets (voir [Bn], chapitre 4), on vérifie que l'application

$(\gamma, a) \mapsto s(\gamma)as(\gamma)^{-1}$ est une action différentiable de $\Gamma$ sur $A$ et que l'application $f : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow A$ définie par

$$i \circ f(\gamma_1, \gamma_2) = s(\gamma_1)s(\gamma_2)s(\gamma_1\gamma_2)^{-1}$$

est un cocycle normalisé de $C^2_d(\gamma, A)$. Par le lemme (3.1), on a $f = \delta c$ pour $c \in C^1(\gamma, A)$. L'application différentiable

$$\begin{array}{rccc} s' : & \Gamma & \longrightarrow & \Omega \\ & \gamma & \mapsto & i(-c(\gamma)s(\gamma)) \end{array}$$

est alors une section de $\pi$. □

## 4. Preuves des théorèmes.

*Preuve du théorème C.* — Choisissons une application (pas forcément continue) $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ de $\Gamma$ dans $\mathrm{Aut}_G P$ telle que $\tilde{\gamma}(\tilde{*}) = \tilde{e}(\gamma)$. Soit $A \in \mathcal{A}$ une connexion co-abélienne telle que $\tilde{\gamma}^* A \in A \cdot \mathcal{G}_1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On va définir une nouvelle application $\alpha_1 : \gamma \mapsto \tilde{\gamma}_1$ de $\Gamma$ dans $\mathrm{Aut}_G P$ de la manière suivante : soit $z \in P$. On choisit un chemin $c$ lisse par morceaux dans $M$ tel que $c(0) = *$ et $c(1) = p(z)$ (utilisant que $M$ est connexe). En écrivant $\mathcal{T} = \mathcal{T}^A$, on pose :

$$y := \mathcal{T}_c(z) \in P_* \qquad et \qquad \tilde{\gamma}_1(z) = \mathcal{T}_{\gamma \circ c^{-1}}(\tilde{\gamma}(y)).$$

Montrons que $\tilde{\gamma}_1(z)$ ne dépend pas du choix du chemin $c$. Soit $\overline{c}$ un autre chemin reliant $*$ à $p(z)$ et posons $\overline{y} := \mathcal{T}_{\overline{c}}(z)$. Il faut montrer que $\mathcal{T}_{\gamma \circ \overline{c}^{-1}}(\tilde{\gamma}(\overline{y})) = \tilde{\gamma}_1(z)$, ce qui équivaut à

$$\tilde{\gamma}^{-1}\big(\mathcal{T}_{\gamma \circ \overline{c}}(\tilde{\gamma}_1(z)\big) = \overline{y}. \tag{4.1}$$

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^{-1}\big(\mathcal{T}_{\gamma \circ \overline{c}}(\tilde{\gamma}_1(z)\big) &= \tilde{\gamma}^{-1}\big(\mathcal{T}_{\gamma \circ \overline{c}} \circ \mathcal{T}_{\gamma \circ c^{-1}}(\tilde{\gamma}(y)\big) \\ &= \tilde{\gamma}^{-1}\big(\mathcal{T}_{\gamma \circ (\overline{c}c^{-1})}(\tilde{\gamma}(y)\big) \\ &= \mathcal{T}^{\tilde{\gamma}^* A}_{\overline{c}c^{-1}}(y) = \mathcal{H}^{\tilde{\gamma}^* A}(\overline{c}c^{-1})y. \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, $\tilde{\gamma}^* A = \chi^* A$ avec $\chi \in \mathcal{G}_1$, la proposition (2.8) entraîne que $\mathcal{H}^{\tilde{\gamma}^* A} = \mathcal{H}^A$. Par construction, on a $\mathcal{H}^A(\overline{c}c^{-1})y = \overline{y}$ ce qui démontre (4.1).

L'application $\tilde{\gamma}_1 : P \longrightarrow P$ jouit des propriétés suivantes :

(i) $\tilde{\gamma}_1(zg) = \tilde{\gamma}_1(z)g$, vu la $G$-équivariance du transport parallèle.

(ii) $\tilde{\gamma}_1$ est un difféomorphisme (voir la démonstration de la proposition (2.8)). D'autre part, le difféomorphisme $\tilde{\gamma}_1$ ne dépend que de $\tilde{\gamma}|P_*$ qui dépend différentiablement de $\gamma$ (puisque $\tilde{e}$ est différentiable). L'argument précédent montre que l'application

$$\Gamma \times P \longrightarrow P \qquad (\gamma, z) \mapsto \tilde{\gamma}_1(z)$$

est différentiable. Nous avons donc défini ce que l'on appelle une application "différentiable" $\alpha_1 : \Gamma \longrightarrow \operatorname{Aut}_G P$.

(iii) Comme dans la proposition (2.8) on montre que $\tilde{\gamma}_1^* A = A$.

La seule chose qui manque pour avoir relevé l'action $\alpha$ est que $\alpha_1$ n'est pas un homomorphisme. Soit $\Omega$ le sous-groupe de $\operatorname{Aut}_G P$ engendré par l'union de l'image $\Im m\, \alpha_1$ de $\alpha_1$ et du groupe d'isotropie $\mathcal{G}^A \subset \mathcal{G}$ de la connexion $A$. Grâce à la propriété (iii) ci-dessus, on a une suite exacte de groupes :

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}^A \xrightarrow{i} \Omega \longrightarrow \Im m\, \alpha \longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathcal{G}^A$ est isomorphe au centralisateur dans $G$ du groupe d'holonomie de $A$ (proposition (2.10)). Comme $A$ est co-abélienne, $\mathcal{G}^A$ est donc un groupe de Lie abélien compact.

Comme pour les groupe discrets (voir [Bn], chapitre 4), on vérifie que l'application $(\gamma, \chi) \mapsto \alpha_1(\gamma)\chi\alpha_1(\gamma)^{-1}$ est une action différentiable de $\Gamma$ sur $\mathcal{G}^A$ par automorphismes et que l'application $f : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}^A$ définie par

$$i \circ f(\gamma_1, \gamma_2) = \alpha_1(\gamma_1)\alpha_1(\gamma_2)\alpha_1(\gamma_1\gamma_2)^{-1}$$

est un cocycle normalisé de $C_d^2(\Gamma, \mathcal{G}^A)$ (voir § 3). Par le lemme (3.1), on a $f = \delta c$ pour $c \in C^1(\Gamma, \mathcal{G}^A)$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\alpha} : & \Gamma & \longrightarrow & \Omega \\ & \gamma & \mapsto & [i \circ c(\gamma)]^{-1}\alpha_1(\gamma) \end{array}$$

est alors un homomorphisme relevant $\alpha$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\tilde{\alpha}$ détermine une action différentiable de $\Gamma$ sur $P$ ce qui démontre le théorème C. □

*Preuve du théorème B.* — On construit l'application "différentiable" $\alpha_1 : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}_G P$ comme dans la preuve du théorème C. Il se trouve que $\alpha_1$ est un homomorphisme. En effet, soient $\gamma, \delta \in \Gamma$. Comme $\tilde{e}$ est un homomorphisme de $\Gamma$ dans $G$, on a $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\delta}_1 \widetilde{(\gamma\delta)}_1^{-1}(\tilde{*}) = \tilde{*}$ et donc

$$\tilde{\gamma}_1 \tilde{\delta}_1 \widetilde{(\gamma\delta)}_1^{-1} \quad \in \quad \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}^A.$$

Or, $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}^A = \{1\}$ par la proposition (2.10). □

*Preuve du théorème A.* — Le théorème A est un cas particulier du théorème C qui est aussi vrai sous l'hypothèse que $G$ est abélien (puisque la connexité de $G$ n'est utilisée que pour appliquer le lemme (2.9)). Supposons donc que $G$ soit abélien. Soit $A \in \mathcal{A}$. On a $A \cdot \mathcal{G}_1 = A \cdot \mathcal{G}$ par la proposition (2.8). Comme $\mathcal{G}$ est un sous-groupe invariant de $\mathrm{Aut}_G P$, la condition $\tilde{\beta}_1(\{A\} \times \Gamma) \subset A \cdot \mathcal{G}_1$ est équivalente à l'égalité $[A] \cdot \Gamma = [A]$ dans $\mathcal{B}$. De plus, toute connexion est co-abélienne. □

*Preuve du théorème A1.* — Par (2.18), le $\mathbb{T}^k$-fibré se décompose en $k$ fibrés $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ de groupe structural $S^1$. D'après (2.20), il suffit de montrer que l'action $\alpha$ de $\Gamma$ sur $M$ satisfait à la condition (C3) pour chaque $S^1$-fibré $\xi_i$. On peut donc se restreindre au cas où le groupe structural de $\xi$ est $G = S^1$. Notons $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\xi), \mathcal{B} = \mathcal{B}(\xi)$ *etc.*

Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $S^1$ est abélien, la courbure $F^A$ de $A$ est une 2-forme différentielle sur $M$ à coefficients dans $i\mathbb{R}$ qui est l'algèbre de Lie de $S^1$. La théorie de Chern-Weyl assure que $F^A$ est une forme fermée et que $(1/2i\pi)F^A \in \Omega^2(M)$ représente la $1^{\text{ere}}$ classe de Chern $c_1(\xi) \in H^2(M; \mathbb{R})$.

Le groupe de jauge $\mathcal{G}$ est le groupe des sections du fibré $\mathrm{Ad}\xi$ (fibré associé à $\xi$, de fibre $F = G$, $G$ agissant sur $F$ par conjugaison (voir [La], p. 23). Comme $G$ est abélien, $\mathrm{Ad}\xi$ est trivial, et donc $\mathcal{G} \cong \mathrm{map}(M, S^1)$ (voir aussi [HY], proposition 2.2). Rappelons d'autre part que la différence $A - A'$ de deux connexions est une 1-forme sur $M$ à valeur dans le fibré $\mathrm{ad}\xi$, fibré associé à $\xi$, de fibre l'algèbre de Lie $L(G)$ de $G$, où $G$ agit sur $L(G)$ par l'action adjointe. Dans le cas $G = S^1$, $\mathrm{ad}\xi$ est le fibré produit $M \times i\mathbb{R}$ et $A - A' \in \Omega^1(M; i\mathbb{R})$. De plus, $F^A - F^{A'} = d(A - A')$.

Soit $\chi \in \mathcal{G}$. On a $\chi^* A = A + i\chi^* \mathrm{vol}_{S^1}$, formule qui se démontre dans une trivialisation locale (voir [La], p. 31). On a donc $F^{\chi^* A} = F^A + \mathrm{id}(\chi^* A) = F^A$. La correspondance $A \mapsto (1/2i\pi)F^A$ produit donc une application :

$$\theta : \mathcal{B} \xrightarrow{\simeq} Z(\xi) := \{\omega \in \Omega^2(M; \mathbb{R}) \mid d\omega = 0 \text{ et } [\omega] = c_1(\xi)\}.$$

(4.2) PROPOSITION. — *($G = S^1$).*

(i) *$\theta$ est surjective.*

(ii) *Il existe une action libre du tore $\mathbb{T}^{b_1(M)}$ sur $\mathcal{B}$ et deux éléments $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ sont dans la même orbite si et seulement si $\theta(B_1) = \theta(B_2)$.*

Montrons tout d'abord que la proposition (4.2) implique le théorème A1. L'application $\theta$ est bien entendu $\mathrm{Aut}_\xi M$-équivariante, où $\mathrm{Aut}_\xi M$ agit sur $\mathcal{B}$ comme dans (2.16) et sur $Z(\xi)$ par l'action usuelle de $\mathrm{Aut}\, M$ sur les formes différentielles. Comme $\Gamma$ est compact, on peut, par moyenne, trouver sur $M$ une métrique riemannienne $\Gamma$-invariante. Par la théorie de Hodge-de Rham, $Z(\xi)$ contient une unique forme $\omega_0$ qui est harmonique pour cette métrique. Comme $\Gamma$ agit sur $M$ par isométrie, on a que $\gamma^*\omega_0 = \omega_0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Si maintenant $b_1(M) = 0$, $\theta$ est un homéomorphisme par la proposition (4.2), ce qui donne un point fixe pour l'action $\beta$ de $\Gamma$ sur $\mathcal{B}$.

Dans le cas où $b_1(M) \neq 0$, l'argument ci-dessus et la partie (ii) de la proposition (4.2) indiquent qu'il existe une orbite de l'action $\mathbb{T} := \mathbb{T}^{b_1(M)}$ qui est $\Gamma$-invariante. Cette orbite est homéomorphe à $\mathbb{T}$. Or, si $\pi_1(\Gamma)$ est fini, toute action sur un tore $\mathbb{T}^b$ comporte un point fixe. En effet, l'application évaluation correspondante $e : \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}^b$ admet un relèvement $\tilde{e} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^b$ permettant de recouvrir l'action sur $\mathbb{T}^b$ en une action de $\Gamma$ sur $\mathbb{R}^b$. Comme $\Gamma$ est compact, une telle action admet un point fixe (le barycentre d'une orbite). La condition (C3) est donc également vérifiée. □

*Preuve de la proposition* (4.2). — La surjectivité de $\theta$ est démontrée dans [La], Proposition 8.14. Soit $V := \ker(d : \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^2(M))$ l'espace vectoriel des 1-formes fermées sur $M$. Par ce qui précède, on a une action libre $\mathcal{A} \times V \longrightarrow \mathcal{A}$ donnée par $(A, \eta) \mapsto A + i\eta$ et deux connexions sont dans la même orbite si et seulement si $\theta(B_1) = \theta(B_2)$. Soit $\mathcal{G}^\natural$ la composante connexe de id dans $\mathcal{G}$. Un élément de $\mathcal{G}^\natural$ est représentable par une application $\chi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ et on a $\chi^* A = A + \mathrm{id}\chi$. L'orbite d'une connexion dans $\mathcal{A}$ sous l'action de $\mathcal{G}^\natural$ se confond donc avec l'orbite de cette connexion sous l'action de l'espace vectoriel des formes exactes. Ceci donne une action libre :

$$\mathcal{A}/\mathcal{G}^\natural \times H^1_{DR}(M) \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}^\natural.$$

Enfin, on a $\pi_0(\mathcal{G}) = \pi_0(\mathrm{map}(M, S^1)) = H^1(M; \mathbb{Z})$. Soit $\chi : M \longrightarrow S^1$ un élément de $\mathcal{G}$. Rappelons que $\chi^* A = A + i\chi^* \mathrm{vol}_{S^1}$, et que l'application $\chi \mapsto \chi^* \mathrm{vol}_{S^1}$ représente l'inclusion $H^1(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M; \mathbb{R}) \cong H^1_{DR}(M)$. L'orbite d'un élément de $\mathcal{A}/\mathcal{G}^\natural$ sous l'action de $\mathcal{G}$ est donc

identique à l'orbite de cet élément sous l'action de $H^1(M;\mathbb{Z})$. Comme $H^1_{DR}(M)/H^1(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{T}^{b_1(M)}$, cela démontre le point (ii). □

*Preuve du théorème B1.* — Rappelons que, puisque $G$ est connexe, l'homomorphisme $\varepsilon : \mathcal{G} \longrightarrow G$ induit un isomorphisme $\bar{\varepsilon} : \mathcal{G}/\mathcal{G}_1 \xrightarrow{\simeq} G$ (voir (2.9)). L'application $g \mapsto R_g$ donne un homorphisme $i : C(G) \longrightarrow \mathcal{G}$ qui est une section partielle de $\varepsilon$ et $i(C(G)) \subset \mathcal{G}^A$ pour toute connexion $A \in \mathcal{A}$. L'action de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_1$ sur $\mathcal{B}_1$ donne, utilisant l'isomorphisme $\bar{\varepsilon}^{-1}$, une action de $\overline{G}$ sur $\mathcal{B}_1$, de quotient $\mathcal{B}$, que l'on notera $(Y,g) \mapsto Y \bullet g$ , pour $Y \in \mathcal{B}_1$ et $g \in \overline{G}$.

Si $A$ est une connexion irréductible, on a $i(C(G)) = \mathcal{G}^A$ (voir (2.10)) et donc $\overline{G}$ agit librement sur les éléments irréductibles de $\mathcal{B}_1$. En fait, on peut ainsi démontrer que la restriction de la projection naturelle $q : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}$ au-dessus des éléments irréductibles est un $\overline{G}$-fibré principal (voir [Do], p. 284 et [FS], § 2).

Choisissons $X \in q^{-1}(\{B\})$, où $B$ est un élément irréductible de $\mathcal{B}$. Par ce qui précède, ce choix identifie $\overline{G}$ à $q^{-1}(\{B\})$ par $g \mapsto X \bullet g$.

Dénotons par $\underline{1}$ l'homomorphisme trivial $\gamma \mapsto 1$ de $\Gamma$ dans $G$. Pour $Y \in \mathcal{B}_1$, posons $Y \diamond \gamma := \beta_1(\underline{1})(Y,\gamma)$. Il résulte de (2.15) et de la preuve de (2.17) que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, tout $g \in \overline{G}$ et tout $Y \in \mathcal{B}_1$ on a

$$(Y \diamond \gamma) \bullet g = (Y \bullet g) \diamond \gamma.$$

En fixant $Y = X$ on peut donc écrire

$$(X \bullet g) \diamond \gamma = X \bullet (\nu_X(\gamma) g)$$

ce qui définit une fonction $\nu_X : \Gamma \longrightarrow \overline{G}$ dépendant de $X$. On vérifie immédiatement que $\nu_X(\gamma_1\gamma_2) = \nu_X(\gamma_2)\nu_X(\gamma_1)$. La correspondance $\gamma \mapsto \nu_X(\gamma)^{-1}$ est donc un homomorphisme $\bar{e}_X : \Gamma \longrightarrow \overline{G}$. On définit $e_B$ comme la classe de conjugaison de $\bar{e}_X$.

Vérifions tout d'abord que $e_B$ ne dépend pas du choix de $X$. Soit $X' \in q^{-1}(\{B\})$ un autre choix. On a $X' = X \bullet \bar{g}$ pour un certain $\bar{g} \in \overline{G}$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $g \in \overline{G}$, on aura :

$$X' \bullet (\nu_{X'}(\gamma) g) = (X' \bullet g) \diamond \gamma = (X \bullet (\bar{g} g)) \diamond \gamma = X \bullet (\nu_X(\gamma) \bar{g} g) = X' \bullet (\bar{g}^{-1} \nu_X(\gamma) \bar{g} g)$$

ce qui montre que $\bar{e}_{X'}(\gamma) = \bar{g}^{-1} \bar{e}_X(\gamma) \bar{g}$.

Soit $\tilde{e} : \Gamma \longrightarrow G$ un homomorphisme. Soit $X \in q^{-1}(\{B\})$. On a alors

$$\beta_1(\tilde{e})(X \bullet g, \gamma) = X \bullet \big(\bar{e}_X(\gamma)^{-1} g \pi(\tilde{e}(\gamma))\big) \tag{4.3}$$

où $\pi : G \longrightarrow \overline{G}$ est la projection naturelle. Si $\pi \circ \tilde{e}$ ne représente pas $e_B$, il existe $\gamma_X$ tel que $\bar{e}_X(\gamma_X) \neq \pi(\tilde{e}(\gamma_X))$ et donc $X$ n'est pas un point fixe de l'action $\beta_1(\tilde{e})$. La condition 1) entraîne donc la condition 2).

Réciproquement, supposons que $\pi \circ \tilde{e}$ représente $e_B$. Comme l'action de $\overline{G}$ sur $q^{-1}(\{B\})$ est transitive, il existe $X \in q^{-1}(\{B\})$ tel que $\pi \circ \tilde{e} = \bar{e}_X$. La formule (4.3) montre que $X$ est un point fixe pour l'action $\beta_1(\tilde{e})$. □

## 5. Une approche homotopique du théorème A1.

Dans ce paragraphe, nous donnons l'idée d'une preuve homotopique du Théorème A1. Cette preuve utilise les méthodes de [HY] et fait apparaître les conditions $b_1(M) = 0$ ou $\pi_1(\Gamma)$ fini dans un autre contexte.

Considérons le $\mathcal{G}$-fibré principal $\mathrm{Aut}_G P \to \mathrm{Aut}_M$ (voir (2.13)). On a un morphisme de fibrés principaux :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{G} & \xrightarrow{\varepsilon} & G \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Aut}_G P & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{ev}}} & P \\
\downarrow & & \downarrow p \\
\mathrm{Aut}_\xi M & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & M
\end{array}
\tag{5.1}
$$

où $\widetilde{\mathrm{ev}}(f) = f(\tilde{*})$ et $\mathrm{ev}(f) = f(*)$. L'homomorphisme $\varepsilon$ est apparu dans (2.9)). Soit $\mathcal{G}^\natural$ la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathcal{G}$.

(5.2) Lemme. — *Si $G = \mathbb{T}^k$, on a*

(i) $\pi_0(\mathcal{G}) \cong (\mathbb{Z}^k)^{b_1(M)}$. *En particulier, si $b_1(M) = 0$, $\mathcal{G}$ est connexe.*

(ii) *La restriction de $\varepsilon$ à $\mathcal{G}^\natural$ est une équivalence d'homotopie entre $\mathcal{G}^\natural$ et $\mathbb{T}^k$.*

Montrons tout d'abord comment le lemme (5.2) entraîne le théorème A1. Si $b_1(M) = 0$, on a, d'après le lemme que $\varepsilon : \mathcal{G} \longrightarrow G$ est une équivalence d'homotopie. Le diagramme (5.1) est donc un diagramme pull-back de fibrations d'Hurewicz. La condition (C1) implique que l'image

de $\alpha : \Gamma \longrightarrow \operatorname{Aut} M$ est contenue dans $\operatorname{Aut}_\xi M$. Un relèvement $\tilde{e} : \Gamma \longrightarrow \operatorname{Aut}_G P$ de $e = \mathrm{ev} \circ \alpha$ donne donc une application continue $\alpha_1 : \Gamma \longrightarrow \operatorname{Aut}_G P$ relevant l'action $\alpha$ (ce qui est appelé un "pseudo-lifting" dans [HY]; dans notre méthode, un tel pseudo-lifting a été obtenu par la condition (C3)). Or, si $\Gamma$ est connexe, l'existence d'un pseudo-lifting entraîne que l'action $\alpha$ provient d'une action sur $\xi$ par le théorème (3.6) de [HY].

En général, l'existence d'un pseudo-lifting se heurte à des obstructions dans les deux groupes $H^1(\Gamma; \pi_0(\mathcal{G}))$ et $H^2(\Gamma; \pi_1(\mathcal{G}))$. Si $\pi_1(\Gamma)$ est fini, $H^1(\Gamma; \pi_0(\mathcal{G})) = H^1(\Gamma; (\mathbb{Z}^k)^{b_1(M)}) = 0$. On a donc une première obstruction $\theta \in H^2(\Gamma; \pi_1(\mathcal{G})) = H^2(\Gamma; \mathbb{Z})$ . Par naturalité de la 1ère obstruction, $\theta$ est l'image de l'obstruction à l'existence de $\tilde{e}$ qui est nulle. L'existence d'un pseudo-lifting est donc également garantie par la condition $\pi_1(\Gamma)$ fini. □

*Preuve du lemme* (5.2). — Rappelons que $\mathcal{G}$ est le groupe des sections du fibré $\mathrm{Ad}\xi$ (fibré associé à $\xi$, de fibre $F = G$, $G$ agissant sur $F$ par conjugaison (voir [La], p. 23). Comme $G$ est abélien, $\mathrm{Ad}\xi$ est trivial, et donc $\mathcal{G} \cong \operatorname{map}(M, G)$ (voir aussi [HY], proposition 2.2). On a donc

$$\pi_0(\mathcal{G}) \cong [M, \mathbb{T}^k] \cong H^1(M; \mathbb{Z}^k) \cong (\mathbb{Z}^k)^{b_1(M)}.$$

Rappelons que, comme $G$ est abélien, l'homomorphisme $\varepsilon$ admet une section donnée par $g \mapsto R_g$. Comme $\mathcal{G}$ est abélien, on en déduit que $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}_1 \times \mathbb{T}^k$ et donc $\pi_0(\mathcal{G}_1) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{G})$ est une bijection. Pour démontrer (ii), il suffit de montrer que $\pi_i(\mathcal{G}_1, \mathrm{id}) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

D'après ce qui précède, $\mathcal{G}_1$ s'identifie à $\operatorname{map}^\cdot(M, G)$, l'espace des applications pointées de $M$ dans $G$ qui envoient $*$ sur $1 \in G$. Le groupe $\pi_i(\mathcal{G}_1, \mathrm{id})$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'homotopie pointées $[S^i, \operatorname{map}^\cdot(M, G)]^\cdot$, le point base de $\operatorname{map}^\cdot(M, G)$ étant l'application constante sur $1 \in G$. On a :

$$[S^i, \operatorname{map}^\cdot(M, G)]^\cdot \cong [S^i \wedge M, G]^\cdot \cong [\Sigma^i M, G]^\cdot.$$

Comme $M$ est connexe, la suspension $\Sigma^i M$ est simplement connexe si $i \geq 1$. D'autre part, $G = \mathbb{T}^k$ est un espace d'Eilenberg-McLane $K(\mathbb{Z}^k, 1)$. Ceci implique que $[\Sigma^i M, G]^\cdot = 0$. □

## 6. Exemples et applications.

Ce paragraphe contient quelques illustrations et applications des théorèmes du § 1.

(6.1) PROPOSITION. — *Soit $\xi$ un $S^1$-fibré principal sur la sphère $S^2$. L'action usuelle de $SO_3$ sur $S^2$ provient d'une action sur $\xi$ si et seulement si la 1ère classe de Chern $c_1(\xi)$ satisfait $c_1(\xi) \in 2 \cdot H^2(S^2;\mathbb{Z})$.*

*Preuve.* — L'évaluation $e : SO_3 \longrightarrow S^2$ est le $S^1$-fibré principal $\tau$ associé au fibré tangent à $S^2$. Par le théorème des coefficients universels, on a $H^2(SO_3;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La suite spectrale de Serre pour $\tau$ donne que $e^* : H^2(S^2;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(SO_3;\mathbb{Z})$ est surjectif. Le fibré $e^*\xi$ est donc trivial (ce qui est équivalent à l'existence d'un relèvement $\tilde{e} : SO_3 \longrightarrow P(\xi)$) si et seulement si $c_1(\xi) \in 2 \cdot H^2(S^2;\mathbb{Z})$. Comme $b_1(S^2) = 0$, la condition (C3) est vérifiée par le théorème A1 et la proposition (6.1) découle alors du théorème A. □

(6.2) PROPOSITION. — *Soit $\xi$ un $S^1$-fibré principal sur la sphère $S^2$. Désignons par $*$ le pôle nord de $S^2$ et soit $\tilde{*}$ un point dans la fibre au dessus de $*$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors, l'action usuelle de $S^1 \cong SO_2$ sur $S^2$ fixant $*$ provient d'une action sur $\xi$ telle que , pour tout $\gamma \in S^1$ on ait $\gamma \cdot \tilde{*} = \tilde{*} \cdot \gamma^k$.*

*Preuve.* — Comme $b_1(S^2) = 0$, la condition (C3) est vérifiée par le théorème A1 et la proposition (6.2) découle alors du théorème B. □

Il est intéressant d'illustrer la proposition (6.2) dans le cas du fibré de Hopf $\eta : S^3 \xrightarrow{p} S^2$, en construisant directement les relevés de l'action de $SO_2$ pour les différents entiers $k$. Fixons les notations $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = 1\}$ et $p((z_1, z_2)) = [z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^1 \cong S^2$. Le pôle nord de $S^2$ correspond à $[0, 1]$ et l'action usuelle de $SO_2 = S^1$ fixant ce point est donnée par $\gamma \cdot [z_1, z_2] = [\gamma z_1, z_2]$. Le relevé de cette action tel que $\tilde{e}(\gamma) = \gamma^k$ est donné par $\gamma \cdot (z_1, z_2) = (\gamma^{k+1} z_1, \gamma^k z_2)$.

Le fait que l'action usuelle de $SO_3$ ou $SO_2$ sur $S^2$ provient d'actions sur des $S^1$-fibrés non-triviaux utilise de manière essentielle l'existence d'homomorphismes non triviaux de $SO_2$ dans le groupe structural. Ceci est bien mis en évidence par les deux résultats suivants :

(6.3) PROPOSITION. — *Soit $\xi$ un $G$-fibré principal sur une variété $M$ (connexe). Soit $\alpha$ une action transitive d'un groupe compact $\Gamma$ sur*

*$M$. Soit $a \in M$. Supposons que le groupe $\Gamma^a$ d'isotropie de $a$ n'admet pas d'homomorphisme non-trivial dans $G$. Alors, l'action $\alpha$ provient d'une action sur $\xi$ si et seulement si $\xi$ est trivial.*

*Preuve.* — On peut supposer que $* := a$. Supposons que l'action $\alpha$ provient d'une action sur $\xi$. Via l'identification $g \mapsto \tilde{*} \cdot g$ de $P_*$ avec $G$, l'application $\tilde{e} : \gamma \mapsto \gamma \cdot \tilde{*}$ donne une application de $\Gamma^a$ dans $G$ dont il est aisé de vérifier que c'est un homomorphisme. Par hypothèse, cet homomorphisme est constant et donc $\Gamma^a = \Gamma^{\tilde{*}}$. L'application $\tilde{e}$ se factorise donc par $\Gamma/\Gamma^a \cong M$ et produit une section de $\xi$. □

(6.4) PROPOSITION. — *Soit $\xi$ un $G$-fibré principal sur la sphère $S^n$. Considérons l'action usuelle de $SO_n$ sur $S^n$ fixant le pôle nord. Supposons qu'il n'existe pas d'homomorphisme non-trivial de $SO_n$ dans $G$. Alors, l'action de $SO_n$ sur $S^n$ provient d'une action sur $\xi$ si et seulement si $\xi$ est trivial.*

*Preuve.* — Dénotons par $*$ le pôle nord $(0, \ldots, 0, 1)$ de $S^n$ et par $-*$ son antipode. Choisissons $\pm\tilde{*} \in P_{\pm *}$. Pour $x \in S^{n-1}$, on considère le méridien $c_x : [0, \pi] \longrightarrow S^n$, paramétrisé par la longueur d'arc, tel que $c_x(0) = *$, $c_x(\pi) = -*$ et $c_x(\pi/2) = x$. Une connexion $A$ sur $\xi$ donne alors une application différentiable $\mu^A : S^{n-1} \longrightarrow G$ par $\mu^A(x) := \mathcal{T}^A_{c_x}(-\tilde{*})$. Il est facile de voir que $[\mu] \in \pi_{n-1}(G)$ caractérise la classe d'isomorphisme de $\xi$.

Supposons que l'action de $SO_n$ (appelons-la $\alpha$) provient d'une action $\tilde{\alpha}$ sur $\xi$. Puisque $\alpha$ fixe $\pm *$ et puisque $SO_n$ n'admet pas d'homomorphisme non-trivial dans $G$, on démontre, comme dans la preuve de (6.3) que l'action $\tilde{\alpha}$ sera triviale sur les fibres $P_*$ et $P_{-*}$. La connexion $A$ ci-dessus peut-être choisie invariante pour l'action $\tilde{\alpha}$ (c'est-à-dire $\tilde{\alpha}(\gamma)^* A = A$, pour tout $\gamma \in SO_n$). La formule (2.6) donne alors :

$$\mu^A(x) = \gamma \cdot \mu^{\gamma^* A}(x) = \mu^A(\gamma \cdot x).$$

Comme $SO_n$ agit transitivement sur $S^{n-1}$, l'application $\mu^A$ est constante et donc $\xi$ est trivial. □

(6.5) COROLLAIRE. — *Soit $\xi$ un $G$-fibré principal non-trivial sur la sphère $S^n$, $n > 2$. Soit $\alpha$ l'action usuelle de $SO_n$ sur $S^n$ fixant le pôle nord. Supposons qu'il n'existe pas d'homomorphisme non-trivial de $SO_n$ dans $G/C(G)$. Alors, l'action $\beta$ de $SO_n$ sur $\mathcal{B}$ associée à $\alpha$ est sans point fixe irréductible.*

Comme $SO_n$ est un groupe simple, le fait qu'il n'existe pas d'homomorphisme non-trivial de $SO_n$ dans $G/C(G)$ est, par exemple, garanti si $\dim(G/C(G)) < \dim SO_n$.

*Preuve.* — Comme $n > 2$, s'il n'y a pas d'homomorphisme non-trivial de $SO_n$ dans $G/C(G)$, il n'y en a pas non plus de $SO_n$ dans $G$. Par (6.4), l'action $\alpha$ ne provient pas d'une action sur $\xi$. Or, si $\beta$ avait un point fixe irréductible, ce serait le cas par les théorème B1 et B. □

Voici maintenant deux remarques concernant l'usage que notre théorie peut faire des instantons sur une variété de dimension 4 :

(6.6) Supposons que $M$ est une variété riemannienne, compacte et orientée, de dimension 4. Rappelons que, pour un $G$-fibré $\xi$ sur $M$, une connexion $A$ est un *instanton* (ou est *auto-duale*) si sa courbure $F^A$ satisfait à l'équation $F^A = *F^A$ (où $*$ est l'opérateur de Hodge; voir [La]). Les classes d'équivalence de jauge d'instantons constituent un sous-espace $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ (ou $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{B}_1$). Si $\Gamma$ agit sur $M$ par isométrie préservant l'orientation, l'action $\beta$ de $\Gamma$ sur $\mathcal{B}$ préservera $\mathcal{M}$. L'idée vient naturellement, dans le but de vérifier la condition (C3), de restreindre l'action $\beta$ à $\mathcal{M}$ qui est de dimension finie.

Par exemple, prenons $M = S^4$, avec la métrique standard, et l'action usuelle de $\Gamma = SO_5$. Soit $\eta = (S^7 \longrightarrow S^4)$ le $S^3$-fibré de Hopf. L'espace $\mathcal{M}$ est naturellement homéomorphe au disque unité ouvert $D^5$ de dimension 5 et et il ressort de l'analyse de [La], pp. 45-46, que l'action $\beta$ est l'action usuelle de $SO_5$ sur $D^5$. La condition (C3) est donc vérifiée (mais pas la condition (C2)).

(6.7) Considérons l'action usuelle $\alpha$ de $SO_4$ sur $S^4$, fixant le pôle nord et le $S^3$-fibré de Hopf $\xi$. L'action $\alpha$ satisfait à la condition (C1) (puisque $SO_4$ est connexe) et à la condition (C2) (puisque elle a un point fixe). La condition (C3) est également satisfaite par (6.6). Pourtant $\alpha$ ne provient pas d'une action sur $\xi$. En effet, ceci découle de (6.4) puisque $SO_4$ n'admet pas d'homomorphisme non-trivial dans $S^3$ et que $\xi$ n'est pas trivial. Le théorème A est donc faux en général, si $G$ n'est pas abélien.

(6.8) Les deux exemples précédents contrastent avec le fait que l'action de $Spin_5$ sur $S^4$ induite par l'action usuelle de $SO_5$ se relève en une action sur le fibré fibré de Hopf $\eta$. En effet, l'action naturelle de $Sp_2$ sur $S^7 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ donne une action sur $\eta$. L'action induite sur $S^4$ est par isométries, ce qui donne un homomorphisme $\rho : Sp_2 \longrightarrow SO_5$. Il est facile

de voir que $\rho$ est surjectif. Comme $\dim Sp_2 = \dim SO_5$, l'homomorphisme $\rho$ est un revêtement qui, puisque $Sp_2$ est simplement connexe, s'identifie au revêtement universel $Spin_5 \longrightarrow SO_5$. Il est à noter que le revêtement universel $Spin_4 = S^3 \times S^3$ de $SO_4$ admet des homomorphismes non-triviaux sur $S^3$, relevés d'homomorphismes non-triviaux de $SO_4$ dans $SO_3$. En fait, l'élément $(q_1, q_2) \in S^3 \times S^3$ agit sur $(z_1, z_2) \in S^7 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par la formule $(q_1, q_2) \cdot (z_1, z_2) = (q_1 z_1, q_2 z_2)$. L'action induite sur un élément $[z, 1] \in \mathbb{H}P^1 \cong S^4$ $(z \in \mathbb{H})$ est donc

$$(q_1, q_2) \cdot [z, 1] = [q_1 z, q_2] = [q_1 z \bar{q}_2, 1] = [\pi(q_1, q_2)(z), 1]$$

où $\pi : S^3 \times S^3 \longrightarrow SO_4$ est le revêtement universel.

Comme l'élément $(-1, -1) \in Sp_1 \times Sp_1 \subset Sp_2$ agit sur $S^7$ par l'application antipodale, l'action de $SO_5$ sur $S^4$ se relèvera donc en une action sur le fibré $\overline{\eta} : (\overline{p} : \mathbb{R}P^7 \longrightarrow S^4)$, qui est le $SO_3$ fibré de nombre de Pontrjagin $\langle p_1(\overline{\eta}), [S^4] \rangle = 4$.

Les restrictions de ces deux exemples à l'action de $SO_4$ sur $S^4$ constituent une illustration des deux corollaires du théorème B1 établi dans le § 1.

## BIBLIOGRAPHIE


[Bn] K. BROWN, Cohomology of groups, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Do] S. DONALDSON, Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, J. of Differential Geometry, 24 (1986), 275-341.

[FS] R. FINTUSHEL & R. STERN, Definite 4-manifolds, J. of Differential Geometry, 28 (1988), 133-141.

[HY] A. HATTORI & T. YOSHIDA, Lifting compact actions in fiber bundles, Japan J. of Math., 2 (1976), 13-25.

[La] Bl. LAWSON, The theory of gauge fields in four dimensions, Regional Conf. series in Math., 58 (AMS 1985).

[LMS] R. LASHOF & J. MAY & G. SEGAL, Equivariant bundles with abelian structural group, Contemporary Math., Vol 19 (AMS 1983), 167-176.

[KN] S. KOBAYASHI & K. NOMIZU, Foundations of differential topology, Vol I et II, Interscience, New York, 1969.

[PS] R. PALAIS & T. STUART, The cohomology of differentiable transformation groups, Amer. J. of Math., 83 (1961), 623-644.

[St] T. STUART, Lifting group actions in fibre bundle, Annals of Math., 74 (1961), 192-198.

[VE] van EST, On the algebraic cohomology concepts in Lie groups, Indigat. Math., 18 (1955), I, 225-233; II, 286-294.

[Wa] Sh. WANG, Moduli spaces over manifolds with involutions, to appear (Preprint, Michigan State Univ. at East Lansing).

Manuscrit reçu le 6 mars 1992.

D. BRANDT & J.-C. HAUSMANN,
Mathématiques
Université de Genève
B.P. 240
CH-1211 Genève 24 (Suisse).