ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ MARTINEZ

Prolongement des solutions holomorphes de problèmes aux limites

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 1 (1985), p. 93-116

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_1_93_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 1 (1985), 93-116

PROLONGEMENT DES SOLUTIONS HOLOMORPHES DE PROBLÈMES AUX LIMITES

par André MARTINEZ

1. Introduction.

On se propose de généraliser à un problème aux limites un théorème de Zerner (Cf. [7]), repris par Bony et Schapira dans [1], affirmant que toute fonction u, holomorphe dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ à frontière non caractéristique pour un opérateur différentiel P en un point z_0, et solution de $Pu = f$ (où toutes les données dont holomorphes près de z_0), se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0.

La condition "non caractéristique pour P" devra être remplacée ici par une notion d'ellipticité pour un problème aux limites dans $\mathbf{C}^n$, et le prolongement se fera alors à travers une hypersurface réelle tracée sur une hypersurface complexe non caractéristique pour P.

Outre l'intérêt que ce résultat peut avoir en lui-même, on peut aussi en espérer deux applications : d'une part l'étude de la structure analytique de la trace de la solution élémentaire du problème mixte pour l'opérateur des ondes; d'autre part mieux comprendre, et éventuellement généraliser, certains résultats de Lebeau (Cf. [3]) relatifs à la ramification des singularités analytiques d'un problème diffractif. Signalons aussi que Pallu de la Barrière et Schapira ont obtenu dans [5] un résultat de régularité pour des solutions ramifiées de certains problèmes aux limites, résultat que l'on peut retrouver à partir de notre théorème.

Mots-clefs : Problèmes aux limites, Extensions holomorphes, Opérateurs pseudo-différentiels.

On commence ci-dessous par introduire la notion d'ellipticité, après quoi la section 2 sera consacrée à une nouvelle démonstration du théorème de Zerner, qui n'utilise pas Cauchy-Kowalevski, et dont de nombreux éléments resserviront dans la section 4 où notre théorème est énoncé et démontré. Quant à la section 3, elle introduit des éléments géométriques et donne un premier résultat de prolongement.

Soient $P(x, D_x)$ et $B_j(x, D_x)$ $(j = 1, \ldots, \mu)$ des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes au voisinage d'un point z_0 de $\mathbf{C}^n$, et avec $\mu < m = \deg P$. On note $B = (B_1, \ldots, B_\mu)$, ainsi que p et b les symboles principaux de P et B.

Soient aussi :

$\mathcal{H} \ni z_0$ une hypersurface complexe holomorphe de $\mathbf{C}^n$, non caractéristique pour P en z_0 ;

$H \ni z_0$ une hypersurface réelle de $\mathcal{H}$, de classe C^2.

$\Gamma = T_{z_0} H \cap i\, T_{z_0} H$ hyperplan complexe de $T_{z_0} \mathcal{H}$.

On note $H_1, \ldots, H_m$ les hyperplans de $T_{z_0} \mathbf{C}^n$ qui sont caractéristiques pour P en z_0 et qui contiennent Γ. Pour tout j, H_j sera donné par une équation $h_j = 0$ où les fonctions h_j sont choisies telles que :

$$h_j = h_k \text{ sur } T_{z_0} \mathcal{H}$$

pour tout couple (j, k).

Soit alors $\mathcal{D} = \{\{H_1, \ldots, H_\mu\}, \{H_{\mu+1}, \ldots, H_m\}\}$ un découpage de $\{H_1, \ldots, H_m\}$, tel que

$$\{H_1, \ldots, H_\mu\} \cap \{H_{\mu+1}, \ldots, H_m\} = \emptyset.$$

DEFINITION. — *Le problème aux limites* (P, B) *sera dit elliptique en* z_0 *pour le découpage* $\mathcal{D}$ *si le système :*

$$\begin{cases} p(z_0, D_x)\, u = 0 \\ b_j(z_0, D_x)\, u_{|T_{z_0}\mathcal{H}} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, \mu) \end{cases}$$

n'admet pas de solution non nulle du type :

$$u = \sum_{j=1}^{\mu} c_j(y_n) \exp(-i h_j)$$

où $y_n = 0$ *est une équation pour* $T_{z_0}\mathcal{H}$, *et où* c_j *est un polynôme à coefficients complexes de degré strictement inférieur à l'ordre d'annulation de* $p_{|N^*_{z_0}\mathcal{H} \oplus N^*_{z_0} H_j}$ *sur* $N^*_{z_0} H_j$ (N^* = *fibré conormal*).

(*Remarque* : l'homogénéité de p et b_j montre que cette définition est indépendante du choix des h_j vérifiant $h_j = h_k$ sur $T_{z_0}\mathcal{H}$).

2. Théorème de Zerner.

THEOREME (Cf. [1]). — *Soit* $H = \{h(x) = 0\}$ *une hypersurface réelle de* $\mathbf{C}^n$, *de classe* C^1, *non caractéristique pour* P *en* z_0. *Alors, si* u *est holomorphe dans* $H_- = \{h(x) < 0\}$ *près de* z_0, *et si* Pu *se prolonge holomorphiquement au voisinage de* z_0, *il en est de même pour* u.

Démonstration. — On peut supposer $z_0 = 0$ et, par des arguments géométriques standards, se ramener au cas ou h est réel-analytique. Il suffit alors de démontrer le théorème lorsque h est de la forme : $h(x) = dh(0) \cdot x + C_1 |x|^2$, avec $C_1 > 0$. Par changement **C**-linéaire de coordonnées, on peut aussi imposer : $dh(0) \cdot x = \operatorname{Im} x_1$.

Pour $\epsilon > 0$, on considère le difféomorphisme holomorphe local de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$: $\psi_\epsilon(y) = (y_1 - i(\epsilon + My^2), y_2, \ldots, y_n)$, où $y = (y_1, \ldots, y_n)$, et où $M = 4C_1$.

Posons $x = \psi_\epsilon(y)$, et supposons $x \in \overline{H}_+ = \{h(x) \geqslant 0\}$, x assez voisin de 0 ; on a alors :

$$h(x) = \operatorname{Im} y_1 - \epsilon - M \operatorname{Re}(y^2) + C_1 (|y_2|^2 + \ldots + |y_n|^2 + |y_1 - i(\epsilon + My^2)|^2) \geqslant 0$$

d'où :

$$\operatorname{Im} y_1 + \underbrace{4C_1 \epsilon^2 - \epsilon}_{\leqslant -\epsilon/2 \text{ si } \epsilon \text{ assez petit}} + M(\operatorname{Im} y)^2 - M(\operatorname{Re} y)^2 + 2C_1 |y|^2 + \underbrace{4C_1 M^2 |y|^4}_{\leqslant C_1 |y|^2 \text{ si } |y| \text{ assez petit (indépendant de } \epsilon)} \geqslant 0.$$

On a donc : $\operatorname{Im} y_1 \geqslant C_1 (\operatorname{Re} y)^2 - 7C_1 (\operatorname{Im} y)^2 + \epsilon/2$ si $x = \psi_\epsilon(y) \in \overline{H}_+$ est assez voisin de 0, et si ϵ est assez petit.

On en déduit en particulier que si ϵ est assez petit, et si V est un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ assez petit (indépendant de ϵ), on a :

$$\psi_\epsilon(V) \subset H_- .$$

Posons alors : $v_\epsilon = (u \circ \psi_{\epsilon|V}) \cdot \chi_1$, où χ_1 est une fonction troncature à support dans V, et valant 1 près de 0.

v_ϵ est donc une fonction analytique au voisinage de 0, et le problème est maintenant de montrer que v_ϵ se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage V_1 de 0 indépendant de ϵ (il suffira ensuite de prendre ϵ assez petit pour que $\psi_\epsilon^{-1}(0) \in V_1$).

On peut écrire :

$$v_\epsilon(x) = (2\Pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} v_\epsilon(y)\, dy\, d\xi$$

$$= (2\Pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2}\, a(x-y, \xi)\, v_\epsilon(y)\, dy\, d\xi$$

avec $a(x, \xi) = 1 + (i/2) \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k \xi_k}{|\xi|}$.

(La seconde égalité s'obtient en intégrant ξ sur le contour : $\xi \longrightarrow \xi + (i/2)|\xi|(x-y)$, comme cela a été observé par Lebeau dans [4]).

On déduit de cette expression qu'il suffit de prouver que :

$$\int e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2}\, a(x-y, \xi)\, v_\epsilon(y)\, dy$$

est majoré en module par une expression de la forme $C_\epsilon e^{-C|\xi|}$, où $C_\epsilon > 0$, et où $C > 0$ ne dépend pas de ϵ ceci uniformément en x dans un voisinage V_1 (indépendant de ϵ) de 0.

En fait, étant donné la forme de a, il suffit même de le vérifier en remplaçant $a(x-y, \xi)$ par 1 et par y_k $(k = 1, \ldots, n)$, ou encore par 1 et $1 + iy_k$ (ceci évitera par la suite de procéder à une inversion d'opérateur).

i) *Cas où ξ reste à l'extérieur d'un voisinage conique de* $(-1, 0, \ldots, 0)$.

(En fait, dans les nouvelles coordonnées, le vecteur $N = (-1, 0, , \ldots, 0)$ n'est autre que $-2i\, \partial h/\partial x'(z_0) + O(\epsilon)$).

Dans ce premier cas, il existe une constante $C > 0$ telle que

ξ reste dans $\{\xi/\xi_1 \geqslant -C(|\xi_2| + \ldots + |\xi_n|)\}$.

On peut voir alors qu'il existe $\eta > 0$ et un ensemble fini A d'éléments $y_0 \in \mathbf{R}^n / y_0^1 < 0$, $|y_0| = 1$, vérifiant :

$$\forall\, \xi \neq 0 \text{ tel que } \xi_1 \geqslant -C(|\xi_2| + \ldots + |\xi_n|),$$

il existe $y_0 \in A$ tel que $y_0\, \xi \leqslant -\eta\, |\xi|$.

(Il suffit de prendre

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{n - 1 + (C+1)^{-2}}} \left(\frac{1}{C+1}, \frac{\xi_2}{|\xi_2|}, \ldots, \frac{\xi_n}{|\xi_n|} \right) .$$

Soit maintenant $\delta > 0$, et χ une fonction troncature à valeurs dans $(0, 1)$, à support dans $\{\chi_1 = 1\}$, et valant 1 près de 0. On a, pour $y \in \mathbf{R}^n$ et $y_0 \in A$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(y + i\,\delta\,\chi(y)\,y_0)_1 + 7\,C_1\,(\mathrm{Im}(y + i\,\delta\,\chi(y)\,y_0))^2 \\ = \delta\,\chi(y)\,y_0^1 + 7\,C_1\,\delta^2\,(\chi(y))^2 \\ = \chi(y)\,(\delta\,y_0^1 + 7\,C_1\,\delta^2\,\chi(y)). \end{aligned}$$

On en déduit, pour δ assez petit (indépendamment de ϵ) :

$$\mathrm{Adh}\,(\{\psi_\epsilon(y + i\,\delta\,\chi(y)\,y_0)/y \in \mathbf{R}^n\,,\ \epsilon > 0\}) \subset H_-\,.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} &\int e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2}\ a(x-y\,,\,\xi)\,v_\epsilon(y)\,dy \\ &= \int_{\gamma_1} e^{i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2}\ a(x-y\,,\,\xi)\,u_\epsilon(y)\,dy \end{aligned}$$

où $u_\epsilon(y) = \chi_1(y)\,u(\psi_\epsilon(y))$, et où γ_1 désigne le contour :

$$y \longrightarrow y + i\,\delta\,\chi(y)\,y_0\,.$$

Or $\mathrm{Sup}\,\{|u_\epsilon(y)|/y \in \gamma_1\,,\ \epsilon > 0\} < +\infty$, et sur γ_1, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(i(x-y)\xi - |\xi|(x-y)^2/2) &= -(\mathrm{Im}\,x)\,\xi + \delta\,\chi(\mathrm{Re}\,y)\,y_0\,\xi \\ &\quad - \frac{|\xi|}{2}\ [(\mathrm{Re}\,x - \mathrm{Re}\,y)^2 - (\mathrm{Im}\,x - \delta\,\chi(\mathrm{Re}\,y)\,y_0)^2] \\ &\leqslant -\beta\,|\xi| \text{ avec } \beta > 0, \text{ si } y_0\,\xi \leqslant -\eta\,|\xi|, \end{aligned}$$

et si $\mathrm{Re}\,x \in \{\chi = 1\}$, δ et $|\mathrm{Im}\,x|$ assez petits.

D'où le résultat dans ce cas.

ii) *Cas où* $\xi/|\xi|$ *reste dans un voisinage* V_0 *de* N :

Posons, pour $x \in \mathbf{C}^n$ et $\lambda > 0$:

$$T_0 v_\epsilon(x, \lambda) = \int e^{-\lambda(x-y)^2/2} v_\epsilon(y)\, dy$$

$$T_k v_\epsilon(x, \lambda) = \int e^{-\lambda(x-y)^2/2} (1 + i y_k) v_\epsilon(y)\, dy \; ; k = 1, \ldots, n.$$

T_0, T_k sont donc des transformations de Fourier-Bros-Iagolnitzer de même phase, et à symbole elliptique.

On fixe désormais $k_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$, et on note $T = T_{k_0}$. On a alors (cf. Sjöstrand [6]) :

$$T v_\epsilon \in H_\varphi^{\mathrm{loc}}(\Omega_1) \quad \text{où} \quad \varphi(x) = (\mathrm{Im}\, x)^2/2,$$

et où Ω_1 est un voisinage complexe assez petit de $x_0 = -iN$.

D'autre part, si $x = z - i\xi$, on a :

$$e^{-\lambda(x-y)^2/2} = e^{\lambda\varphi(x)}\, e^{i\lambda(z-y)\xi - \lambda(z-y)^2/2},$$

par conséquent, il suffit de montrer que $\| T v_\epsilon \|_{L^2_\varphi(\Omega_1)}$ est majorée par une expression de la forme : $C_\epsilon\, e^{-\lambda/C}$, avec C_ϵ, $C > 0$, C indépendante de ϵ, Ω_1 voisinage de $-iN$ indépendant de ϵ, et où $L^2_\varphi(\Omega_1) = L^2(\Omega_1, e^{-2\lambda\varphi}\, L(dx))$, $L(dx)$ = mesure de Lebesgue.

Soit alors $\widetilde{P}$ un O.P.D. tel que (cf. Sjöstrand [6], Prop. 7-4) :

$$\forall v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n),\ \lambda^{-m}\, T P v \equiv \widetilde{P} T v \text{ dans } H_{\varphi, x_0} \; ;$$

plus précisément, on a alors :

$\exists\, \Omega_1$ voisinage de $-iN$, $\Omega_2 \subset\subset \mathbf{R}^n$ voisinage de 0, et $C > 0$ tels que :

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega_2),\ \| \lambda^{-m}\, T P v - \widetilde{P} T v \|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \leqslant C\, e^{-\lambda/C}\, \|v\|_{L^1(\Omega_2)}.$$

(*Remarque* : $\widetilde{P}$ est ici défini avec un contour d'intégration adapté à φ, de la forme

$$\Gamma(x) : \theta = -2i\, \partial\varphi/\partial x + i\, R(\overline{x - y}),\ |x - y| \leqslant r).$$

D'autre part, $\widetilde{P}$ est d'ordre 0, et a pour symbole principal $\widetilde{p}(x, \xi) = p(x + i\xi, \xi)$, où p désigne maintenant le symbole principal de P dans les nouvelles coordonnées.

Posons $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \delta_1 |x - x_0|^2$, et prenons $\delta_1 > 0$ et Ω_1 assez petits pour que $p(x + 2\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x, -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x) \neq 0$ sur $\overline{\Omega}_1$.

Si Ω_2 est un autre voisinage de $-iN$ tel que $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \mathbf{C}^n$, on a le résultat suivant, observé par Sjöstrand dans [6] :

LEMME 1 *(Sjöstrand).* — *Il existe* $C_0 > 0$ *(indépendant de* δ_1 *et de* ϵ *assez petits) tel que* : $\forall v \in H^{\mathrm{loc}}_{\varphi}(\Omega_2)$, $\forall \lambda \geqslant 1$,

$$\|\widetilde{P}v - \widetilde{p}(x, -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x)\,v(x)\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C_0\,\lambda^{-1/2}\,\|v\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)}.$$

Démonstration. — Par la formule de Stokes, on a :

$$\widetilde{P}v(x,\lambda) = (\lambda/2\Pi)^n \int_{\widetilde{\Gamma}(x)} \widetilde{P}(x,\theta,\lambda)\, e^{i\lambda(x-y)\theta}\, v(y)\, dy\, d\theta + w(x,\lambda)$$

avec $\widetilde{\Gamma}(x) : \theta = -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x + iR(\overline{x-y})$, $|x-y| \leqslant r$; et

$$\|w\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C\, e^{-\lambda/C}\, \|v\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)}$$

si r est assez petit et si R est assez grand.

Le lemme se montre alors comme dans [6] (démonstration de la proposition 10-1), en tenant compte du fait que toutes les majorations sont uniformes en $\delta_1 \in]0, \delta_1^0]$ et en $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, δ_1^0 et ϵ_0 assez petits.

□

D'autre part, $\widetilde{p}(x, -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x)$ ne s'annulant pas sur $\overline{\Omega}_1$, on a :

$$\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C\,\|\widetilde{p}(x, -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x)\,Tv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)},$$

d'où, en appliquant le lemme à Tv_ϵ :

$$\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C_2\,\|\widetilde{P}Tv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} + C_2\,\lambda^{-1/2}\,\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)}$$

$$\leqslant C_2\,\|TPv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} + C_\epsilon\, e^{-\lambda/C} + C_2\,\lambda^{-1/2}\,\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)}.$$

Par hypothèse, $Pv_\epsilon|_{x_1=1} = Pu \circ \psi_\epsilon|_{x_1=1}$ se prolonge holomorphiquement dans un voisinage de 0 indépendant de ϵ. Par suite, si Ω_1 est assez petit, on a : $\|TPv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C' e^{-\lambda/C'}$, et donc :

$$\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C_2\,\lambda^{-1/2}\,\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)} + C'_\epsilon\, e^{-\lambda/C_3}.$$

On en déduit, pour λ assez grand :

$$\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C_4\, \lambda^{-1/2}\, \|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_2\setminus\Omega_1)} + C''_\epsilon\, e^{-\lambda/C_4}\,.$$

Or,

$$\|Tv_\epsilon\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_2\setminus\Omega_1)} = \int_{\Omega_2\setminus\Omega_1} e^{-2\lambda\varphi - 2\lambda\delta_1|x-x_0|^2}\, |Tv_\epsilon(x)|^2\, L(dx)$$

$$\leqslant e^{-2\lambda\delta_1 k}\, \|Tv_\epsilon\|^2_{L^2_{\varphi}(\Omega_2\setminus\Omega_1)} \leqslant C_\epsilon\, e^{-2\lambda\delta_1 k}$$

avec $k = \mathrm{Inf}\{|x-x_0|^2 / x\in\Omega_2\setminus\Omega_1\} > 0$.

On a donc finalement :

$$\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C_\epsilon\, e^{-\lambda/C} \text{ avec } C \text{ indépendant de } \epsilon\,.$$

Soit alors $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1$ un autre voisinage de $-iN$; on a :

$$\|Tv_\epsilon\|^2_{L^2_{\varphi}(\Omega_0)} \leqslant \|Tv_\epsilon\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_0)}\, e^{2\lambda\delta_1 \,\mathrm{Sup}\{|x-x_0|^2/x\in\Omega_0\}}$$

$$\leqslant C^2_\epsilon\, e^{-2\lambda[C^{-1} - \delta_1 \,\mathrm{Sup}\{|x-x_0|^2/x\in\Omega_0\}]}$$

et donc, si Ω_0 est assez petit (indépendamment de ϵ) :

$$\|Tv_\epsilon\|_{L^2_{\varphi}(\Omega_0)} \leqslant C_\epsilon\, e^{-\lambda/C'}\,, \text{ avec } C' > 0 \text{ indépendant de } \epsilon\,.$$

□

3. Préliminaires géométriques.

On reprend les notations de l'introduction, et on fixe ν_0 dans $N_{z_0}\mathcal{H}\setminus 0$ (où $N\mathcal{H}$ désigne le fibré normal de $\mathcal{H}$). On choisit de plus les h_j tels que si $T_{z_0}H = \{\mathrm{Im}\, s = 0\}\cap T_{z_0}\mathcal{H}$ (avec s $\mathbf{C}$-linéaire), alors $h_j = s$ sur $T_{z_0}\mathcal{H}$. Appelons π la projection de $T_{z_0}\mathbf{C}^n$ dans $N_{z_0}\mathcal{H}$. Pour tout couple (j,k), on a alors $h_j - h_k = \mathrm{Cte}$ sur $\pi^{-1}(\nu_0)$, et si $\mathcal{O}$ est un découpage de $\{H_1, \ldots, H_m\}$, on fait les hypothèses :

(H1) : (P, B) est elliptique en z_0 pour $\mathcal{O}$;

(H2) : $\mathrm{Im}\, h_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Im}\, h_\mu < \mathrm{Im}\, h_{\mu+1} \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Im}\, h_m$ sur $\pi^{-1}(\nu_0)$.

Soient maintenant $\nu_j \in \pi^{-1}(\nu_0)\cap H_j$, V_j un voisinage conique

de ν_j dans $T_{z_0} \mathbf{C}^n \simeq \mathbf{C}^n$, U un voisinage de z_0 dans H, et V un voisinage de z_0 dans $\mathbf{C}^n$.

On voit alors facilement que si $\nu_j' \in \pi^{-1}(\nu_0) \cap H_j$, il existe V_j' voisinage conique de ν_j', U' voisinage de z_0 dans H, et V' voisinage de z_0 dans $\mathbf{C}^n$, tels que :

$$(U' + V_j') \cap V' \subset (U + V_j) \cap V.$$

De même, si $\phi : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ est un difféomorphisme au voisinage de z_0, il existe $\widetilde{U}$ voisinage de $\phi(z_0)$ dans $\phi(H)$, $\widetilde{V}$ voisinage de $\phi(z_0)$ dans $\mathbf{C}^n$, et $\widetilde{V}_j$ voisinage conique de $d\phi(z_0)(\nu_j)$, tels que :

$$(\widetilde{U} + \widetilde{V}_j) \cap \widetilde{V} \subset \phi[(U + V_j) \cap V].$$

Si $j > 1$, on a le résultat de prolongement suivant :

THEOREME 1. – *Si* u *est une fonction holomorphe dans* $(U + V_j) \cap V$ *telle que* Pu *se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de* z_0, *alors, pour tout hyperplan complexe* $G = \{g = 0\}$ *de* $T_{z_0} \mathbf{C}^n$ *tel que :*

$$G \cap T_{z_0} \mathcal{H} = \Gamma ;$$

$$g = s \text{ sur } T_{z_0} \mathcal{H} ;$$

$$\operatorname{Im} h_{j-1} < \operatorname{Im} g < \operatorname{Im} h_j \text{ sur } \pi^{-1}(\nu_0),$$

on a :

Il existe U' *voisinage de* z_0 *dans* H, V' *voisinage de* z_0 *dans* $\mathbf{C}^n$, *et* W_j *voisinage conique convexe de* ν_j *et de* $w \in \pi^{-1}(\nu_0) \cap G$, *tels que* u *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $(U' + W_j) \cap V'$.

Démonstration. – On se place en coordonnées locales de manière à ce que :

$$\mathcal{H} = \{x_n = 0\} ; \; z_0 = 0 ; \; T_{z_0} H = \{\operatorname{Im} x_1 = x_n = 0\} ;$$

$$\Gamma = \{x_1 = x_n = 0\} ;$$

et on note :

$$H = \{h(x') = 0\}, \; x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \; dh(0) \cdot x' = \operatorname{Im} x_1 ,$$

avec h de classe C^2.

On peut aussi imposer $\nu_0 \equiv (0, \ldots, 0, 1)$, ainsi que :

$$\begin{cases} h_j = x_1 + \lambda_j x_n \ ; \ \nu_j = (-\lambda_j, 0, \ldots, 0, 1) \ ; \\ g = x_1 + \tau x_n \ ; \ w = (-\tau, 0, \ldots, 0, 1), \end{cases}$$

avec $\operatorname{Im} \lambda_{j-1} < \operatorname{Im} \tau < \operatorname{Im} \lambda_j$.

Montrons d'abord que $(U + V_j) \cap V$ contient un ouvert de la forme :

$$\Omega = \{x / |\operatorname{Im} x_n| < \delta \operatorname{Re} x_n, -(\operatorname{Im} \lambda_j + \epsilon) \operatorname{Re} x_n < h(x') < -(\operatorname{Im} \lambda_j - \epsilon) \operatorname{Re} x_n\} \cap \widetilde{V}_1$$

et que l'ouvert $(U' + V'_j) \cap V'$ que l'on cherche est inclus dans un ouvert de la forme :

$$\Omega' = \{x / |\operatorname{Im} x_n| < \delta' \operatorname{Re} x_n, -(\operatorname{Im} \lambda_j + \epsilon') \operatorname{Re} x_n < h(x') < -(\operatorname{Im} \tau - \epsilon') \operatorname{Re} x_n\} \cap \widetilde{V}_2$$

avec ϵ, δ, ϵ', $\delta' > 0$, et $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ voisinage de 0.

En effet, si $x \in \Omega$, on a :

$$x = (x_1 + \lambda_j \operatorname{Re} x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) + \operatorname{Re} x_n \, (\nu_j + O(\delta))$$

et

$$h(x_1 + \lambda_j \operatorname{Re} x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}) = h(x') + \operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Re} x_n + \operatorname{Re} x_n \, O(|x|) = \operatorname{Re} x_n \, O(|x| + \epsilon).$$

On en déduit : $\exists \alpha \in H$ tel que

$$(x_1 + \lambda_j \operatorname{Re} x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = \alpha + O(|x| + \epsilon) \operatorname{Re} x_n, \ |\alpha| = O(|x|),$$

d'où

$$x = \alpha + \operatorname{Re} x_n \, (\nu_j + O(|x| + \epsilon + \delta)) \in (U + V_j) \cap V$$

si ϵ, δ, et $\widetilde{V}_1$ sont assez petits.

D'autre part, $(U' + W_j) \cap V'$ est de la forme :

$$\{\alpha + \lambda(t \nu_j + (1 - t) w + u) / \alpha \in H, \ |\alpha| < \epsilon, \ 0 < \lambda < \epsilon, \ |u| < \epsilon, \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

et donc, si $x = \alpha + \lambda(t\nu_j + (1-t)w + u) \in (U' + W_j) \cap V'$, on a :

$$\frac{|\operatorname{Im} x_n|}{\operatorname{Re} x_n} = \frac{|\operatorname{Im} u_n|}{1 + \operatorname{Re} u_n} < \delta' \text{ si } \epsilon \text{ est assez petit,}$$

et

$$\begin{aligned} h(x') &= \lambda\, dh(\alpha)(t\nu_j + (1-t)w + u) + O(\lambda^2) \\ &= \lambda\, dh(0)(t\nu_j + (1-t)w) + \lambda\, O(\epsilon) \\ &= -\lambda(t \operatorname{Im} \lambda_j + (1-t) \operatorname{Im} \tau) + \lambda O(\epsilon), \end{aligned}$$

avec $\lambda = \operatorname{Re} x_n / (1 + \operatorname{Re} u_n) = \operatorname{Re} x_n\,(1 + O(\epsilon))$, d'où

$$h(x') = -\operatorname{Re} x_n\,(t \operatorname{Im} \lambda_j + (1-t) \operatorname{Im} \tau) + \operatorname{Re} x_n\, O(\epsilon)$$

et donc :

$$-(\operatorname{Im} \lambda_j + \epsilon') \operatorname{Re} x_n < h(x') < -(\operatorname{Im} \tau - \epsilon') \operatorname{Re} x_n$$

si ϵ est assez petit.

On est donc ramené à montrer que si u est holomorphe dans Ω, et si Pu se prolonge au voisinage de 0, il existe $\widetilde{V}_2$, ϵ', et δ' tels que u se prolonge à Ω'.

Pour cela, on va procéder par déformations non caractéristiques.

En supposant ϵ assez petit pour que $\operatorname{Im} \lambda_j - \operatorname{Im} \tau > \epsilon$, et en faisant le changement de variables :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + i(\operatorname{Im} \lambda_j - \epsilon) x_n \\ y_k = x_k \text{ si } k \geqslant 2 \end{cases}$$

on se ramène à $\operatorname{Im} \lambda_j = \epsilon$ et $\operatorname{Im} \tau < 0$.

Soit alors $\epsilon_1 > 0$ tel que $\operatorname{Im} \lambda_{j-1} < \operatorname{Im} \tau - \epsilon_1$, et posons $M = \epsilon_1 - \operatorname{Im} \tau > 0$. On a :

u holomorphe dans

$$\{x / |\operatorname{Im} x_n| < \delta \operatorname{Re} x_n, -2\epsilon \operatorname{Re} x_n < h(x') < 0\} \cap \widetilde{V}_1 = \Omega$$

et il suffit de montrer que u se prolonge à :

$$\{x / |\operatorname{Im} x_n| < \delta_1 \operatorname{Re} x_n, -2\epsilon \operatorname{Re} x_n < h(x') < M' \operatorname{Re} x_n\} \cap \widetilde{V}_2,$$

avec $\widetilde{V}_2$ voisinage de 0, $\delta_1 > 0$, et $M' > -\operatorname{Im} \tau$.

Soient donc $\delta' \in]0, \delta[$, et $\chi_1 \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \chi_1 = 1 \text{ sur } [-\delta', \delta'] \\ \text{Supp } \chi_1 \subset [-\delta, \delta] \\ \chi_1 \text{ croît sur } [-\delta, -\delta'] \\ \chi_1 \text{ décroît sur } [\delta', \delta]. \end{cases}$$

Soit aussi $\chi_2 \in C^\infty(\mathbf{C}^{n-1}, \mathbf{R}^+)$ à support dans $\tilde{V}_1 \cap \{x_n = 0\}$, et valant 1 près de 0.

Soient enfin $0 < \epsilon' < \epsilon/(2 + \epsilon/M)$, $0 < \eta < \rho$ (ρ sera ultérieurement fixé assez petit), et $(\eta_\alpha)_{\alpha \geq 0}$, $(\eta'_\alpha)_{\alpha \geq 0}$, $(\rho_\alpha)_{\alpha \geq 0}$, $(\rho'_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ des familles de réels, tels que :

$$\begin{cases} \forall \alpha > 0, \eta < \eta_\alpha < \eta'_\alpha < \dfrac{\epsilon' \rho + \alpha \eta}{\epsilon' + \alpha} < \rho'_\alpha < \rho_\alpha < \rho \\ \rho_\alpha \longrightarrow \rho \text{ et } \rho'_\alpha \longrightarrow \eta \text{ lorsque } \alpha \longrightarrow +\infty \\ \alpha(\eta'_\alpha - \eta) \longrightarrow \epsilon'(\rho - \eta) \text{ lorsque } \alpha \longrightarrow +\infty. \end{cases}$$

Posons alors, pour $y \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$:

$$\bar{\chi}_\alpha(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leqslant \eta/2 \text{ ou } y \geqslant \rho + \eta \\ \alpha(y - \eta) \text{ si } y \in]\eta_\alpha, \eta'_\alpha[\\ -\epsilon'(y - \rho) \text{ si } y \in]\rho'_\alpha, \rho_\alpha[. \end{cases}$$

On impose de plus à $\bar{\chi}_\alpha$ d'être C^∞ sur $\mathbf{R}$, de dépendre continûment de α, et à $\bar{\chi}'_\alpha$ d'être croissante sur $]\eta/2, \eta_\alpha[$ et sur $]\rho_\alpha, \rho + \eta[$, décroissante sur $]\eta'_\alpha, \rho'_\alpha[$.

On définit aussi $\bar{\chi}_0 = 0$.

Soit $f_\alpha : \mathbf{C}^n \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f_\alpha(x, y) = y - \bar{\chi}_\alpha(\mathrm{Re}\, x_n - y/M)\, \chi_1(\mathrm{Im}\, x_n/(\mathrm{Re}\, x_n - y/M))\, \chi_2(x').$$

On a :

$$\partial f_\alpha / \partial y = 1 + \overbrace{\left(\bar{\chi}'_\alpha \chi_1 \chi_2 - \frac{\mathrm{Im}\, x_n}{(\mathrm{Re}\, x_n - y/M)^2} \bar{\chi}_\alpha \chi'_1 \chi_2\right)/M}^{A(x, y)}$$

$$\geqslant 1 - \epsilon'/M \text{ (car } \bar{\chi}'_\alpha \geqslant -\epsilon' \text{ et } -\mathrm{Im}\, x_n\, \chi'_1 \geqslant 0).$$

Comme de plus f_α est de classe C^∞ (car $\chi_\alpha = 0$ si

$|\mathrm{Re}\, x_n - y/\mathrm{M}| < \eta/2)$, on en déduit qu'il existe une unique fonction $g_\alpha \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{C}^n, \mathbf{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{C}^n, f_\alpha(x, g_\alpha(x)) = 0.$$

On définit alors Γ_α comme étant l'hypersurface donnée au voisinage de 0 par : $h(x') - g_\alpha(x) = 0$.

On va montrer que, pour un choix convenable de ρ, Γ_α est non caractéristique pour P.

Pour cela, calculons $\partial g_\alpha/\partial \mathrm{Re}\, x_n$ et $\partial g_\alpha/\partial x'$:

$$\partial g_\alpha/\partial \mathrm{Re}\, x_n = -\frac{\partial f_\alpha/\partial \mathrm{Re}\, x_n (x, g_\alpha(x))}{\partial f_\alpha/\partial y(x, g_\alpha(x))} = \frac{\mathrm{A}(x, g_\alpha(x))}{1 + (1/\mathrm{M})\,\mathrm{A}(x, g_\alpha(x))}$$

avec $\mathrm{A} \geqslant -\epsilon'$ et $\epsilon' < \epsilon/(2 + \epsilon/\mathrm{M})$.

On en déduit :

$$-\epsilon/2 \leqslant \partial g_\alpha/\partial \mathrm{Re}\, x_n \leqslant \mathrm{M}.$$

D'autre part :

$$\partial g_\alpha/\partial x' = -\frac{\partial f_\alpha/\partial x'(x, g_\alpha(x))}{\partial f_\alpha/\partial y(x, g_\alpha(x))} = \frac{\overline{\chi}_\alpha\, \chi_1\, \chi_2'}{1 + (1/\mathrm{M})\,\mathrm{A}(x, g_\alpha(x))}$$

d'où $|\partial g_\alpha/\partial x'| \leqslant |\overline{\chi}_\alpha\, \chi_2'|/(1 - \epsilon'/\mathrm{M}) \leqslant 2\,\epsilon'\rho\,|\chi_2'|$.

Or, d'après l'hypothèse, si $\mathrm{K}\,(\subset \widetilde{\mathrm{V}}_1)$ est un voisinage compact de 0 assez petit, on a :

$\forall x \in \mathrm{K}$, $p(x, -2\,i\,\partial h/\partial x', \xi_n)$ n'a pas de racine dans

$$\left\{\xi_n/\mathrm{Im}\, \xi_n \in \left[-\frac{\epsilon}{2}, \mathrm{M}\right]\right\}.$$

(Il suffit de remarquer que $-2\,i\,\partial h/\partial x'(0) = (-1, 0, \ldots, 0)$).

On impose alors à χ_2 d'avoir son support dans $\mathrm{K} \cap \{x_n = 0\}$, et on pose $\mathrm{C} = \mathrm{Sup}\,|\chi_2'|$.

Maintenant, si ρ est assez petit (indépendamment de α), on a :

$$\forall x \in \mathrm{K}, \forall v \in \mathbf{C}^{n-1} \text{ tel que } |v| \leqslant 2\,\mathrm{C}\,\epsilon'\rho,$$

$p(x, -2\,i\,\partial h/\partial x' + v, \xi_n)$ n'a pas de racine dans

$$\left\{\xi_n/\mathrm{Im}\, \xi_n \in \left[-\frac{\epsilon}{2}, \mathrm{M}\right]\right\}.$$

Quitte à rediminuer un peu ρ, on peut aussi supposer que K contient

$$(\operatorname{Supp}\chi_2)\times\{x_n/|\operatorname{Im}x_n|\leqslant\delta\operatorname{Re}x_n\,,\ \operatorname{Re}x_n\leqslant\rho+\eta\}.$$

De cette façon, on aura $g_\alpha(x)=0$ lorsque $x\notin K$. (En effet, si $x\notin K$, $y=0$ est la solution unique de $f_\alpha(x\,,y)=0$).

Si maintenant $x\in K$, du fait que $|2i\,\partial g_\alpha/\partial x'|\leqslant 2C\,\epsilon'\rho$, et que $\operatorname{Im}(2i\,\partial g_\alpha/\partial x_n)=\partial g_\alpha/\partial\operatorname{Re}x_n\in[-\epsilon/2\,,M]$, on a :

$$p(x\,,-2i\,\partial h/\partial x'+2i\,\partial g_\alpha/\partial x'\,,2i\,\partial g_\alpha/\partial x_n)\neq 0\,,$$

i.e. Γ_α est non caractéristique pour P en tout point de $\Gamma_\alpha\cap K$. D'autre part, les ensembles

$$K\cap\Gamma_\alpha\cap\{\operatorname{Re}x_n=0\}\,,\ K\cap\Gamma_\alpha\cap\{|\operatorname{Im}x_n|=\delta\operatorname{Re}x_n\}\,,$$

$$K\cap\Gamma_\alpha\cap\{\chi_2=0\}\,,\ K\cap\Gamma_\alpha\cap\{\operatorname{Re}x_n=\rho+\eta\}\,,$$

sont tous indépendants de α et inclus dans $K\cap\{h(x')=0\}$.

On en déduit par le théorème de Bony-Schapira-Zerner, que u se prolonge à $(\bigcup_{\alpha\geqslant 0}\Gamma_\alpha)\cup\Omega$.

Posons

$$\Lambda_{\delta',\eta}=\{x/\chi_2(x')=1\,,\ |\operatorname{Im}x_n|<\delta'(\operatorname{Re}x_n-h(x')/M)\,,$$

$$\eta<\operatorname{Re}x_n<2\,\epsilon'\rho/\epsilon\,,\ |h(x')|<\epsilon'\rho(1-2\epsilon'/\epsilon)\,,$$

$$0\leqslant h(x')<M(\operatorname{Re}x_n-\eta)\}$$

et montrons que $\Lambda_{\delta',\eta}\subset\bigcup_{\alpha\geqslant 0}\Gamma_\alpha$.

Soit donc $x\in\Lambda_{\delta',\eta}$. Il s'agit de montrer qu'il existe $\alpha\geqslant 0$ tel que $h(x')-g_\alpha(x)=0$. On a déjà $h(x')-g_0(x)=h(x')\geqslant 0$. Par continuité en α, il suffit donc de voir qu'il existe $\alpha\geqslant 0$ tel que $h(x')-g_\alpha(x)\leqslant 0$, i.e. tel que $f_\alpha(x\,,h(x'))\leqslant 0$, puisque $y\longrightarrow f_\alpha(x\,,y)$ est croissante.

Comme $\operatorname{Re}x_n-h(x')/M>\eta$, on aura, pour α assez grand :

$$\operatorname{Re}x_n-h(x')/M>\eta'_\alpha\,.$$

Par construction, on a alors

$$\overline{\chi}_\alpha(\operatorname{Re}x_n-h(x')/M)\geqslant-\epsilon_\alpha(\operatorname{Re}x_n-h(x')/M-\rho)$$

avec $\epsilon_\alpha=\alpha(\eta'_\alpha-\eta)/(\rho-\eta'_\alpha)\underset{+\infty}{\longrightarrow}\epsilon'$.

D'autre part, $f_\alpha(x, h(x')) = h(x') - \overline{\chi}_\alpha(\operatorname{Re} x_n - h(x')/M)$, et il suffit donc de montrer que :

$$h(x') < -\epsilon'(\operatorname{Re} x_n - h(x')/M - \rho)$$

i.e. $h(x') < \epsilon'(\rho - \operatorname{Re} x_n)/(1 - \epsilon'/M)$, ce qui résulte du fait que $\operatorname{Re} x_n < 2\epsilon'\rho/\epsilon$, et $|h(x')| < \epsilon'\rho(1 - 2\epsilon'/\epsilon)$.

On a donc finalement : u se prolonge à $\Lambda_{\delta',\eta}(\cup\Omega)$ pour tout $\delta' < \delta$, et pour tout $\eta \in]0, \rho[$.

On en déduit :

u se prolonge à

$$\{x/\chi_2(x') = 1, |\operatorname{Im} x_n| < \delta(\operatorname{Re} x_n - h(x')/M),$$
$$0 < \operatorname{Re} x_n < 2\epsilon'\rho/\epsilon, |h(x')| < \epsilon'\rho(1 - 2\epsilon'/\epsilon)$$
$$0 \leqslant h(x') < M \operatorname{Re} x_n\} \cup \Omega$$

d'où le résultat en prenant $M' \in]-\operatorname{Im}\tau, M[$ et $\delta_1 = \delta(1 - M'/M)$. □

Remarque. – Lorsque $j = 1$, on voit de même que u se prolonge à :

$$\{x/|\operatorname{Im} x_n| < \delta \operatorname{Re} x_n, -(\operatorname{Im}\lambda_1 + \epsilon)\operatorname{Re} x_n < h(x')\} \cap \widetilde{V}_2$$

(il suffit de remplacer partout dans la démonstration $1/M$ par 0). D'autre part, lorsque $1 \leqslant j < m$, on a le résultat analogue avec $\operatorname{Im}\lambda_j < \operatorname{Im}\tau < \operatorname{Im}\lambda_{j+1}$ (même remarque lorsque $j = m$).

4. Théorème.

On reprend les mêmes notations que dans les sections 1 et 3, et on choisit h et les h_j de la même manière, c'est-à-dire telles que : si $T_{z_0} H = \{x \in T_{z_0}\mathcal{H}/\operatorname{Im} s(x) = 0\}$, alors :

$$dh(z_0) \cdot x = \operatorname{Im} s(x), \forall x \in T_{z_0}\mathcal{H} ;$$

$$h_j = s \text{ sur } T_{z_0}\mathcal{H}, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, m ;$$

$$\operatorname{Im} h_1 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Im} h_\mu < \operatorname{Im} h_{\mu+1} \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Im} h_m \text{ sur } \pi^{-1}(\nu_0).$$

Si $\mathcal{D} = \{\{H_1, \ldots, H_\mu\}, \{H_{\mu+1}, \ldots, H_m\}\}$, on peut alors énoncer :

THEOREME 2. – *Soit* (P, B) *un problème aux limites elliptique en* z_0 *pour* $\mathcal{D}$, *et soit* u *une fonction holomorphe définie sur* $\bigcup_{j=\mu+1}^{m} (U + V_j) \cap V$ *telle que* Pu *se prolonge holomorphiquement au voisinage de* z_0. *On note* $u_j = u|_{(U+V_j)\cap V}$. *Alors, si les prolongements des* u_j *donnés par le théorème 1 coïncident dans les intersections deux à deux de leurs domaines, on a :*

a) Il existe V' *voisinage de* z_0 *tel que* u *se prolonge à un ouvert* Ω *vérifiant :* $\Omega \cap \mathcal{H} = H_- \cap V'$, *où* $H_- = \{h < 0\}$.

b) Si de plus $Bu|_{\Omega \cap \mathcal{H}}$ *se prolonge holomorphiquement au voisinage de* z_0 *dans* $\mathcal{H}$, *alors* u *se prolonge holomorphiquement au voisinage de* z_0.

Démonstration. – De même qu'à la section 3, on se ramène à :

$$z_0 = 0 \; ; \; \mathcal{H} = \{x_n = 0\} \; ; s(x') = x_1 \; ; \; h_j(x) = x_1 + \lambda_j x_n \, ,$$

$$\nu_j = (-\lambda_j \, , 0 \, , \ldots \, , 0, 1) \, .$$

D'autre part, si $a \in]\operatorname{Im} \lambda_\mu \, , \operatorname{Im} \lambda_{\mu+1}[$, le changement de variables :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + i a x_n \\ y_j = x_j \text{ si } j \neq 1 \end{cases}$$

nous ramène à : $\operatorname{Im} \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Im} \lambda_\mu < 0 < \operatorname{Im} \lambda_{\mu+1} \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Im} \lambda_m$. Du fait que $-2i \partial h/\partial x'(0) = (-1, 0, \ldots, 0)$, l'hypothèse d'ellipticité s'écrit alors :

$$\begin{cases} p(0, -2i \, \partial h/\partial x'(0) \, , \xi_n) \neq 0 \, , \; \forall \, \xi_n \in \mathbf{R} \, ; \\ \dim \operatorname{Ker} p(0, -2i \, \partial h/\partial x'(0) \, , D_{x_n}) \cap S(\mathbf{R}^+) = \mu \, ; \\ \gamma_0 \, b(0, -2i \, \partial h/\partial x'(0) \, , D_{x_n}) : \operatorname{Ker} p \cap S(\mathbf{R}^+) \longrightarrow \mathbf{C}^\mu \text{ est bijective} \, , \end{cases}$$

où $S(\mathbf{R}^+)$ est l'espace de Schwartz sur $\mathbf{R}^+$, et où γ_0 désigne l'opérateur de restriction à $\{x_n = 0\}$. (On dira alors que (P, B) est elliptique en $(0, -2i \, \partial h/\partial x'(0))$).

D'autre part, on a vu qu'il existe $\delta_1 > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que :

$$\bigcup_{j=\mu+1}^{m} (U + V_j) \cap V \supset \{x / |\operatorname{Im} x_n| < \delta_1 \operatorname{Re} x_n \, ,$$

$$h(x')/\operatorname{Re} x_n \in \bigcup_{j=\mu+1}^{m} \,]-\operatorname{Im} \lambda_j - \epsilon_0 \, , -\operatorname{Im} \lambda_j + \epsilon_0[\, \} \cap V_1' \, ,$$

avec V'_1 voisinage de 0.

D'après le théorème 1, on en déduit déjà que u se prolonge à :

$$\Omega' = \{x/|\operatorname{Im} x_n| < \delta \operatorname{Re} x_n , h(x') < 0\} \cap V'_2$$

où $\delta > 0$, et où V'_2 est un voisinage de 0.

Démonstration du a). – On procède encore par déformations non caractéristiques. Soit $\epsilon > 0$. Dans le plan des x_n, on note C_ϵ le cercle de centre ϵ et tangent aux droites $\operatorname{Im} x_n = \pm \delta \operatorname{Re} x_n$. C_ϵ a donc pour rayon $r_\epsilon = \delta\epsilon/(1+\delta^2)^{1/2}$.

Soit aussi χ une fonction C^∞ réelle positive, telle que :

$\begin{cases} \operatorname{Supp} \chi = \overline{H}_- \cap \overline{V}'_2 \\ |\partial\chi/\partial x'| \leqslant \alpha \end{cases}$ ($\alpha \in \mathbf{R}^+$ sera ensuite fixé assez petit), et notons Γ_χ l'hypersurface : $|x_n - \epsilon| = \chi(x') + r_\epsilon$.

On pose aussi $1(x) = |x_n - \epsilon| - \chi(x')$, et on écrit P sous la forme :

$$P = D^m_{x_n} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(x , D_{x'}) D^k_{x_n} = D^m_{x_n} + Q(x , D_x)$$

avec A_k opérateur différentiel en x' de degré $m - k$.

On a :

$$|p(x , \partial 1/\partial x)| = \left| \left(\frac{\overline{x}_n - \epsilon}{|x_n - \epsilon|}\right)^m + q\left(x , -\partial\chi/\partial x' , \frac{\overline{x}_n - \epsilon}{|x_n - \epsilon|}\right)\right|$$

$$\geqslant 1 - \sum_{\substack{k+\ell=m \\ \ell \leqslant m-1}} |a_{k,\ell}(x)|\, |\partial\chi/\partial x'|^k$$

$$\geqslant 1 - C \sum_{\substack{k+\ell=m \\ \ell \leqslant m-1}} \alpha^k \geqslant 1 - C'\alpha > 0 \text{ si } \alpha < 1/C'.$$

Γ_χ est donc non caractéristique pour P. On en déduit d'après Zerner que u se prolonge à :

$$\{x/x' \in H_- , |x_n - \epsilon| < \chi(x') + r_\epsilon\} \cap V'_2$$

pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout χ tel que $|\partial\chi/\partial x'| < 1/C'$.

Par suite, u se prolonge à $\{x/x' \in H_- , |x_n| < \chi(x')\} \cap V'_2$, d'où le *a)*.

Démonstration du b). – D'après Cauchy-Kowalevski et le *a)*, il suffit de montrer que, pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $D^k_{x_n} u|_{x_n=0}$ se prolonge au voisinage de 0.

Il suffit d'autre part de démontrer le résultat lorsque $h(x') = \operatorname{Im} x_1 + \widetilde{C}|x'|^2$, $(\widetilde{C} > 0)$.

De même qu'à la section 2, on peut construire un changement de variables $\phi_\epsilon : x' \longrightarrow y'$ tel que $\phi_\epsilon(0) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$, et $\forall \epsilon > 0$, assez petit, $\phi_\epsilon(\overline{H}_+ \cap W) \subset \{\operatorname{Im} y_1 + 7\widetilde{C}(\operatorname{Im} y')^2 \geqslant \widetilde{C}(\operatorname{Re} y')^2 + \epsilon/2\}$, avec W voisinage de 0 indépendant de ϵ.

En définissant χ_1 comme à la section 2 et en posant

$$v^j_\epsilon(y') = \chi_1(y')\, D^j_{x_n} u(\phi_\epsilon^{-1}(y'), 0) \quad (j = 0, 1, \ldots, m-1)$$

on voit de même qu'il suffit de montrer que les expressions :

$$\int e^{i(x'-y')\xi' - |\xi'|(x'-y')^2/2}\, v^j_\epsilon(y')\, dy'$$

et

$$\int e^{i(x'-y')\xi' - |\xi'|(x'-y')^2/2}\, (1 + i y_k)\, v^j_\epsilon(y')\, dy',$$

$(k = 1, \ldots, n-1)$ sont majorées en module par $C_\epsilon e^{-|\xi'|/C}$, avec $C_\epsilon, C > 0$, C indépendant de ϵ, et ceci uniformément par rapport à x' dans un voisinage V_1 de 0 indépendant de ϵ.

Lorsque ξ' reste à l'extérieur d'un voisinage conique de $N = (-1, 0, \ldots, 0)$, la démonstration est identique à celle de la section 2.

Lorsque $\xi'/|\xi'|$ reste dans un voisinage de N, on pose :

$$T_0\, v^j_\epsilon(x', \lambda) = \int e^{-\lambda(x'-y')^2/2}\, v^j_\epsilon(y')\, dy'$$

et

$$T_k\, v^j_\epsilon(x', \lambda) = \int e^{-\lambda(x'-y')^2/2}\, (1 + i y_k)\, v^j_\epsilon(y')\, dy' \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Il suffit alors de montrer (cf. section 2) que

$$\|T_k\, v^j_\epsilon\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

est majoré par $C_\epsilon e^{-\lambda/C}$, avec Ω_1 voisinage de $-iN$ indépendant de ϵ, et $\varphi(x') = (\operatorname{Im} x')^2/2$.

Posons $\widetilde{\varphi}(x') = \varphi(x') + \delta_2 |x' - x'_0|^2$, avec $x'_0 = -iN$, et supposons $\delta_2 > 0$ et Ω_1 assez petits pour que (P, B) soit elliptique en $(x' + 2\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x')$ pour tout $x' \in \overline{\Omega}_1$.

On a alors (en notant $\widetilde{D}_{x_n} = \lambda^{-1} D_{x_n}$) :

LEMME 2. – $\exists\, C_0$ (*indépendant de* $\delta_2 \leqslant \delta_2^0$) *tel que* : $\forall\, v \in S(\mathbf{R}^+)$, $\forall\, \lambda > 0$, $\forall\, x' \in \Omega_1$,

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\widetilde{D}_{x_n}^k v(0)|^2 + \lambda \sum_{k=0}^{m} \int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_{x_n}^k v(x_n)|^2\, dx_n$$

$$\leqslant C_0 \left[\lambda \int_0^{+\infty} |p(x' + 2\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', 0, -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', \widetilde{D}_{x_n})\, v|^2\, dx_n \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\mu} |b_j(x' + 2\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', \widetilde{D}_{x_n})\, v(0)|^2 \right].$$

Démonstration. – D'après Hörmander [2] (chap. X, Th. 10-2-1), le résultat est vrai pour $\lambda = 1$. Il suffit alors de l'appliquer à $w(x_n) = v(x_n/\lambda)$, en remarquant que $D_{x_n} w(x_n) = (\widetilde{D}_{x_n} v)(x_n/\lambda)$ et, pour les intégrales, en faisant le changement de variable $y_n = x_n/\lambda$. □

Suivant le même principe que dans la section 2, notons $\widetilde{A}_k$ $(k = 0, \ldots, m-1)$ un O.P.D. tel que :

$$\forall\, v \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n-1}),\ \lambda^{-(m-k)}\, T A_k\, v \equiv \widetilde{A}_k\, Tv \text{ dans } H_{\varphi, x'_0},$$

où T désigne l'une des transformations T_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. $\widetilde{A}_k$ est alors d'ordre 0, a pour symbole principal

$$\widetilde{a}_k(x', x_n, \xi') = a_k(x' + i\,\xi', x_n, \xi'),$$

avec a_k symbole de A_k, et on a :

$$\forall\, v \in C_0^\infty(K),\ \|\lambda^{-(m-k)}\, T A_k\, v - \widetilde{A}_k\, Tv\|_{L^2_\varphi(\Omega_1)} \leqslant C e^{-\lambda/C}\, \|v\|_{L^1(K)}$$

si Ω_1 est assez petit, et avec K voisinage compact de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$.

D'après le lemme 1, on a aussi :

$\exists\, C_1 > 0$ telle que $\forall\, v \in H_\varphi^{loc}(\Omega_2)$, $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, $\forall\, x_n \in [0, a_0]$, $\forall\, \lambda \geqslant 1$:

$$\|\widetilde{A}_k\, v - \widetilde{a}_k(x', x_n, -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x')\, v(x')\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C_1 \lambda^{-1/2}\, \|v\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)}, \qquad (*)$$

où $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \mathbf{C}^{n-1}$ sont des voisinages de $-iN$, et où $a_0 > 0$.

Posons alors :

$C_2 = \mathrm{Sup}\{|D_{x_n} a(x)| / x' \in \overline{\Omega}_1, x_n \in [0, a_0]$, et a est coefficient dans $p(x' + 2\partial\tilde{\varphi}/\partial x', x_n, -2i\partial\tilde{\varphi}/\partial x', D_{x_n})\}$ et fixons

$$0 < \beta \leqslant 1/2C_2\sqrt{C_0}, \ 0 < \alpha < \beta (\leqslant a_0).$$

Soit aussi χ une fonction troncature sur $\mathbf{R}^+$, à support dans $[0, \beta]$, et valant 1 sur $[0, \alpha]$.

Si l'on note $\tilde{u}_\epsilon(x, \lambda) = T\overbrace{\chi_1 u(\phi_\epsilon^{-1}(\cdot), x_n)}^{u_\epsilon}$, on a alors :

$$\int_0^\beta \|p(x' + 2\partial\tilde{\varphi}/\partial x', 0, -2i\partial\tilde{\varphi}/\partial x', \tilde{D}_{x_n})\chi(x_n)\tilde{u}_\epsilon(x)\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n$$

$$\leqslant 2\int_0^\beta \|p(x' + 2\partial\tilde{\varphi}/\partial x', x_n, -2i\partial\tilde{\varphi}/\partial x', \tilde{D}_{x_n})\chi\tilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n$$

$$+ 2\beta^2 C_2^2 \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\beta \|\tilde{D}^k_{x_n}\chi\tilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n . \quad (1)$$

D'autre part, le lemme appliqué à $\chi\tilde{u}_\epsilon(x', \cdot)$ montre qu'on a, en multipliant les deux membres par $e^{-2\lambda\tilde{\varphi}(x')}$ et en intégrant sur Ω_1 :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\tilde{D}^k_{x_n}\tilde{u}_\epsilon|_{x_n=0}\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} + \lambda \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\beta \|\tilde{D}^k_{x_n}\chi\tilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n$$

$$\leqslant C_0\Big[\lambda\int_0^\beta \|p(x' + 2\partial\tilde{\varphi}/\partial x', 0, -2i\partial\tilde{\varphi}/\partial x', \tilde{D}_{x_n})\chi\tilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n$$

$$+ \sum_{j=1}^{\mu} \|b_j(x' + 2\partial\tilde{\varphi}/\partial x', -2i\partial\tilde{\varphi}/\partial x', \tilde{D}_{x_n})\tilde{u}_{\epsilon|x_n=0}\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)}\Big]$$

Cf. (1)

$$\leqslant C_0\Big[2\lambda\int_0^\beta \|p(x' + 2\partial\tilde{\varphi}/\partial x', x_n, -2i\partial\tilde{\varphi}/\partial x', \tilde{D}_{x_n})\chi\tilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n$$

$$+ 2\lambda\beta^2 C_2^2 \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\beta \|\tilde{D}^k_{x_n}\chi\tilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n$$

$$+ \sum_{j=1}^{\mu} \|b_j(x' + 2\partial\tilde{\varphi}/\partial x', -2i\partial\tilde{\varphi}/\partial x', \tilde{D}_{x_n})\tilde{u}_{\epsilon|x_n=0}\|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)}\Big] .$$

D'où, puisque $2\beta^2 C_2^2 C_0 \leqslant 1/2$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\widetilde{D}_{x_n}^k \widetilde{u}_\epsilon|_{x_n=0}\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} + \lambda \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\beta \|D_{x_n}^k \chi \widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n$$

$$\leqslant C_3 \Big[\lambda \int_0^\beta \|p(x' + 2\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', x_n, -2i\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', \widetilde{D}_{x_n}) \chi \widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} dx_n$$

$$+ \sum_{j=1}^{\mu} \|b_j(x' + 2\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', -2i\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', \widetilde{D}_{x_n}) \widetilde{u}_\epsilon|_{x_n=0}\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \Big] . \quad (2)$$

Posons maintenant :

$$\widetilde{P}(x, D_x) = \widetilde{D}_{x_n}^m + \sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{A}_k(x, \widetilde{D}_x, \lambda) \widetilde{D}_{x_n}^k ,$$

qui a pour symbole principal :

$$\widetilde{p}(x, \xi) = p(x' + i\xi', x_n, \xi)$$

et qui vérifie $(\forall x_n \in [0, \beta])$:

$$\|\widetilde{P}\widetilde{u}_\epsilon - \lambda^{-m} T P u_\epsilon\|_{L^2_{\varphi}(\Omega_1)}$$

$$\leqslant C e^{-\lambda/C} \sup_{\substack{k \leqslant m-1 \\ x_n \in [0,\beta]}} \|\widetilde{D}_{x_n}^k u_\epsilon\|_{L^1(\mathbf{R}^{n-1})} \leqslant C_\epsilon e^{-\lambda/C'} .$$

Comme $P u_\epsilon$ est holomorphe dans un voisinage de 0 indépendant de ϵ, on a aussi, en prenant Ω_1 assez petit :

$$\|T P u_\epsilon\|_{L^2_{\varphi}(\Omega_1)} \leqslant C_4 e^{-\lambda/C_4} ,$$

et donc, d'après l'inégalité précédente (et du fait que $\varphi \leqslant \widetilde{\varphi}$) :

$$\|\widetilde{P}\widetilde{u}_\epsilon\|_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} \leqslant C_\epsilon e^{-\lambda/C_5} , \forall x_n \in [0, \beta].$$

D'autre part, en appliquant (*) à $v = \widetilde{D}_{x_n}^k \widetilde{u}_\epsilon$, et par inégalité triangulaire, on obtient :

$$\|\widetilde{P}\widetilde{u}_\epsilon - p(x' + 2\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', x_n, -2i\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', \widetilde{D}_{x_n}) \widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)}$$

$$\leqslant C_6 \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \|\widetilde{D}_{x_n}^k \widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)} ; \quad (3)$$

D'où en intégrant de 0 à α :

$$\int_0^\alpha \|p(x' + 2\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', x_n, -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', \widetilde{D}_{x_n})\,\widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)}\,dx_n$$

$$\leqslant C\lambda^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^\alpha \|\widetilde{D}^k_{x_n}\,\widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)}\,dx_n + C_\epsilon\,e^{-\lambda/C}. \quad (4)$$

De manière analogue, on a aussi (après s'être ramené à $\deg_{D_{x_n}} B_j < m$) :

$$\|b_j(x' + 2\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', \widetilde{D}_{x_n})\,\widetilde{u}_{\epsilon\,|x_n=0}\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)}$$

$$\leqslant C\lambda^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\|\widetilde{D}^k_{x_n}\,\widetilde{u}_{\epsilon\,|x_n=0}\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2)} + C_\epsilon\,e^{-\lambda/C}. \quad (5)$$

De (2), (4), et (5), on déduit finalement (pour λ assez grand) :

$$\sum_{k=0}^{m-1}\|\widetilde{D}^k_{x_n}\,\widetilde{u}_{\epsilon\,|x_n=0}\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)} + \lambda\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^\beta \|\widetilde{D}^k_{x_n}\,\chi\,\widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)}\,dx_n$$

$$\leqslant C\Big[\lambda\int_\alpha^\beta p(x' + 2\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', x_n, -2i\,\partial\widetilde{\varphi}/\partial x', \widetilde{D}_{x_n})\,\chi\,\widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_1)}\,dx_n$$

$$+\lambda\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^\alpha \|\widetilde{D}^k_{x_n}\,\widetilde{u}_\epsilon\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2\setminus\Omega_1)}\,dx_n + \sum_{k=0}^{m-1}\|\widetilde{D}^k_{x_n}\,\widetilde{u}_{\epsilon\,|x_n=0}\|^2_{L^2_{\widetilde{\varphi}}(\Omega_2\setminus\Omega_1)}\Big]$$

$$+ C_\epsilon\,e^{-\lambda/C}.$$

Il ne reste plus qu'à majorer chaque terme du crochet de droite. Pour les deux derniers, on fait le même raisonnement qu'à la section 2 et pour le premier, on a (en notation abrégée) :

$$p(\widetilde{D}_{x_n})\,\chi\,\widetilde{u}_\epsilon = \int e^{-\lambda(x'-y')^2/2}\,p(\widetilde{D}_{x_n})\,\chi\,u_\epsilon(y', x_n)\,dy'.$$

Or, par hypothèse, l'hypersurface $H \times C_{x_n}$ est non caractéristique pour P en $(0,0)$. On en déduit que si β est assez petit, u_ϵ se prolonge dans un voisinage indépendant de ϵ de $\{0\} \times [\alpha, \beta]$. $p(\widetilde{D}_{x_n})\,\chi(x_n)\,u_\epsilon(\cdot, x_n)$ est alors holomorphe au voisinage de 0 pour tout $x_n \in [\alpha, \beta]$. On en déduit :

$$p(\widetilde{D}_{x_n})\,\chi\,\widetilde{u}_\epsilon = \int_{\gamma_1} e^{-\lambda(x'-y')^2/2}\,p(\widetilde{D}_{x_n})\,\chi(x_n)\,u_\epsilon(y', x_n)\,dy'$$

où γ_1 est un contour de la forme : $y' \longrightarrow y' + i\delta\widetilde{\chi}(y')\,y_0$,

avec $\widetilde{\chi} \geqslant 0, \widetilde{\chi} = 1$ près de $0, |y_0| = 1, y_0' > 0, \delta > 0$ assez petit. Sur γ_1, on voit facilement qu'il existe $\tau > 0$ tel que :

$$\mathrm{Re}(x' - y')^2/2 \geqslant \tau - (\mathrm{Im}\, x')^2/2$$

pour tout $x' \in \Omega_1$, $\mathrm{Re}\, x' \in \{\widetilde{\chi} = 1\}$, Ω_1 assez petit pour que $y_0\, \mathrm{Im}\, x' > 0$ sur $\overline{\Omega}_1$.

Par suite, $|p\, \chi\, \widetilde{u}_\epsilon|^2 \leqslant C\, e^{-2\tau\lambda + \lambda(\mathrm{Im}\, x')^2/2}$ sur $\Omega_1 \times [\alpha, \beta]$, et donc :

$$\int_0^\beta \| p\, \chi\, \widetilde{u}_\epsilon \|^2_{L^2_{\tilde{\varphi}}(\Omega_1)}\, dx_n \leqslant C'\, e^{-2\tau\lambda}.$$

On conclut alors de même qu'à la section 2.

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. BONY et P. SCHAPIRA, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, *Inventiones Math.*, 17 (1972), 95-105.

[2] L. HORMANDER, *Linear partial differential operators,* Springer Verlag, 1964.

[3] G. LEBEAU, *Non holonomie dans un problème de diffractions,* Séminaire Goulaouic – Schwartz, 1979-1980.

[4] G. LEBEAU, Fonctions harmoniques et spectre singulier, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4è série, 13 (1980), 269-291.

[5] PALLU DE LA BARRIERE et P. SCHAPIRA, *Application de la théorie des microfonctions holomorphes au problème de Cauchy à données singulières,* Séminaire Goulaouic – Schwartz, 1975-1976, exp. n° 23.

[6] J. SJOSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, n° 95 (1982).

[7] M. ZERNER, Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles, *C.R.A.S*, Paris, 272 (1971), 1646.

Manuscrit reçu le 13 février 1984.

André MARTINEZ,
Université de Paris-Sud
Bât. 425
F-91405 Orsay.