ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE DU BOIS

Structure de Hodge mixte sur la cohomologie évanescente

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 1 (1985), p. 191-213

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_1_191_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 1 (1985), 191-213

STRUCTURE DE HODGE MIXTE SUR LA COHOMOLOGIE ÉVANESCENTE

par Philippe du BOIS

0. Introduction.

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre d'un $\mathbf{C}$ schéma intègre dans une courbe algébrique lisse sur $\mathbf{C}$.

Soit O un point fermé de S, et $Y = X \times_S \{O\}$, rappelons qu'on définit les *complexes évanescents* $R\psi\,\mathbf{C}_X$ et $R\Phi\,\mathbf{C}_X$ de la façon suivante (cf. [13], XIV) : soit S^{an} un disque de coordonnées centré en O sur l'analytisé de S, S^{an*} le disque S^{an} privé de O, $\widetilde{S}^*$ le revêtement universel de S^{an*},

$X^{an} = X \times_S S^{an}$, $\widetilde{X}^* = X^{an} \times_{S^{an}} \widetilde{S}^*$, $j : \widetilde{X}^* \longrightarrow X^{an}$, $i : Y^{an} \longrightarrow X^{an}$,

et $\mathbf{C}_X$ le faisceau constant de fibre $\mathbf{C}$ sur X^{an}

$$\begin{array}{ccccc} Y^{an} & \xrightarrow{i} & X^{an} & \xleftarrow{j} & \widetilde{X}^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{O\} & \longrightarrow & S^{an} & \longleftarrow & \widetilde{S}^* \end{array}$$

par définition, $R\psi\,\mathbf{C}_X = i^*\,Rj_*\,j^*\,\mathbf{C}_X$ et $R\Phi\,\mathbf{C}_X$ est le cône de $\mathbf{C}_Y \longrightarrow R\psi\,\mathbf{C}_X$; ces deux complexes évanescents sont des objets de $D^b(Y^{an}, \mathbf{C}[\mathbf{Z}])$.

En particulier, pour tout entier i, $\mathbf{H}^i(Y^{an}, R\psi\,\mathbf{C}_X)$ et $\mathbf{H}^i(Y^{an}, R\Phi\,\mathbf{C}_X)$ sont munis d'un automorphisme de monodromie T ; on sait que T est quasi-unipotent de niveau au plus i ([8], 3.2.1), c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $(T^N - Id)^{i+1} = 0$.

Dans cet article, nous construisons des complexes de Hodge mixtes cohomologiques sur Y ([2], 8.1.6) qui incarnent les

Mots-clefs : Structures de Hodge mixtes, Cohomologie évanescente, Monodromie.

complexes évanescents $R\psi \mathbf{C}_X$ et $R\Phi \mathbf{C}_X$. Ils définissent une structure de Hodge mixte (qui ne dépend que du choix d'un paramètre sur S) sur $\mathbf{H}^*(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ et $\mathbf{H}^*(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X)$.

La structure de Hodge mixte sur $\mathbf{H}^*(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ apparait comme limite de celle sur $\mathbf{H}^*(X_s^{an}, \mathbf{C})$ quand s tend vers 0 (théorèmes 2.5 et 2.6). Nous prouvons le résultat suivant (théorème 3.1) : l'action de la monodromie sur $\mathbf{H}^i(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$, (resp. $\mathbf{H}^i(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X)$) est quasi-unipotente de niveau au plus $d_i(\psi)$, (resp. $d_i(\Phi)$), où

$$d_i(\psi) = \sup((b-a)/\forall j, j \in [a,b], Gr_F^j \mathbf{H}^i(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) \neq 0),$$

(resp. $d_i(\Phi)$ = même définition avec Φ au lieu de ψ), il existe donc un entier N tel que $(T^N - Id)^{d_i(\psi)+1}$ est nul sur $\mathbf{H}^i(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ (et de même avec Φ).

Quand f est génériquement lisse, la structure de Hodge mixte sur $\mathbf{H}^i(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ est construite dans [10] et dans [11], et la majoration du niveau d'unipotence est donnée par ([10], 6.1).

Si f est projectif, on trouvera dans [6] une autre construction de structure de Hodge mixte sur $H^i(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$.

Je remercie L. Illusie pour l'aide et les encouragements qu'il m'a apportés pendant la rédaction de ce travail. Je remercie également Mme Bonnardel qui a réalisé en un temps très bref et avec grand soin la frappe du manuscrit.

0.1. *Plan*

On construit en 1. des espaces simpliciaux lisses au-dessus de X, de telle sorte que la fibre générale soit un hyperrecouvrement de la fibre générale de $X \longrightarrow S$ et la fibre spéciale un diviseur à croisements normaux simplicial ; on se ramène de plus au cas où la fibre spéciale est réduite.

On peut alors en 2. construire un complexe de Hodge mixte qui exprime $R\psi \mathbf{C}_X$ (en utilisant [11]), puis un complexe de Hodge mixte qui exprime $\mathbf{C}_Y$, muni d'une flèche dans le précédent. Par passage à la cohomologie, on trouve les structures de Hodge mixtes indiquées plus haut.

En 3., on trouve la majoration du niveau d'unipotence grâce à un lemme de P. Deligne.

0.2. *Notations*

Soient M' un entier tel que $R^i\psi\,\mathbf{C}_X = R^i\Phi\,\mathbf{C}_X = 0$ pour $i \geqslant M'$, M'' un entier tel que

$$H^j(Y^{an}, R^i\psi\,\mathbf{C}_X) = H^j(Y^{an}, R^i\Phi\,\mathbf{C}_X) = 0$$

pour $0 \leqslant i < M'$ et $j \geqslant M''$, et $M = M(X) = M' + M'' + 1$; on a donc $H^i(Y^{an}, R\psi\,\mathbf{C}_X) = H^i(Y^{an}, R\Phi\,\mathbf{C}_X) = 0$ (et $R^i\psi\,\mathbf{C}_X = R^i\Phi\,\mathbf{C}_X = 0$) pour $i \geqslant M - 1$.

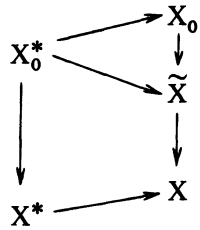
Nous noterons enfin $S^* = S - \{0\}$, $X^* = X \times_S S^*$.

1. Construction d'hyperrecouvrements.

1.1. PROPOSITION. – a) *Soit* $f\colon X \longrightarrow S$ *comme ci-dessus, il existe un* $\mathbf{C}$*-schéma simplicial lisse s-scindé* ([2], 6.2.2.) $X.$, *et une augmentation propre* $\epsilon : X. \longrightarrow X$ (i.e. ϵ_n *est propre pour tout* n), *tels que* $\epsilon : X^*_\cdot = X. \times_X X^* \longrightarrow X^*$ *soit un hyperrecouvrement de* X^* *et que* $D. = X. \times_X Y$ *soit un diviseur à croisements normaux de* $X.$. *Quitte à remplacer* S *par un ouvert dense,* $sq_M\, X^*_\cdot$ *est lisse sur* S^*.

b) *Deux tels systèmes sont coiffés par un même troisième.*

Démonstration. – a) Considérons $X^* \hookrightarrow X$, soit $\widetilde{X}$ une désingularisation de X, X_0^* l'ouvert dense image réciproque de X^* dans $\widetilde{X}$, on peut trouver un X_0 lisse sur $\mathbf{C}$ et $X_0 \xrightarrow{\pi} \widetilde{X}$ propre, de telle sorte que $\pi^{-1}(X_0^*) \xrightarrow{\pi} X_0^*$ soit un isomorphisme et $D_0 = X_0 \times_X Y$ soit un diviseur à croisements normaux de X_0, somme de diviseurs lisses (avec multiplicités), d'où le premier étage de $X.$:



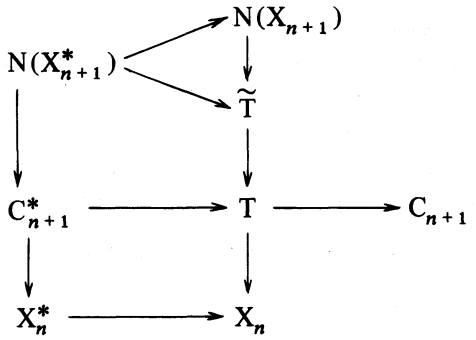
Supposons $sq_n(X.)$ construit, on a une immersion (ouverte, mais d'image non dense en général)

$$C^*_{n+1} = (cosq_n\,(sq_n(X^*_\cdot) \longrightarrow X^*))_{n+1} \longrightarrow C_{n+1}$$
$$= (cosq_n\,(sq_n(X.) \longrightarrow X))_{n+1},$$

notons T l'adhérence de l'image, $\widetilde{T}$ une désingularisation de T (i.e. $\widetilde{T} \longrightarrow T$ est propre et surjectif, et $\widetilde{T}$ est lisse sur **C**), $N(X^*_{n+1}) = \widetilde{T} \times_T C^*_{n+1}$, et prenons pour $N(X_{n+1})$ un schéma lisse sur **C** muni d'une flèche propre $N(X_{n+1}) \xrightarrow{\pi} \widetilde{T}$ telle que $\pi^{-1}(N(X^*_{n+1})) \longrightarrow N(X^*_{n+1})$ soit un isomorphisme, et $N(D_{n+1}) \overset{\text{déf}}{=} N(X_{n+1}) \times_X Y$ un diviseur à croisements normaux de $N(X_{n+1})$, somme de diviseurs lisses. Posons enfin

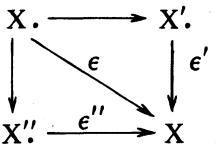
$$X_{n+1} = N(X_{n+1}) \perp\!\!\!\perp \coprod_{i=0}^{i=n} s_i(X_n),$$

et de même avec des *, on a ainsi construit $sq_{n+1}(X.)$:



on remarque que $X^*_{n+1} \longrightarrow C^*_{n+1}$ est propre et surjectif; en répétant cette construction pour tout n, on trouve donc le **C**-schéma simplicial augmenté $\epsilon : X. \longrightarrow X$ demandé.

b) Supposons que $\epsilon' : X'. \longrightarrow X$ et $\epsilon'' : X''. \longrightarrow X$ vérifient les conditions 1.1.a, nous allons construire $\epsilon : X. \longrightarrow X$ qui vérifie les conditions 1.1.a et qui s'insère dans un diagramme commutatif



Notons T d'adhérence de $X_0'^* \times_{X^*} X_0''^*$ dans $X_0' \times_X X_0''$, $\widetilde{T}$ une désingularisation de T, on définit $X_0^* = \widetilde{T} \times_S S^*$ et on prend pour X_0 un schéma lisse sur **C** muni d'une flèche propre $X_0 \xrightarrow{\pi} \widetilde{T}$ telle que $\pi^{-1}(X_0^*) \xrightarrow{\pi} X_0^*$ soit un isomorphisme et $X_0 \times_S \{0\}$ soit un diviseur à croisements normaux de X, somme de diviseurs lisses (avec multiplicités).

Supposons $sq_n(X.)$ construit, on construit X_{n+1} en procédant comme pour 1.1.a) à partir de

$$C_{n+1} = X'_{n+1} \times_{(cosq_n\ sq_n X'.)_{n+1}} (cosq_n\ sq_n X.)_{n+1} \times_{(cosq_n sq_n X''.)_{n+1}} X''_{n+1}$$

et
$$C^*_{n+1} = C_{n+1} \times_S S^*.$$

La flèche $X''^*_{n+1} \longrightarrow (cosq_n\ sq_n X''.^*)_{n+1}$ est propre et surjective (en effet, $X''.^*$ est un hyperrecouvrement de X^*), par suite la flèche $C^*_{n+1} \longrightarrow X'^*_{n+1} \times_{(cosq_n\ sq_n X'.^*)_{n+1}} (cosq_n\ sq_n X.^*)_{n+1}$ est propre et surjective. Il en est de même par construction de $X^*_{n+1} \longrightarrow C^*_{n+1}$, et par composition, on voit que la flèche

$$X^*_{n+1} \longrightarrow X'^*_{n+1} \times_{(cosq_n\ sq_n X'.^*)_{n+1}} (cosq_n\ sq_n X.^*)_{n+1}$$

est propre et surjective, ce qui entraîne que $X.^* \longrightarrow X^*$ est un hyperrecouvrement, car $X'.^* \longrightarrow X^*$ en est un (cf. [2], 5.3.5).

On trouve donc ainsi le **C** schéma simplicial augmenté $\epsilon : X. \longrightarrow X$ demandé.

1.2. *Remarque.* – On notera qu'en général D. n'est pas un hyperrecouvrement de Y. L'explication de ce fait apparait sur l'exemple simple suivant : supposons X lisse et $f : X \longrightarrow S$ lisse, sauf en un point de $Y = f^{-1}(0)$; notons $\epsilon_0 : X_0 \longrightarrow X$ une désingularisation de f, i.e. X_0 est lisse, ϵ_0 propre et surjective, $\epsilon_0 : X_0 \times_S S^* \longrightarrow X \times_S S^*$ est un isomorphisme, et $(f\epsilon_0)^{-1}(0)$ est un diviseur à croisements normaux de X_0 ; $(f\epsilon_0)^{-1}(0)$ est la réunion d'une désingularisation $\widetilde{Y}$ de Y et de diviseurs exceptionnels E_i ; la diagonale de $X_0 \times_X X_0$ est une composante irréductible (isomorphe à X_0) de $X_0 \times_X X_0$, et les $E_i \times E_j$ sont aussi des composantes irréductibles de $X_0 \times_X X_0$; celui-ci étant réductible, on ne peut le désingulariser, ni espérer que la construction 1.1 donne un D. qui soit un hyperrecouvrement de Y.

1.3. Soit s un générateur de $m_{S,0}$, et pour tout entier $d \geqslant 1$, soit S_d la normalisation de S dans l'extension de corps engendrée par $s^{1/d}$; notons $\pi_d : S_d \longrightarrow S$ le morphisme canonique, $O_d = \pi_d^{-1}(O)$, $S_d^* = S_d$ privé de O_d.

Si $f : Z \longrightarrow S$ est un morphisme d'une variété algébrique Z dans S, si f est lisse sur S^*, et si $Z \times_S \{O\}$ est un diviseur à croisements normaux (un D.C.N), somme de diviseurs lisses, il existe un entier e et une variété Z_e lisse, propre sur $Z \times_S S_e$ telle que $Z_e \times_{S_e} S_e^*$ est isomorphe à $Z \times_S S_e^*$ et $F_e = Z_e \times_{S_e} \{O_e\}$ est un D.C.N. réduit, somme de diviseurs lisses (théorème de réduction semi-stable, [7], II). On appellera une telle Z_e la lissifiée de $Z \times_S S_e$.

Si d est un multiple de e, $Z_d = Z_e \times_{S_e} S_d$ est une V-variété, et $F_d = Z_d \times_{S_d} \{O_d\} = Z_e \times_{S_e} \{O_e\}$ est un diviseur à V-croisements normaux (un D.V.C.N) réduit, somme de diviseurs lisses (cf. [7], II.3 et [12], 2.2). On notera f_e (resp. f_d) le morphisme $Z_e \longrightarrow S_e$ (resp. $Z_d \longrightarrow S_d$).

Si Σ est le lieu singulier de Z_d, et $j : Z_d - \Sigma \longrightarrow Z_d$ l'inclusion, on définit $\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Z_d} = j_* \Omega^{\cdot}_{Z_d - \Sigma}$,

$$\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Z_d}(\log F_d) = j_* \Omega^{\cdot}_{Z_d - \Sigma}(\log F_d - \Sigma)$$

et

$$\widetilde{\Omega}^{p}_{Z_d/S_d}(\log F_d) = \widetilde{\Omega}^{p}_{Z_d}(\log F_d)/f_d^* \Omega^1_{S_d}(\log O_d) \wedge \widetilde{\Omega}^{p-1}_{Z_d}(\log F_d).$$

D'après ([9], 1 et 2), on dispose d'un dictionnaire qui met en parallèle les propriétés de $\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Z_d}$ (resp. $\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Z_d}(\log F_d)$, resp. $\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Z_d/S_d}(\log F_d)$) et celles de $\Omega^{\cdot}_{Z_e}$ (resp. $\Omega^{\cdot}_{Z_e}(\log F_e)$, resp. $\Omega^{\cdot}_{Z_e/S_e}(\log F_e)$).

1.4. PROPOSITION. — *Soit* $X \longrightarrow S$ *comme en 1.1, il existe un entier* $a \geqslant 1$, *un* C*-schéma simplicial s-scindé* M*-tronqué* $X'.$ *dont les composantes sont des* V*-variétés, et une augmentation propre* $\epsilon' : X'. \longrightarrow X' = X \times_S S_a$, *tels que, si on note* $X'^* =: X' \times_{S_a} S_a^*$ *et* $X'^*. =: X'. \times_{S_a} S_a^*$, $\epsilon' : X'^*. \longrightarrow X'^*$ *soit un hyperrecouvrement* M*-tronqué de* X'^*, *et que* $D'. = X'. \times_{S_a} \{O_a\}$ *soit un D.V.C.N. réduit de* $X'.$. *De plus,* $X'^*.$ *est lisse sur* S_a^*.

Démonstration. — Les espaces simpliciaux étudiés sont s-scindés, il suffit donc de construire $N'_i = N(X'_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant M$.

Partons de (*) :

$$N_M \xrightarrow{\longrightarrow} N_{M-1} \xrightarrow{\longrightarrow} \cdots \xrightarrow{\longrightarrow} N_1 \longrightarrow N_0 \longrightarrow X \longrightarrow S$$

(où $N_i = N(X_i)$). D'après 1.3, on peut trouver un entier d_0 tel que la lissifiée N_{0,d_0} de $N_0 \times_S S_{d_0}$ soit lisse, et que $N_{0,d_0} \times_{S_{d_0}} \{O_{d_0}\}$ soit un D.C.N. réduit. On a

$$N_{0,d_0} \times_{S_{d_0}} S^*_{d_0} \cong N_0 \times_S S_{d_0} \times_{S_{d_0}} S^*_{d_0} = N_0 \times_S S^*_{d_0},$$

on voit que $N_{0,d_0} \times_{S_{d_0}} S^*_{d_0}$ est lisse sur $S^*_{d_0}$; le diagramme (*) devient donc

$$N_M \times_S S_{d_0} \xrightarrow{\longrightarrow} N_{M-1} \times_S S_{d_0} \xrightarrow{\longrightarrow} \cdots \xrightarrow{\longrightarrow} N_1 \times_S S_{d_0} \xrightarrow{(1)} N_{0,d_0} \longrightarrow X \times_S S_{d_0} \longrightarrow S_{d_0}$$

où les flèches (1) sont deux applications rationnelles définies au-dessus de $S^*_{d_0}$.

En effectuant des modifications dans la fibre de $N_1 \times_S S_{d_0} \longrightarrow S_{d_0}$ au-dessus de O_{d_0}, on peut trouver une double flèche $N_{1,d_0} \xrightarrow{\longrightarrow} N_{0,d_0}$ qui élimine les indéterminations de (1) et telle que $N_{1,d_0} \times_{S_{d_0}} \{O_{d_0}\}$ soit un D.C.N., d'où un nouveau diagramme

$$N_M \times_S S_{d_0} \xrightarrow{\longrightarrow} \cdots \xrightarrow{\longrightarrow} N_2 \times_S S_{d_0} \xrightarrow{(2)} N_{1,d_0} \xrightarrow{\longrightarrow} N_{0,d_0} \longrightarrow X \times_S S_{d_0} \longrightarrow S_{d_0}.$$

En itérant ce procédé, on trouve un diagramme $(*_0)$

$$N_{M,d_0} \xrightarrow{\longrightarrow} N_{M-1,d_0} \xrightarrow{\longrightarrow} \cdots \xrightarrow{\longrightarrow} N_{1,d_0} \xrightarrow{\longrightarrow} N_{0,d_0} \longrightarrow X \times_S S_{d_0} \longrightarrow S_{d_0} \qquad (*_0)$$

qui vérifie : au-dessus de $S^*_{d_0}$, le diagramme $(*_0)$ s'obtient à partir de (*) par le changement de base $S^*_{d_0} \longrightarrow S^*$, les fibres $N_{i,d_0} \times_{S_{d_0}} \{O_{d_0}\}$ sont des D.C.N., la fibre $N_{0,d_0} \times_{S_{d_0}} \{O_{d_0}\}$ est un D.C.N. réduit.

On applique ensuite 1.3 à $N_{1,d_0} \longrightarrow S_{d_0}$, on trouve un multiple d_1 de d_0, tel que la lissifiée N_{1,d_1} de $N_{1,d_0} \times_{S_{d_0}} S_{d_1}$ soit lisse et que $N_{1,d_1} \times_{S_{d_1}} \{O_{d_1}\}$ soit un D.C.N. réduit. De plus d'après 1.3, $N_{0,d_1} =: N_{0,d_0} \times_{S_{d_0}} S_{d_1}$ est une V-variété, $N_{0,d_1} \times_{S_{d_1}} \{O_{d_1}\}$ est un D.V.C.N. réduit, on a donc un diagramme

$$N_{M,d_0} \times_{S_{d_0}} S_{d_1} \overset{\longrightarrow}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\longrightarrow}{\dashrightarrow} N_{2,d_0} \times_{S_{d_0}} S_{d_1} \overset{\dashrightarrow}{\dashrightarrow} N_{1,d_1}$$
$$\longrightarrow N_{0,d_1} \longrightarrow X \times_S S_{d_1} \longrightarrow S_{d_1}.$$

A l'aide de modifications adéquates au-dessus de O_{d_1}, on construit comme ci-dessus un diagramme $(*_1)$,

$$N_{M,d_1} \overset{\longrightarrow}{\dashrightarrow} N_{M-1,d_1} \overset{\longrightarrow}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\longrightarrow}{\dashrightarrow} N_{1,d_1} \longrightarrow N_{0,d_1}$$
$$\longrightarrow X \times_S S_{d_1} \longrightarrow S_{d_1} \qquad (*_1)$$

qui vérifie les mêmes propriétés que $(*_0)$, et tel que $N_{1,d_1} \times_{S_{d_1}} \{O_{d_1}\}$ et $N_{0,d_1} \times_{S_{d_1}} \{O_{d_1}\}$ sont des D.V.C.N. réduits.

En poursuivant la construction, on trouve finalement un entier $a = d_M$, et un diagramme $(**)$,

$$N'_M \overset{\longrightarrow}{\dashrightarrow} N'_{M-1} \overset{\longrightarrow}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\longrightarrow}{\dashrightarrow} N'_1 \longrightarrow N'_0 \longrightarrow X \times_S S_a \longrightarrow S_a, \qquad (**)$$

(on notera N'_i au lieu de N_{i,d_M} et S' au lieu de S_a) qui vérifie les propriétés suivantes : pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant M$, N'_i est une V-variété, $N'_i \times_{S'} \{O_a\}$ est un D.V.C.N. réduit, somme de diviseurs lisses, $N'_i \times_{S'} S'^*$ est isomorphe à $N_i \times_S S'^*$, et lisse sur S'^*.

Les flèches du diagramme $(*)$ vérifient des relations $(\delta_j \delta_j = \delta_j \delta_{j+1})$ qui traduisent le fait que $N_i = N(X_i)$; au-dessus de S'^*, le diagramme $(**)$ s'obtient à partir de $(*)$ par le changement de base $\pi : S' \longrightarrow S$, les mêmes relations sont donc vérifiées par $(**)$ sur un ouvert dense et donc en tout point ; par suite, il existe un **C**-schéma simplicial s-scindé, M-tronqué $X'.$ tel que $N'_i = N(X'_i)$.

Vu la construction, $X'.^* \longrightarrow X'^*$ est un hyperrecouvrement M-tronqué de X'^*, d'où la proposition.

1.5. Si b est un multiple de a, le changement de base $S_b \longrightarrow S_a$ donne des objets que l'on notera

$S'' = S_b$, $X'' = X' \times_{S_a} S_b$, $X''_\cdot = X'_\cdot \times_{S_a} S_b$. D'après 1.4 et 1.3, $\epsilon'' : X''_\cdot \longrightarrow X''$ vérifie les propriétés 1.4.

Le résultat suivant est bien connu ([8], 3.1).

1.6. PROPOSITION. – *Soit* $f : X \longrightarrow S$ *comme plus haut, l'action de la monodromie sur* $\mathbf{H}^*(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ *et sur* $\mathbf{H}^*(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X)$ *est quasi-unipotente.*

Démonstration. – La flèche d'adjonction

$$\mathbf{C}_X \longrightarrow R\epsilon_* \mathbf{C}_{X_\cdot} = R\epsilon_* \epsilon^* \mathbf{C}_X$$

donne un quasi-isomorphisme $j^* \mathbf{C}_X \xrightarrow{\simeq} j^* R\epsilon_* \mathbf{C}_{X_\cdot}$, car $X^*_\cdot \longrightarrow X^*$ est un hyperrecouvrement, d'où un quasi-isomorphisme

$$R\psi \mathbf{C}_X \xrightarrow{\simeq} R\psi R\epsilon_* \mathbf{C}_{X_\cdot}$$

En composant avec l'isomorphisme $R\psi R\epsilon_* \mathbf{C}_{X_\cdot} \xrightarrow{\simeq} R\epsilon_* R\psi \mathbf{C}_{X_\cdot}$ (ϵ est propre), on trouve un isomorphisme

$$R\psi \mathbf{C}_X \xrightarrow{\simeq} R\epsilon_* R\psi \mathbf{C}_{X_\cdot}, \qquad (1.6.1)$$

puis une flèche qui est un quasi-isomorphisme en degré $\leqslant M - 1$

$$R\psi \mathbf{C}_X \longrightarrow R\epsilon_* R\psi \mathbf{C}_{sq_M X_\cdot}. \qquad (1.6.2)$$

Le morphisme de triangles distingués ci-dessous donne une flèche 1.6.3 qui est un quasi-isomorphisme en degré $\leqslant M - 1$:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{C}_Y & \longrightarrow & R\psi \mathbf{C}_X & \longrightarrow & R\Phi \mathbf{C}_X \\
\downarrow & & \downarrow (1.6.2) & & \downarrow (1.6.3) \\
\mathbf{C}_Y & \longrightarrow & R\epsilon_* R\psi \mathbf{C}_{sq_M X_\cdot} & \longrightarrow & \text{cône}(\mathbf{C}_Y \longrightarrow R\epsilon_* R\psi \mathbf{C}_{sq_M X_\cdot})
\end{array}$$

Les flèches 1.6.2 et 1.6.3 permettent donc de calculer tous les termes non nuls de $R^*\psi \mathbf{C}_X$ et $R^*\Phi \mathbf{C}_X$.

Notons π le morphisme $X' \longrightarrow X$, on a un isomorphisme $\pi^* R\psi \mathbf{C}_X \xrightarrow{1.6.4} R\psi \mathbf{C}_{X'}$, et de même que 1.6.2, une flèche 1.6.5 qui est un quasi-isomorphisme en degré $\leqslant M - 1$

$$R\psi_{\mathbf{C}_{X'}} \xrightarrow{1.6.5} R\epsilon'_* R\psi \mathbf{C}_{X'_\cdot}.$$

Si T est un générateur de la monodromie sur X, T^a donne par 1.6.4 et 1.6.5 un générateur (encore noté T^a) de la monodromie sur $X' \longrightarrow S'$ et $X'_\cdot \longrightarrow S'$.

D'après la construction 1.4, pour $0 \leqslant i \leqslant N$, N'_i est de la forme $N_{i,b} \times_{S_b} S_a$, où b divise a, $N_{i,b}$ est lisse, et $N_{i,b} \times_{S_b} \{O_b\}$ est un D.C.N. réduit ; d'après ([11], 2.2.1) T^b est donc l'identité sur $R^* \psi \mathbf{C}_{N_{i,b}}$, et T^a est alors l'identité sur $R^* \psi \mathbf{C}_{N'_i}$.

D'autre part, X'_n est somme disjointe de copies des N'_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, T^a est donc l'identité sur $R^* \psi \mathbf{C}_{X'_n}$, pour $0 \leqslant n \leqslant M$.

On voit que T^a agit trivialement sur le terme E_2^{pq} de la suite spectrale T^a équivariante

$$E_2^{pq} = H^p(D'^{an}_\cdot, R^q \psi \mathbf{C}_{X'_\cdot}) \Longrightarrow H^*(D'^{an}_\cdot, R \psi \mathbf{C}_{X'_\cdot}) \xrightarrow[\text{et } 1.6.5]{1.6.4} H^*(Y^{an}, R \psi \mathbf{C}_X),$$

T^a agit trivialement sur E_∞ et laisse stable le drapeau "filtration de l'aboutissement", l'action de T^a sur $H^*(Y^{an}, R \psi \mathbf{C}_X)$ est donc unipotente.

L'action de T^a sur $H^*(Y^{an}, R \Phi \mathbf{C}_X)$ est également unipotente, on a en effet un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H^i(Y^{an}, \mathbf{C}) & \longrightarrow & H^i(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) & \longrightarrow & H^i(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X) & \longrightarrow & H^{i+1}(Y^{an}, \mathbf{C}) & \\
& (1)\downarrow 0 & & (2)\downarrow (T^a - Id)^n & & (3)\downarrow (T^a - Id)^n & & (4)\downarrow 0 & \\
\longrightarrow & H^i(Y^{an}, \mathbf{C}) & \longrightarrow & H^i(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) & \longrightarrow & H^i(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X) & \longrightarrow & H^{i+1}(Y^{an}, \mathbf{C}) & \\
\longrightarrow & H^{i+1}(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) & \longrightarrow & & & & & & \\
& (5)\downarrow (T^a - Id)^n & & & & & & & \\
\longrightarrow & H^{i+1}(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) & \longrightarrow & & & & & &
\end{array}$$

choisissons n de telle sorte que les flèches (2) et (5) soient nulles, on voit alors que $(T^a - Id)^n$ est nilpotent sur $H^i(Y^{an}, R \Phi \mathbf{C}_X)$, d'où la proposition.

1.7. PROPOSITION. – *Soient* $\epsilon : X_\cdot \longrightarrow X$ *et* $\eta : V_\cdot \longrightarrow X$ *deux schémas simpliciaux augmentés vers* X *vérifiant 1.1.a, soit* $\beta : V_\cdot \longrightarrow X_\cdot$ *tel que* $\eta = \epsilon\beta$. *Il existe un entier* $a \geqslant 1$ *tel que, si l'on note* $X' = X \times_S S_a$, *on peut trouver* $\epsilon' : X'_\cdot \longrightarrow X'$, $\eta' : V'_\cdot \longrightarrow X'$ *et* $\beta' : V'_\cdot \longrightarrow X'_\cdot$ *tels que* $\eta' = \epsilon'\beta'$ *et que* ϵ' *et* η' *vérifient tous deux 1.4.*

Démonstration. – On procède comme en 1.4, en plus compliqué.

1.8. Nous pouvons maintenant appliquer aux espaces simpliciaux construits plus haut les méthodes de Steenbrink [11] et [12] pour étudier $R\psi\,\mathbf{C}_X$ et $R\Phi\,\mathbf{C}_X$.

2. Construction de complexes de Hodge mixtes cohomologiques (C.H.M.C.).

2.1. Avec les notations du 1.4, on a d'après ([11], 4 et [12], 2), $D'_\cdot$ étant réduit, un quasi-isomorphisme

$$R\psi\,\mathbf{C}_{X'_\cdot} \longrightarrow \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{D'_\cdot} ;$$

choisissons un paramètre t sur S' (i.e. un générateur de $m_{S',0}$), qui vérifie $t^a = s$, posons $\theta = \epsilon'^*\left(\frac{dt}{t}\right) = \epsilon'^*\left(\frac{ds}{as}\right)$, notons $A^{pq} = \widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{X'_\cdot}(\log D'_\cdot)/W_q\,(\widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{X'_\cdot}(\log D'_\cdot))$,

définissons $d' : A^{pq} \longrightarrow A^{p+1,q}$ par $d'(\omega) = cl(d\omega)$, et $d'' : A^{pq} \longrightarrow A^{p,q+1}$ par $d''(\omega) = cl(\theta \wedge \omega)$; $(A^{\cdot\cdot}, d', d'')$ est un complexe double et nous noterons $A^\cdot$ le complexe simple associé.

La flèche $\widetilde{\theta} : \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{D'_\cdot} \longrightarrow A^\cdot$ définie par $\widetilde{\theta}(\omega) = (-1)^p\,\theta \wedge \omega$ pour une section ω de

$$\widetilde{\Omega}^{p}_{X'_n/S'}(\log D'_n) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_n}} \mathcal{O}_{D'_n}$$

est un quasi-isomorphisme ([11], 4.16) d'où une deuxième représentation de $R\psi\,\mathbf{C}_{X'_\cdot}$.

On définit sur A des filtrations F et W par

$$F^p A^\cdot = \bigoplus_{\substack{p' \geqslant p \\ q \geqslant 0}} A^{p'q}, W_r A^\cdot = \bigoplus_{p,q \geqslant 0} W_r A^{pq}$$

où

$$W_r A^{pq} = W_{2q+r+1} \widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{X'_\cdot} (\log D'_\cdot) / W_q \widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{X'_\cdot} (\log D'_\cdot).$$

D'après ([11], 4.19) les données $R\psi \mathbf{Z}_{X'_\cdot}$, $(R\psi \mathbf{Q}_{X'_\cdot}, W)$ (W est définie en ([11], 4.11)) et $(A^\cdot, F, W)$ définissent un C.H.M.C. sur $D'_\cdot$.

Soient $\beta : {}^2X'_\cdot \longrightarrow {}^1X'_\cdot$ et ${}^i\epsilon : {}^iX'_\cdot \longrightarrow S'$ ($i = 1$ ou 2) vérifiant ${}^2\epsilon = {}^1\epsilon\beta$ comme en 1.7, on définit de même des C.H.M.C. sur ${}^iD'_\cdot$, nous noterons

$${}^iA^{pq} = \widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{{}^iX'_\cdot} (\log {}^iD'_\cdot) / W_q (\widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{{}^iX'_\cdot} (\log {}^iD'_\cdot))$$

et ${}^iA^n = \bigoplus_{p+q=n} {}^iA^{pq}$. La flèche β définit des morphismes $\beta^* : {}^1A^{pq} \longrightarrow R\beta_* {}^2A^{pq}$ et un morphisme de C.H.M.C.

$$\beta^* : (R\psi \mathbf{Z}_{1X'_\cdot}, R\psi \mathbf{Q}_{1X'_\cdot}, {}^1A^\cdot) \longrightarrow (R\beta_* R\psi \mathbf{Z}_{2X'_\cdot}, R\beta_* R\psi \mathbf{Q}_{2X'_\cdot}, R\beta_* {}^2A^\cdot).$$

Par passage à la cohomologie, d'après ([2], 8.1.15), nous trouvons pour $0 \leqslant j \leqslant M$ une structure de Hodge mixte sur $H^j({}^iD'_\cdot, {}^iA') = H^j({}^iD'_\cdot, \widetilde{\Omega}^\cdot_{{}^iX'_\cdot/S'} (\log {}^iD'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{{}^iX'_\cdot}} \mathcal{O}_{{}^iD'_\cdot})$.

Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(1)} & (H^j({}^1D'_\cdot, {}^1A^\cdot) \\ & & \downarrow \beta^* \\ H^j(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) & & \\ & \xrightarrow[(2)]{} & H^j({}^2D'_\cdot, {}^2A^\cdot). \end{array}$$

Les flèches (1) et (2) ci-dessous sont par construction des isomorphismes d'espaces vectoriels, il en est donc de même pour β^* ; celui-ci est compatible à F et W, c'est donc un isomorphisme de S.H.M..

Soient $X'_\cdot$ et $X''_\cdot$ comme dans 1.5, on remarque que $X''_\cdot \longrightarrow S'$ est lisse au-dessus de S'^*, et que $D''' = X''_\cdot \times_{S'} \{O\}$ est un D.V.C.N. de $X''_\cdot$, on peut donc former

$$\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X''/S'}(\log D'''^{\cdot}) = \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X''/S''}(\log D''^{\cdot})$$

et

$$\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X''/S'}(\log D'''^{\cdot}) \otimes_{e_{X''}} \mathcal{O}_{D'''} = \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X''/S''}(\log D''^{\cdot}) \otimes_{e_{X''}} \mathcal{O}_{D''}.$$

Nous trouvons donc une flèche γ^* :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'/S'}(\log D'^{\cdot}) \otimes_{e_{X'}} \mathcal{O}_{D'} & \longrightarrow & R\gamma_*(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X''/S'}(\log D'''^{\cdot}) \otimes_{e_{X''}} \mathcal{O}_{D'''}) \\ & \searrow^{\gamma^*} & \| \\ & & R\gamma_*(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X''/S''}(\log D''^{\cdot}) \otimes_{e_{X''}} \mathcal{O}_{D''}) \end{array}$$

Posons $A''^{pq} = \widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{X''}(\log D''^{\cdot})/W_q$

$A'''^{pq} = \widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{X''}(\log D'''^{\cdot})/W_q$,

on définit comme plus haut des complexes doubles $A''^{\cdot\cdot}$ et $A'''^{\cdot\cdot}$; ils vérifient $A''^{pq} = A'''^{pq}$, $d'_{A''} = d'_{A'''}$ et $d''_{A'''} = bd''_{A''}$, on a donc un isomorphisme bifiltré $(A'''^{\cdot\cdot}, F, W) \longrightarrow (A''^{\cdot\cdot}, F, W)$ et de même en passant aux complexes simples associés $\underline{s}(A'''^{\cdot\cdot}) = A'''^{\cdot}$ et $\underline{s}(A''^{\cdot\cdot}) = A''^{\cdot}$, un isomorphisme bifiltré

$$(A''^{\cdot}, F, W) \xleftarrow{\sim} (A'''^{\cdot}, F, W).$$

Le morphisme naturel $(A^{\cdot}, F, W) \longrightarrow R\gamma_*(A'''^{\cdot}, F, W)$ donne par composition un morphisme γ^*

$$(A, F, W) \xrightarrow{\gamma^*} R\gamma_*(A''^{\cdot}, F, W),$$

par passage à la cohomologie, on trouve un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \overset{(1)}{\nearrow} & H^j(D'^{\cdot}, A^{\cdot}) \\ & & \downarrow \gamma^* \\ H^j(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) & & \\ & \underset{(2)}{\searrow} & H^j(D''^{\cdot}, A''^{\cdot}). \end{array}$$

Comme plus haut, on trouve que γ^* est un isomorphisme de S.H.M..

En conclusion, nous avons ainsi construit pour $0 \leqslant j < M$, et donc pour tout j, une S.H.M. sur $H^j(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$; cette structure ne dépend que du choix du paramètre s sur S.

L'action de $N = \log T^a$ (où T est le générateur de la mono-

dromie sur $H(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X))$, s'exprime simplement via les isomorphismes ci-dessus :
d'une part, N est le bord de la suite exacte de cohomologie pour H^* de la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Omega}^{\cdot-1}_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{D'_\cdot} \longrightarrow \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'_\cdot}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{D'_\cdot}$$
$$\longrightarrow \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{D'_\cdot} \longrightarrow 0 (*)$$

et d'autre part, si l'on note $\nu : A^{pq} \longrightarrow A^{p-1, q+1}$ la projection canonique, d'après ([11], 4.22), N est induit par l'endomorphisme $\widetilde{\nu}$ de $A^\cdot$ qui est $(-1)^{p+q+1}\nu$ sur A^{pq}.

On voit facilement que $\widetilde{\nu}(W_r A^\cdot) \subset W_{r-2} A^\cdot$ et que $\widetilde{\nu}(F^p A^\cdot) \subset F^{p-1} A^\cdot$, par suite N est un morphisme de structures de Hodge mixtes de type $(-1, -1)$.

Nous trouvons donc le théorème suivant :

2.2. THEOREME. – *Soit* $f : X \longrightarrow S$ *un morphisme propre d'un* $\mathbf{C}$*-schéma intègre dans une courbe algébrique lisse sur* $\mathbf{C}$, *soit* O *un point fermé de* S *et* $Y = X \times_S \{O\}$, *le quasi-isomorphisme* $R\psi \mathbf{C}_{X'_\cdot} \xrightarrow{2.1} A^\cdot$ *définit sur* $H^*(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ *une structure de Hodge mixte qui ne dépend que du choix du paramètre* s sur S.

Si $a = \deg(S'/S) = [\mathbf{C}(S') : \mathbf{C}(S)]$, l'endomorphisme $N = \log T^a$ de $H^*(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ est un morphisme de structures de Hodge mixtes de type $(-1, -1)$.

Les théorèmes 2.5 et 2.6 décrivent le lien entre la structure de Hodge mixte de $H^*(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ et celle de $H^*(X_s^{an}, \mathbf{C})$.

En conservant les mêmes notations, on a les résultats suivants :

2.3. PROPOSITION. – *Soient* $s' \in S'^*$, *et* $s = \pi(s')$, *on a pour tout* q, $0 \leqslant q < M$, *des isomorphismes*

$$H^q(X'_{\cdot s'}, \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{X'_{\cdot s'}}) \cong H^q(X'^{an}_{\cdot s'}, \mathbf{C}) \cong H^q(X_s^{an}, \mathbf{C}).$$

Démonstration. – On a $\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{X'_{\cdot s'}} \cong \Omega^{\cdot}_{X'_{\cdot s'}}$, dont l'analytisé est une résolution de $\mathbf{C}_{X'^{an}_{\cdot s'}}$, d'où le premier isomorphisme ; de plus $X'_{\cdot s'} \longrightarrow X_s$ est un hyperrecouvrement M-tronqué de $X_s \cong X'_{s'}$, d'où le second isomorphisme.

Si on filtre ces espaces par la filtration de Hodge F, on trouve :

2.4. PROPOSITION. – *Soient* $s' \in S'^*$, *et* $s = \pi(s')$, *on a, pour tous* p *et* q *tels que* $0 \leqslant p+q < M$, *des isomorphismes :*

$$H^q(X'^{\cdot}_{s'}, \widetilde{\Omega}^p_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'^{\cdot}}} \mathcal{O}_{X'^{\cdot}_{s'}})$$
$$\cong Gr_F^p H^{p+q}(X'^{an}_{s'}, \mathbf{C}) \cong Gr_F^p H^{p+q}(X_s^{an}, \mathbf{C}).$$

2.5. THEOREME. – *Pour tout* q, $0 \leqslant q < M$, *le faisceau* $R^q \epsilon'_*(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}))$ *est localement libre sur* S', *et pour tout* $s' \in S'$, *le morphisme canonique*

$$R^q \epsilon'_*(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot})) \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} (\mathcal{O}_{S',s'}/m_{S',s'})$$
$$\longrightarrow \mathbf{H}^q(X'^{\cdot}_{s'}, \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'^{\cdot}}} \mathcal{O}_X)$$

est un isomorphisme.

Si $s' \neq 0$, $H^q(X'^{\cdot}_{s'}, \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'^{\cdot}}} \mathcal{O}_{X'^{\cdot}_{s'}}) \simeq H^q(X_s^{an}, \mathbf{C})$, et $H^q(D'^{\cdot}, \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'^{\cdot}}} \mathcal{O}_{D'^{\cdot}}) \cong H^q(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$.

Démonstration. – Comme dans ([11], 2.18), on utilise le théorème ([9], corollaire 2, p. 50) : $X'^{*} \longrightarrow S^*$ est un fibré vectoriel C^∞ localement trivial, ϵ' est plat, et d'après 2.1 et 2.3, la fonction $s' \longmapsto \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^q(X'^{\cdot}_{s'}, \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'^{\cdot}}} \mathcal{O}_{X'^{\cdot}_{s'}})$ est localement constante sur S', car

$$H^q(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) = H^q(D'^{an}, R\psi \mathbf{C}_{X'^{\cdot}}) = H^q(X'^{an} \times_{S'^{an}} \widetilde{S}^*, \mathbf{C})$$
$$= H^q(X'^{an}_{s'}, \mathbf{C})$$

($X'^{an} \times_{S'^{an}} \widetilde{S}^*$ se rétracte sur $X'^{an}_{s'}$), d'où le théorème.

2.6. THEOREME. – *Pour tous* p *et* q *tels que* $0 \leqslant p+q < M$, *le faisceau* $R^q \epsilon'_*(\widetilde{\Omega}^p_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}))$ *est localement libre sur* S' *et pour tout* $s' \in S'$, *le morphisme canonique*

$$R^q \epsilon'_*(\widetilde{\Omega}^p_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}) \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} (\mathcal{O}_{S',s'}/m_{S',s'}))$$
$$\longrightarrow H^q(X'^{\cdot}_{s'}, \widetilde{\Omega}^p_{X'^{\cdot}/S'}(\log D'^{\cdot}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'^{\cdot}}} \mathcal{O}_{X'^{\cdot}_{s'}}$$

est un isomorphisme.

En particulier,

$$Gr_F^p H^{p+q}(X_s^{an}, \mathbf{C}) = H^q(X'_{s'}, \widetilde{\Omega}^p_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{X'_{\cdot s'}})$$

et $Gr_F^p H^{p+q}(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) = H^q(D'_\cdot, \widetilde{\Omega}^p_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{D'_\cdot})$

ont même dimension.

Démonstration. – Les suites spectrales suivantes dégénèrent en E_1 :

$$E_1^{pq}(O) = H^q(D'_\cdot, \widetilde{\Omega}^p_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{D'_\cdot}) \Longrightarrow H^{p+q}(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$$

et pour $s' \in S'^*$ et $s = \pi(s')$

$$E_1^{pq}(s') = H^q(X'_{s'}, \widetilde{\Omega}^p_{X'_\cdot/S'}(\log D'_\cdot) \otimes_{\mathcal{O}_{X'_\cdot}} \mathcal{O}_{X'_{\cdot s'}}) \Longrightarrow H^{p+q}(X_s^{an}, \mathbf{C}).$$

Par suite, la fonction $s' \longmapsto \sum_{p+q=n} \dim_{\mathbf{C}} E_1^{pq}(s')$ $(0 \leqslant n < M)$ est localement constante sur S'. Les fonctions $s' \longmapsto \dim_{\mathbf{C}} E_1^{pq}(s')$ sont de plus s.c.s. sur S', elles sont donc constantes, et on conclut comme en 2.5.

2.7. Nous allons maintenant exprimer la flèche de $D^b(Y)$ $\mathbf{C}_{Y^{an}} \longrightarrow R\psi \mathbf{C}_X$ en termes de C.H.M.C. ; en premier lieu, exprimons la flèche de $D^b(D'_\cdot) : \mathbf{C}_{D'_\cdot} \longrightarrow R\psi \mathbf{C}_{X'_\cdot}$ en termes de C H.M.C.

Le normalisé $\widetilde{D}_\cdot$ de $D'_\cdot$ est lisse, en effet, d'après 1.3, D'_n est somme de diviseurs lisses ; soit $\widetilde{D}^{(k)}_\cdot$ la somme disjointe des intersections k à k des composantes de $D'_\cdot$ (donc $\widetilde{D}_\cdot = \widetilde{D}^{(1)}_\cdot$) notons $a_k : \widetilde{D}^{(k)}_\cdot \longrightarrow D'_\cdot$ la flèche naturelle, indexons par i, $1 \leqslant i \leqslant N_n$ les composantes $D_{n,i}$ de D'_n, et notons $\delta_j : \widetilde{D}^{(k)}_\cdot \longrightarrow \widetilde{D}^{(k-1)}_\cdot$ la flèche de composantes les inclusions

$$D_{n,i_1} \cap \ldots \cap D_{n,i_k} \longrightarrow D_{n,i_1} \cap \ldots \cap D_{n,i_{j-1}} \cap D_{n,i_{j+1}} \cap \ldots \cap D_{n,i_k}.$$

On définit un complexe double $K^{\cdot\cdot}$ sur $D'_\cdot$ comme suit : soit $K^{pq} = (a_{q+1})_* \Omega^p_{\widetilde{D}_\cdot(q+1)}$, soit $d' : K^{pq} \longrightarrow K^{p+1,q}$, la différentielle de $(a_{q+1})_* \Omega^\cdot_{\widetilde{D}_\cdot(q+1)}$, et $d'' : K^{pq} \longrightarrow K^{p,q+1}$ la flèche simpliciale de composante en degré simplicial n la flèche

$$d'' : (a_{q+1})_* \Omega^p_{\widetilde{D}_n(q+1)} \longrightarrow (a_{q+2})_* \Omega^p_{\widetilde{D}_n(q+2)}$$

définie par $d'' = \sum_{j=1}^{q+2} (-1)^{q+j} \delta_j^*$.

L'isomorphisme Res "résidu de Poincaré" ([3], 3.5) fait de K^{pq} un sous-module de A^{pq}

$$K^{pq} = (a_{q+1})_* \Omega^p_{\tilde{D}^{(q+1)}_\cdot} \overset{\text{Res}}{\simeq} \frac{W_{q+1}}{W_q} \widetilde{\Omega}^{p+q+1}_{X'_\cdot}(\log D'_\cdot) \subset A^{pq}$$

et fait de $K^{\cdot\cdot}$ (resp. $K^\cdot = \underline{s}(K^{\cdot\cdot})$) un sous-complexe de $A^{\cdot\cdot}$ (resp. $A^\cdot$).

Les filtrations induites par F et W sur $K^\cdot$ prennent la forme $F^p K^\cdot = \bigoplus_{r \geqslant p} K^{r\cdot}$ et $W_q K^\cdot = \bigoplus_{s \geqslant -q} K^{\cdot s}$.

Le complexe $\widetilde{\Omega}^\cdot_{D'_\cdot}$ des formes différentielles de Sullivan sur $D'_\cdot$, est défini par

$$\widetilde{\Omega}^p_{D'_\cdot} = \ker((a_1)_* \Omega^p_{\tilde{D}_\cdot} \xrightarrow{\delta_1^* - \delta_2^*} (a_2)_* \Omega^p_{\tilde{D}^{(2)}_\cdot}),$$

on sait ([4], 4.7) que $(\widetilde{\Omega}^\cdot_{D'_\cdot}, F)$ est quasi-isomorphe au complexe $(K^\cdot, F)$ et que $(\widetilde{\Omega}^\cdot_{D'_\cdot}, F)$ est un représentant de $(\underline{\Omega}^\cdot_{D'_\cdot}, F)$; $(K^\cdot, F, W)$ est donc muni de filtrations F et W telles que $(\mathbf{Z}_{D'_\cdot}, (\mathbf{Q}_{D'_\cdot}, W), (K^\cdot, F, W))$ est un C.H.M.C. sur $D'_\cdot$ qui donne la structure de Hodge mixte de $H^\cdot(D'_\cdot, \mathbf{C}_{D'_\cdot})$.

On voit facilement que l'endomorphisme $\widetilde{\nu}$ de $A^\cdot$ envoie le sous-complexe $K^\cdot$ sur 0, on trouve donc un diagramme commutatif où les flèches horizontales sont compatibles à (F, W) :

$$\begin{array}{ccc} K^\cdot & \longrightarrow & A^\cdot \\ \downarrow 0 & & \downarrow \widetilde{\nu} \\ K^\cdot & \longrightarrow & A^\cdot \end{array}$$

2.8. Nous pouvons maintenant exprimer les flèches de $D^b(Y^{an})$ $\mathbf{C}_{Y^{an}} \longrightarrow R\epsilon_* \mathbf{C}_{D'_\cdot} \longrightarrow R\epsilon_* R\psi \mathbf{C}_{X'_\cdot}$ en termes de C.H.M.C.. Soit $D_{\cdot\cdot} = cosq(\tilde{D}_\cdot \longrightarrow D'_\cdot)$ l'espace bisimplicial M-tronqué en la première variable de composantes $D_{nm} = \tilde{D}_n \times_{D'_n} \cdots \times_{D'_n} \tilde{D}_n$ ($(m+1)$ termes), notons α l'augmentation $D_{\cdot\cdot} \longrightarrow D'_\cdot$, α est un hyperrecouvrement propre et lisse de $D'_\cdot$. Si l'on munit $\Omega^\cdot_{D_{\cdot\cdot}}$ de la filtration de Hodge F et de la filtration W définie par $W_{-1}\Omega^\cdot_{D_{\cdot\cdot}} = 0$, $W_0 \Omega^\cdot_{D_{\cdot\cdot}} = \Omega^\cdot_{D_{\cdot\cdot}}$, le complexe bifiltré $(K^\cdot, F, W)$ n'est autre que $(R\alpha_* \Omega^\cdot_{D_{\cdot\cdot}}, F, \delta(W, L))$, où $\delta(W, L)$ est la filtration diagonale définie en ([2], 7.1.6).

Soit de même $Y.. = cosq(\widetilde{D}. \longrightarrow Y)$ de composantes $Y_{nm} = \widetilde{D}_{n\times Y\ldots\times Y}\widetilde{D}_n$ ($(m+1)$ termes), notons b la flèche naturelle $D.. \longrightarrow Y..$ et η l'augmentation $Y.. \longrightarrow Y$, η est un hyperrecouvrement propre de Y, et $b : D_{nm} \longrightarrow Y_{nm}$ une immersion fermée.

Choisissons un hyperrecouvrement propre et lisse $\zeta : Y... \longrightarrow Y..$ de $Y..$, posons

$$(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y..}, F, W) = (R\zeta_* \Omega^{\cdot}_{Y...}, F, \delta(W, L)),$$

les filtrations F et W sur $\Omega^{\cdot}_{Y...}$ étant la filtration de Hodge F et la filtration W définie par $W_{-1}\Omega^{\cdot}_{Y...} = 0$, $W_0\Omega^{\cdot}_{Y...} = \Omega^{\cdot}_{Y...}$, on a $(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y..}, F) = (\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{Y..}, F)$ et la flèche naturelle ([4], 3.2) compatible à $F : \widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y..} \xrightarrow{b^*} b_*\Omega^{\cdot}_{D..} = Rb_*\Omega^{\cdot}_{D..}$ est de plus compatible à W ($W_{-1} b_*\Omega^{\cdot}_{D..} = 0$, $W_0 b_*\Omega^{\cdot}_{D..} = \Omega^{\cdot}_{D..}$).

Notons $(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y}, F, W) = (R\eta_*\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y..}, F, \delta(W, L))$; $(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y}, F)$ est quasi-isomorphe à $(\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{Y}, F)$, nous avons ainsi construit une filtration par le poids sur un représentant de $(\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{Y}, F)$, et la filtration W sur $\mathbf{Q}_Y \cong R(\eta\zeta)_* \mathbf{Q}_{Y...}$ vérifie $(\mathbf{Q}_Y, W) \otimes \mathbf{C} = (\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y}, W)$.

Par application de $R\eta_*$ à la flèche b^*, on trouve un morphisme de complexes bifiltrés :

$$\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y} = R\eta_*\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y..} \longrightarrow R\eta_* b_*\Omega^{\cdot}_{D..} = R\epsilon_* R\alpha_*\Omega^{\cdot}_{D..} = R\epsilon_*\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{D'.}.$$

2.9. Avec les notations ci-dessus, on a d'après 2.6 et 2.7 un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y}, F, W) & \longrightarrow & (R\epsilon_* K^{\cdot}, F, \delta(W, L)) & \longrightarrow & (R\epsilon_* A^{\cdot}, F, \delta(W, L)) \\
\downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow \widetilde{\nu} \\
(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y}, F, W) & \longrightarrow & (R\epsilon_* K^{\cdot}, F, \delta(W, L)) & \longrightarrow & (R\epsilon_* A^{\cdot}, F, \delta(W, L))
\end{array}$$

Nous noterons $(\Omega^{\cdot}_X(\Phi), F, W)$ le cône mixte ([5]) du morphisme composé $(\widetilde{\Omega}^{\cdot}_{Y}, F, W) \longrightarrow (R\epsilon_* A^{\cdot}, F, \delta(W, L)$ et $\widetilde{\nu}$ l'endomorphisme de $\Omega^{\cdot}_X(\Phi)$ induit par l'endomorphisme $\widetilde{\nu}$ de $R\epsilon_* A^{\cdot}$.

On a un quasi-isomorphisme $R\Phi\mathbf{C}_X \longrightarrow \Omega^{\cdot}_X(\Phi)$, et le triple $(R\Phi\mathbf{Z}_X, (R\Phi\mathbf{Q}_X, W), (\Omega^{\cdot}_X(\Phi), F, W))$ est un C.H.M.C. sur Y.

Le C.H.M.C. ainsi construit donne par passage à la cohomologie une structure de Hodge mixte sur $\mathbf{H}^{\bullet}(Y^{an}, R\Phi\mathbf{C}_X)$ et l'endomorphisme $\widetilde{\nu}$ de $\Omega_X^{\bullet}(\Phi)$ donne l'endomorphisme $N = \log T^a$; on montre comme en 2.1 que cette structure ne dépend que du choix du paramètre s sur S.

En effet, si on note $(\widetilde{\Omega}_Y^{\bullet})_i$, $(R\epsilon_* A^{\bullet})_i$ et $(\Omega_X^{\bullet}(\Phi))_i$ ($i = 1$ ou 2) les constructions effectuées avec des espaces simpliciaux ${}^iX'_{\bullet}$ liés par une flèche $\beta : {}^2X'_{\bullet} \longrightarrow {}^1X'_{\bullet}$, on a un morphisme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccc} (\widetilde{\Omega}_Y^{\bullet}, F, W)_1 & \longrightarrow & (R\epsilon_* A^{\bullet}, F, W)_1 & \longrightarrow & (\Omega_X^{\bullet}(\Phi), F, W)_1 \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) & & \downarrow (3) \\ (\widetilde{\Omega}_Y^{\bullet}, F, W)_2 & \longrightarrow & (R\epsilon_* A^{\bullet}, F, W)_2 & \longrightarrow & (\Omega_X^{\bullet}(\Phi), F, W)_2 . \end{array}$$

Les flèches (1) et (2) donnent des isomorphismes par passage à la cohomologie, il en est donc de même de (3).

Nous avons donc trouvé le théorème suivant :

2.10. THEOREME. – *Soit* $f : X \longrightarrow S$ *un morphisme propre d'un* $\mathbf{C}$*-schéma intègre dans une courbe algébrique lisse sur* $\mathbf{C}$, *soit* O *un point fermé de* S *et* $Y = X \times_S \{O\}$, *le quasi-isomorphisme* $R\Phi\mathbf{C}_X \xrightarrow{2.9} \Omega_X^{\bullet}(\Phi)$ *définit sur* $H^*(Y^{an}, R\Phi\mathbf{C}_X)$ *une structure de Hodge mixte qui ne dépend que du choix du paramètre* s *sur* S.

L'endomorphisme $N = \log T^a$ *de* $H^*(Y^{an}, R\Phi\mathbf{C}_X)$ *est un morphisme de structures de Hodge mixtes de type* $(-1, -1)$.

2.11. *Fonctorialité.* Soient $f : X \longrightarrow S$ et $g : V \longrightarrow S$ vérifiant les hypothèses de 2.10, soit $h : V \longrightarrow X$ un morphisme au-dessus de S (h est donc propre) ; on peut construire, en procédant comme en 1.1 un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_{\bullet} & \xrightarrow{h_{\bullet}} & X_{\bullet} \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\epsilon} \\ V & \xrightarrow{h} & X \\ & {\scriptstyle g}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & S & \end{array}$$

où ϵ et η vérifient 1.1.a, puis, après avoir tronqué à l'ordre $M = \sup(M(X), M(V))$, trouver un changement de base $S' \longrightarrow S$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V'_\cdot & \xrightarrow{h'_\cdot} & X'_\cdot \\ {\scriptstyle \eta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon'} \\ V' & \xrightarrow{h'} & X' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & S & \end{array}$$

où ϵ' et η' vérifient 1.4.

Notons $A^\cdot(X)$ (resp. $A^\cdot(V)$ le C.H.M.C. sur $X'_\cdot$ (resp. $V'_\cdot$) construit en 2.1, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} R\psi \mathbf{C}_{X'} & \longrightarrow & R\epsilon'_* R\psi \mathbf{C}_{X'_\cdot} & \longrightarrow & R\epsilon'_* A^\cdot(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Rh'_* R\psi \mathbf{C}_{V'} & \longrightarrow & Rh'_* R\eta'_* R\psi \mathbf{C}_{V'_\cdot} & \longrightarrow & Rh'_* R\eta'_* A^\cdot(V). \end{array}$$

Par passage à la cohomologie, et en procédant de même pour $R\Phi$ on trouve donc la proposition suivante :

2.12. PROPOSITION. — *Les structures de Hodge mixtes construites en 2.2 et 2.10 sont fonctorielles : si* $X \longrightarrow S$ *et* $V \longrightarrow S$ *sont comme en 2.11, si* $Y = X \times_S \{O\}$ *et* $W = V \times_S \{O\}$, *les morphismes*

$$H^*(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X) \longrightarrow H^*(W^{an}, R\psi \mathbf{C}_V)$$

et

$$H^*(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X) \longrightarrow H^*(W^{an}, R\Phi \mathbf{C}_V)$$

sont des morphismes de structures de Hodge mixtes.

2.13. *Cas des singularités isolées*

Si dans 2.2 et 2.10 on suppose de plus que X est lisse et que $f : X \longrightarrow S$ a un point singulier isolé x (tel que $f(x) = 0$), on peut choisir les espaces simpliciaux $X_\cdot$ (resp. $X'_\cdot$) constants de valeur X_0 (resp. X'_0), où $\pi : X_0 \longrightarrow X$ est une résolution des singularités de f (i.e. X_0 est lisse, $\pi : X_0 - \pi^{-1}(x) \longrightarrow X - \{x\}$

est un isomorphisme, et $\pi^{-1}(x)$ est un D.C.N.), et X'_0 est la normalisée de $X_0 \times_S S'$. Il est alors clair que la S.H.M. construite ici sur $H^*(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$ est identique à celle que Steenbrink construit dans [12].

Pour construire une S.H.M. sur $H^*(Y^{an}, R\Phi_{\mathbf{C}_X})$, nous avons exprimé la cohomologie de Y^{an} à l'aide d'un hyperrecouvrement de Y, $\eta : Y_\cdot = cosq(\widetilde{D} \longrightarrow Y) \longrightarrow Y$; dans [12], Steenbrink utilise la construction suivante : soit D_0 la composante de D' qui domine Y, si $D' = D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_m$, on pose $C_i = D_0 \cap D_i$ $(0 < i \leqslant m)$, $C = \cup C_i$, $\widetilde{C}^{(q)}$ la réunion disjointe des intersections q à q des composantes, c_q la flèche naturelle de $\widetilde{C}^{(q)}$ dans D_0 ; on définit ([12], 3.4) un C.H.M.C. $A^\cdot(Y)$ sur D' qui exprime la cohomologie de Y^{an} (par exemple, $A^\cdot(Y)_{\mathbf{Q}} = (\mathbf{Q}_{D_0} \longrightarrow (c_1)_* \mathbf{Q}_{\widetilde{C}} \longrightarrow (c_2)_* \mathbf{Q}_{\widetilde{C}(2)} \longrightarrow \ldots)$) et on a un morphisme de C.H.M.C. $A^\cdot(Y) \longrightarrow A^\cdot$. Les immersions fermées $\widetilde{C}^{(q)} \longrightarrow \widetilde{D}^{(q+1)} \longrightarrow (\widetilde{D}/D')^{q+1} \longrightarrow (\widetilde{D}/Y)^{q+1}$ nous donnent un morphisme de C.H.M.C.

$$R\eta_*(\widetilde{\Omega}^\cdot_{Y_\cdot}, F, W) \longrightarrow R\epsilon'_*(A^\cdot(Y), F, W)$$

qui donne l'identité de $H^*(Y^{an}, \mathbf{C})$ par passage à la cohomologie.

On voit donc que les S.H.M. sur $H^*(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X)$ construites ici et dans [12] sont identiques.

3. Majoration du niveau d'unipotence.

3.1. THEOREME. — *Avec les notations 2.10, l'action de la monodromie sur* $H^i(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X)$ (resp. $H^i(Y^{an}, R\psi \mathbf{C}_X)$) *est quasi-unipotente de niveau au plus* $d_i(\Phi)$ (resp. $d_i(\psi)$), i.e. $(T^a - 1)^{d_i+1} = 0$, *où*

$$d_i(\Phi) = \sup((b-a)/\forall j, j \in [a, b],\ Gr^j_F H^i(Y^{an}, R\Phi \mathbf{C}_X) \neq 0)$$

(resp. $d_i(\psi)$ = *même définition avec* ψ *au lieu de* Φ).

Démonstration. — Le théorème découle du lemme suivant, qui nous a été communiqué par P. Deligne.

3.2. LEMME. — *Soit* (H, F, W) *une structure de Hodge mixte, et soit* N *un endomorphisme de type* $(-1, -1)$ *de* (H, F, W),

alors N *est nilpotent de niveau au plus* d (i.e. $N^{d+1} = 0$), *où* $d = \sup((b-a)/\forall i,\ i \in [a,b], Gr_F^i H \neq 0)$.

Démonstration. — Soit

$$(q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots) = (q, q, q-1, q-2, \ldots),$$

posons

$$H_0^{pq} = \Big(\sum_{0 \leq i} (W_{p+q-i}(H) \cap F^p(H)\Big) \cap \Big(\sum_{0 \leq i} (W_{p+q-i}(H) \cap \overline{F}^{qi}(H)\Big).$$

D'après ([1], 1.2.11) les H_0^{pq} forment une bigraduation de H, et

$$W_n(H) = \sum_{p+q \leq n} H_0^{pq},\ F^p(H) = \sum_{p' \geq p} H_0^{p'q};$$

N étant de type $(-1,-1)$, $N(H_0^{pq}) \subset H_0^{p-1,q-1}$ et donc si $Gr_F^{a-1}(H) = 0, N^{b-a+1}(H_0^{bq}) = 0$, d'où le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DELIGNE, Théorie de Hodge II, *Publ. Math. de l'I.H.E.S.*, n° 40.

[2] P. DELIGNE, Théorie de Hodge III, *Publ. Math. de l'I.H.E.S.*, n° 44.

[3] P. DELIGNE, Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers, *Springer Verlag Lecture Notes in Math.*, 163.

[4] Ph. du BOIS, Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière, *Bull. Soc. Math. France*, 109 (1981), 41-81.

[5] F. ELZEIN, Structures de Hodge mixtes, *C.R.A.S.*, Paris, t. 292, série I-409.

[6] F. ELZEIN, Dégénérescence diagonale I et II, *C.R.A.S.*, Paris, t. 296, Série I-51 et 199.

[7] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD, B. SAINT-DONAT, Toroidal Embeddings, *Springer Verlag Lecture Notes in Math.*, 339.

[8] LE DUNG TRANG, Faisceaux constructibles quasi-unipotents, *Sém. Bourbaki*, 581, Nov. 1981.

[9] D. MUMFORD, *Abelian Varieties,* Oxford University Press, 1970.

[10] W. SCHMIDT, Variation of Hodge structure : The singularities of the period mapping, *Inv. Math.*, 22 (1973), 211-320.

[11] J. STEENBRINK, Limits of Hodge Structures, *Inv. Math.*, 31 (1976), 229-257.

[12] J. STEENBRINK, Mixed Hodge Structure on the Vanishing Cohomology, *Proceeding of the Nordic Summer School/NAVF,* Oslo, 1976.

[13] P. DELIGNE et N. KATZ, SGA 7 II. Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, *Springer Verlag Lecture Notes in Math.* 340.

Manuscrit reçu le 30 septembre 1983.

Philippe du BOIS,
ERA au CNRS n° 653 et 946
Université de Nantes
Institut de Mathématiques et d'Informatique
2 chemin de la Houssinière
44072 Nantes Cedex (France).