Revue d'Histoire des Mathématiques

La restauration et la comparaison, ou l'art de résoudre des équations quadratiques dans l'Europe latine

Marc Moyon

Tome 23 Fascicule 2

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :
Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : `rhmsmf@ihp.fr` / URL : `http//smf.emath.fr/`

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 89 €; prix public hors Europe : 97 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde

 N° ISSN : 1262-022X

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
23 (2017), p. 233–299

LA *RESTAURATION* ET LA *COMPARAISON*, OU L'ART DE RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS QUADRATIQUES DANS L'EUROPE LATINE

Marc Moyon

Résumé. — Dans le vaste mouvement d'appropriation, par l'Europe, des sciences des pays d'Islam, l'algèbre occupe une place non négligeable. En particulier, le *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī, texte publié à Bagdad entre 813 et 833 et reconnu comme acte de naissance officiel de la discipline, est plusieurs fois traduit en latin puis en langue vernaculaire.

Dans cette contribution, nous revenons brièvement sur l'historiographie des traductions/versions arabo-latines du texte d'al-Khwārizmī pour présenter et commenter tant le contenu que la forme (avec des données paléographiques et éditoriales) de l'une de ces versions: le *Liber restauracionis* [Livre de la restauration]. Nous tentons ensuite, au cours d'une analyse mathématique et historique, de mettre en évidence les éléments de continuité et de rupture de ce texte avec la tradition algébrique al-khwarizmienne afin de livrer nos hypothèses sur son contexte de rédaction. Enfin, notre contribution s'achève sur la première traduction moderne du texte étudié (en français).

Texte soumis le 13/11/2016, accepté le 24/02/2017, version finale reçue le 30/06/2017.

Marc Moyon, XLIM UMR 7252, Université de Limoges, 123, avenue Albert Thomas, F-87060 Limoges Cedex.
Courrier électronique : `marc.moyon@unilim.fr`
Url : `http://www.unilim.fr/pages_perso/marc.moyon/index.html`

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A30, 01A35, 01A75.

Mots clefs : Histoire des mathématiques, Moyen Âge, algèbre, symbolisme, traductions arabo-latines, al-Khwārizmī, Gérard de Crémone, Guillaume de Lunis, Euclide, irrationalité.

Key words and phrases. — History of Mathematics, Medieval Studies, Algebra, Symbolism, Arabic-Latin Translations, al-Khwārizmī, Gherard of Cremona, William of Lunis, Euclid, Irrationality.

Abstract (*Restoration* and *Comparison*, or The Art of Solving Quadratic Equations in Latin Europe)

In the vast movement of appropriation, by Europe, of the sciences of Islamic countries, algebra holds an important position. In particular, al-Khwārizmī's *Mukhtaṣar*, a text published in Baghdad between 813 and 833 and considered the official birth of the discipline, was several times translated into Latin and vernacular languages.

In this paper, we return briefly to the historiography of the Arab-Latin translations/versions of al-Khwārizmī's text to present and discuss both the content and the form (with paleographic and editorial data) of one of these versions: the *Liber restauracionis* [Book of Restoration]. We then attempt, in a mathematical and historical analysis, to highlight the elements of continuity and rupture between this text and the al-Khwarizmian algebraic tradition in order to present our hypotheses about the context of its composition. Our contribution ends with the first modern translation of the text we have studied.

Notre travail[1] a pour principale ambition d'enrichir notre connaissance de l'histoire de l'algèbre médiévale arabo-latine en livrant, pour la première fois, la traduction française du *Liber restauracionis* [Livre de la restauration]. Relativement peu (ou mal) étudié par l'historiographie classique, il s'agit néanmoins d'un texte connu depuis, au moins, le XIXe siècle lorsque le prince Baldassarre Boncompagni (m. 1894) l'édite, à partir d'une seule copie, dans l'article [Boncompagni 1851] qu'il rédige sur la vie et l'œuvre du prolifique traducteur tolédan Gérard de Crémone (m. *ca.* 1187) [Burnett 2001].

Dans un premier temps, nous revenons sur ladite historiographie pour replacer, dans un second temps, le texte dans son contexte d'écriture et/ou de traduction. Nous ne tentons pas de donner ici une analyse systématique et exhaustive de l'ensemble du texte mais plutôt de nous limiter aux éléments de rupture et de continuité que nous avons jugés utiles pour comprendre les intérêts historiques et mathématiques du texte : l'algèbre et ses objets caractéristiques, les opérations sur ceux-ci et les problèmes. La dernière partie est consacrée à la traduction française du texte.

---

1 Cette étude a été exposée une première fois lors du colloque de la *Revue d'Histoire des Mathématiques* organisé à l'IRMA de Strasbourg en octobre 2014, puis lors du séminaire conjoint du laboratoire SPHERE « mathématiques arabes » et « mathématiques à la Renaissance » en juin 2015. Je tiens à remercier ici les organisateurs pour m'avoir donné l'occasion de présenter une partie de ma traduction et certains éléments de ma réflexion, ainsi que les participants à ces deux manifestations pour les interrogations soulevées. Je remercie enfin les rapporteurs anonymes de la revue qui, grâce à leurs remarques et suggestions, m'ont permis d'améliorer substantiellement mon argumentation. Je précise en outre que le présent article complète un premier travail [Moyon 2007] dans lequel j'attirais l'attention sur quelques caractéristiques du texte médiéval étudié.

1. HISTORIOGRAPHIE ET SOURCES

1.1. *La tradition latine de l'algèbre d'al-Khwārizmī*

La tradition arabo-latine, c'est-à-dire la tradition textuelle des traductions (ou adaptations) de l'arabe au latin, de la résolution des équations de degré inférieur ou égal à deux est bien connue. Double, elle est d'abord et principalement basée sur le *Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* [Livre abrégé du calcul par la restauration et la comparaison][2], rédigé à Bagdad entre 813 et 833, par le mathématicien Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī [Djebbar 2016; Rashed 2007]. Ensuite, mais plus tardivement[3], il existe une traduction latine du *Kāmil fī l-jabr* [Livre complet sur la restauration] d'Abū Kāmil (m. 930) qui, comme la version originale arabe [Abū Kāmil 2004; Rashed 2012], se situe dans la filiation directe d'al-Khwārizmī, avec néanmoins quelques différences comme les preuves des algorithmes, la présence de nouveaux algorithmes donnant directement le carré de l'inconnue sans passer par l'inconnue et de nouveaux choix de problèmes ou données numériques [Kouteynikoff 2005; Moyon 2007; Rashed 2012]. Ajoutons enfin que seuls ces deux écrits de l'orient musulman — le *Mukhtaṣar* et le *Kāmil* — sont explicitement cités par les auteurs de l'occident musulman (Maghreb et *Andalus*, partie de la péninsule ibérique sous domination musulmane), même s'il est fort probable que d'autres algèbres orientales soient connues, tout ou partiellement, en Occident [Djebbar 2016, 99]. *De facto*, seules ces deux références se retrouvent explicitement dans les textes arabo-latins.

Quant à la tradition arabo-latine concernant précisément l'algèbre d'al-Khwārizmī[4], nous sommes aujourd'hui assurés de l'existence d'au moins deux entreprises. Les deux sont réalisées en *Andalus* au cours du XII^e^ siècle

2 Dans une équation, la comparaison [*muqābala*] des termes semblables amène à leur réduction [Souissi 1968, 274]. Nous choisissons de conserver le sens original, notamment à la suite de Djebbar [Djebbar 2005, 25], là où d'autres auteurs décident de traduire *muqābala* par « réduction » [Rashed 2007, 15].

3 D'après [Sesiano 1993], elle est relativement tardive car elle n'aurait pas été réalisée avant le XIV^e^ siècle. D'après [Allard 1997, 223], « celle-ci fût exécutée au plus tard à la fin du XII^e^ siècle ». Par ailleurs, cette algèbre arabe sera traduite en hébreu au cours du XV^e^ siècle [Levey 1966], autre vecteur d'appropriation de la science des pays d'Islam par une partie de la communauté scientifique du Nord de la Méditerranée. À propos de l'appropriation de l'algèbre arabe par la littérature hébraïque, pour les XII^e^-XIV^e^ siècles, voir spécifiquement les travaux de Lévy [Lévy 2003].

4 L'historiographie, depuis le début du XIX^e^ siècle, est largement détaillée dans [Lejbowicz 2012]. L'annexe de cette contribution fait la recension des manuscrits connus comportant l'algèbre d'al-Khwārizmī dans une de ses versions latines.

par deux des traducteurs les plus importants. L'une est due à Robert de Chester (actif *ca.* 1140) [Hughes 1989][5] et l'autre à Gérard de Crémone [Hughes 1986]. Les deux textes n'ont pas le même *incipit.* Gérard de Crémone préfère utiliser une translittération latine de l'arabe : « Commence ici le livre de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī à propos d'*algebra* et *almuchabala*[6] ». Robert de Chester, quant à lui, utilise les mots latins traduisant les mots arabes : « Commence ici, au nom de Dieu, clément et miséricordieux, le livre de la restauration et de l'opposition du nombre qui a été révélé par Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī[7] ».

À notre connaissance, pour viser l'exhaustivité, il faudrait ajouter trois autres textes : d'abord, les *Exceptiones de libro qui dicitur gebla et mucabala* [Extraits du livre qui est dit *gebla* et *mucabala*] de Jean de Tolède (actif *ca.* 1145) qui ne correspondent pas vraiment à une traduction mais plutôt à un remaniement de l'algèbre d'al-Khwārizmī et qui prolongent le *Liber alchorismi de practica arismetice* [Livre d'al-Khwārizmī sur la pratique de l'arithmétique] [Boncompagni 1857][8], ensuite le *Liber mensurationum* [Livre sur le mesurage] d'Abū Bakr dans lequel, sans être un texte purement algébrique, l'auteur met en avant les algorithmes de l'algèbre al-khwarizmienne pour résoudre des problèmes de géométrie pratique [Moyon 2012; 2017]. Enfin, mentionnons la soit-disant traduction de l'algèbre d'al-Khwārizmī, que nous intitulons *Liber restauracionis* [Livre de la restauration] en reprenant l'*incipit* d'une copie connue, attribuée à Guillaume de Lunis (de Luna ou Lunense) dans l'historiographie actuelle. C'est ce dernier texte qui, ici, nous intéresse principalement et nous lui consacrons la partie suivante.

1.2. *À propos de Guillaume de Lunis (troisième quart du* XIII*e* *siècle) et de sa prétendue traduction*

Le *Liber restauracionis* est édité par Boncompagni en 1851 à partir de la seule copie qu'il connaissait : le manuscrit — que nous nommons (V) dans

5 B. Hughes y recense l'ensemble des manuscrits comportant l'une ou l'autre des versions de l'algèbre d'al-Khwārizmī.

6 [Hughes 1986, 233] : *Liber Maumeti Filii Moysi Alchoarismi de algebra et almuchabala incipit.*

7 [Hughes 1989, 29] : *In nomine dei pii et misericordis incipit Liber Restauracionis et Opposicionis Numeri quem edidit Mahumed filius Moysi Algaurizmi.* Le terme *oppositio* est une traduction littérale de *muqābala* arabe [Djebbar 2005, 25].

8 Sur l'attribution à Jean de Tolède plutôt qu'à Jean de Séville comme l'avait postulé B. Boncompagni, voir [Allard 1992, 15-23].

la suite — de la Biblioteca Apostolica Vaticana Vat. Lat. 4606 (fol. 72r-77r) daté de la seconde moitié du XIVᵉ siècle[9] [Boncompagni 1851].

Depuis, une seconde copie — (L) — a été découverte. Conservée à la Bodleian Library d'Oxford, elle porte la cote Lyell 52 (anciennement Admont 612) (fol. 42r-49v) et est datée du début du XIVᵉ siècle[10] [Kaunzner 1985 ; 1986].

Un troisième témoin manuscrit est intéressant dans le cadre de notre travail : le Vat. Lat. 291 (fol. 34r-41v) de la Biblioteca Apostolica Vaticana, (U)[11]. Il s'agit d'une traduction, réalisée à Naples, en langue vernaculaire (italien) de la fin du XIVᵉ, voire de la seconde moitié du XVᵉ siècle. Son modèle pourrait être (V) avec quelques différences néanmoins (omissions et ajouts mineurs)[12].

Plusieurs informations sont contenues dans l'*incipit* de (V) : « Commence ici le livre qui, selon les Arabes, est appelé *algebra* et *almucabala*, et qui, chez nous, est nommé le livre de la restauration. Il a été traduit de l'arabe au latin, à Tolède, par le maître Gérard de Crémone[13] ». D'abord, nous remarquons que l'auteur de ces lignes combine le choix des deux traducteurs précédents avec, à la fois, la translittération arabe et la traduction latine d'*al-jabr*, précisant explicitement leur origine (voir note 76). Ensuite, précisons qu'il s'agit en réalité d'un pseudépigraphe. En effet, le texte ne compte pas parmi les traductions de Gérard de Crémone. À la suite de [Franci 2003 ; Hughes 1982 ; 1989 ; Kaunzner 1986], il est attribué à Guillaume de Lunis, attaché à l'Italie des *botteghe d'abaco* [écoles d'abaque], qui pourrait aussi correspondre à Guillaume de Luna, traducteur d'Averroès [Delle Donne 2007 ; Hissette 1997 ; 2001].

---

9 Description du manuscrit dans [Van Egmond 1980, 220].

10 Description du manuscrit dans [De la Mare 1971, 143-146].

11 Description du manuscrit dans [Van Egmond 1980, 215-217]. Van Egmond y précise notamment que « this ms. is largely an Italian trans. of the Latin text in Vat. Lat. 4606, which in turn is heavily based on Leonardo Pisano's *Liber abbaci* ».

12 Voir étude et édition dans [Franci 2003]. Lorsque nous utilisons ce manuscrit, nous le mentionnons explicitement, notamment pour toutes les représentations géométriques dont, malheureusement, aucune n'est reproduite par Franci.

13 (V), fol. 72r : *Incipit Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala, et apud-nos liber restauracionis nominatur, et fuit translatus a magistro Giurardo cremonense, in toleto de arabico in latinum.* (L) n'a pas d'*incipit* de ce genre, commençant directement par le texte principal.

Dans toute la suite, nous donnons une traduction française personnelle des citations du texte latin utilisées. Nous reproduisons le texte original en note de bas de page en reprenant l'édition critique réalisée dans [Kaunzner 1986]. Nous y indiquons aussi la foliotation des manuscrits que nous avons systématiquement consultés.

Plusieurs éléments textuels, déjà présentés dans [Hughes 1989, 22–25] et [Franci 2003, 26–27], assurent l'existence de Guillaume de Lunis comme traducteur d'un livre d'algèbre, sans davantage de détail. Il pourrait, en réalité, tout à fait correspondre au seul traducteur de la version vulgaire [Hissette 1997]. Nous les reprenons ici. D'abord, une main dans une glose marginale d'un manuscrit du début du XIIIe siècle — le Biblioteca Nazionale Centrale de Florence, Conv. Soppr. J.V.18 (aussi connu comme le ms. San Marci Florentini 216) —, précise à tort au début de la version de Gérard de Crémone :

> Commence ici le livre de Geber à propos du nombre, traduit par le maître Guillaume de Lunis, très habile dans les disciplines du *quadrivium*[14].

Guillaume est par ailleurs mentionné, plus tard, dans l'important *Trattato de praticha d'arismetrica* du Maître Benedetto de Florence (m. 1479) [Franci & Toti Rigatelli 1983 ; Ulivi 2002 ; Høyrup 2010, 30] :

> Remercions le Seigneur, ainsi commence le texte de l'*Algèbre* arabe, dans la règle de Geber, que nous appellons algèbre, laquelle règle d'algèbre, selon le traducteur Guglielmo de Lunis [...][15].

Il nous reste à citer Raffaele di Giovanni Canacci (m. 1495) qui écrit, peut-être à la suite du précédent, dans son traité d'algèbre (Florence, Biblioteca Nazionale, Cod. Palat. 567) :

> La règle d'algèbre, règle que Guillaume de Lunis a traduite de l'arabe dans notre langue[16],

et probablement encore repris par Francesco di Leonardo Ghaligai (m. 1536) au début du dixième livre de sa *Summa de arithmetica* à propos de Benedetto (de Florence) :

> Benedetto dit la règle de l'algèbre, laquelle a été traduite par Guillaume de Lunis de l'arabe dans notre langue et selon ledit Guillaume, cette règle a été

---

14 Florence, Biblioteca Nazionale Centrale, Conv. Soppr. J.V.18, fol. 80ra : *Incipit liber gebre de numero translatus a magistro Guillelmo de lunis in quadriviali sciencia peritissimo* ; cité dans [Hughes 1986, 223].

15 Sienne, Biblioteca Comunale degli Intronati, L.IV.21 ; fol. 368r : *Rendiamo gratie all'Altissimo, cosi chomincia el testo de l'Aghabar arabico nella reghola del geber la quale noi diciamo algebra, la quale reghola d'algebrea, secondo Guglielmo de Lunis translatore* [...] ; cité, en particulier, dans [Franci & Toti Rigatelli 1983, 29].

16 Florence, Biblioteca Nazionale, Cod. Palat. 567, fol. 1r : *La regola dell'argibra, la quale reghola Ghuglelmo de Lunis la traslato d'arabico a nostra linghua* ; cité dans [Karpinski 1910, 210].

composée par un homme arabe d'une grande intelligence et que certains disent qu'il a été nommé Geber [...][17].

Dans les travaux actuels, malgré les sages recommandations de [Hissette 1997, 128–129], il semble y avoir un consensus pour attribuer la paternité du *Liber restauracionis* à Guillaume de Lunis. Dans son édition/traduction du *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī, Rashed précise dans une note qu'il en existe trois traductions latines [Rashed 2007, 86]. En plus de celles de Gérard de Crémone et de Robert de Chester, il cite celle de « Guillaume de Luna » pour laquelle, contrairement aux deux autres, il ne donne aucune référence bibliographique. Aussi, dans une récente étude de l'introduction de l'algèbre arabe en Europe, Djebbar écrit, sans autre précision que la référence à [Kaunzner 1986], que le *Mukhtaṣar* « a bénéficié de trois traductions latines, réalisées par Gérard de Crémone (m. *ca.* 1187), Robert de Chester (*ca.* 1141) et Guillaume de Lunis (XIIIe s.) » [Djebbar 2016, 104]. En outre, dans leur « histoire de l'algèbre de l'Antiquité au début du XXe siècle », Katz et Parshall se hasardent à dater avec encore plus de précision la période d'activité du fameux Guillaume, auteur d'une traduction en latin : « There is at least one other independent translator into Latin of al-Khwārizmī's text, William de Lunis, who flourished in the first half of the thirteenth century » [Katz & Parshall 2014, 178]. À notre connaissance, seul Høyrup revient sur cette attribution dans une modeste note passée jusque-là inaperçue [Høyrup 2010, 13]. Sa conclusion est qu'il faut considérer, sans nouveaux éléments au dossier, le *Liber restauracionis* comme anonyme. Guillaume de Lunis serait, pour Høyrup, le traducteur d'une version italienne aujourd'hui perdue.

2. PRÉSENTATION DE L'ALGÈBRE : SES OBJETS, SES OPÉRATIONS CARACTÉRISTIQUES ET SES ALGORITHMES

2.1. *Contexte arithmétique : les entiers et les fractions*

Le contexte arithmétique du *Liber restauracionis* est original dans le paysage ontologique de l'algèbre arabe. En effet, al-Khwārizmī écrit :

> [...] j'ai trouvé que tous les nombres sont composés à partir de l'unité, et que l'unité est incluse dans tous les nombres [Rashed 2007, 96].

17 [Ghaligai 1521, 71v] : *Dice Benedetto la regola dell'arcibra, quale Guglielmo Delunis la traslato d'arabo a nostra Lingua & sicondo detto Guglielmo detta regola e composta da uno nome Arabo di grande intelligentia & che alcuni dicono effere stato uno il qual nome era Geber* [...].

Les deux traducteurs médiévaux reprennent littéralement les définitions de l'unité et du nombre[18]. Or, l'auteur du *Liber restauracionis*, quant à lui, écrit précisément le contraire concernant l'unité :

> L'unité est le principe du nombre et n'est pas un nombre. Le nombre est en effet une collection d'unités[19].

suivant très clairement la doctrine aristotélicienne [*Métaphysique*, N 1 1088a; Aristote 1970, 801–802], largement représentée par Boèce au Moyen Âge à partir de son *Institution arithmétique* [Boèce 1995, 12]. Néanmoins, il est très important de noter aussi que l'auteur considère, contrairement à Aristote lui-même [*Métaphysique*, N 1 1088a; Aristote 1970, 801–802] ou encore à Euclide [Euclide 1990, 247–249], l'unité comme divisible, ce qui lui permet d'inclure les fractions dans le domaine de l'arithmétique, en correspondance avec les multiples de l'unité[20] :

> De même que tout nombre est multiple de l'unité, ainsi ce même multiple est ce par quoi on dénomme ses parties. Par exemple, comme trois est le triple de l'unité, ainsi l'unité est le triple de sa troisième partie dénommée « un tiers ». D'où, il est nécessaire que, de quelque manière que ce soit, l'unité admette des multiplications infinies et qu'elle admette aussi des divisions infinies dans le même intellect et la même raison[21].

Cela marque une nouvelle différence avec l'introduction arithmétique d'al-Khwārizmī qui ne mentionne pas les parties de l'unité, à savoir les fractions, à ce stade.

Dans la suite, l'introduction arithmétique du *Liber restauracionis* est dans la pure tradition du calcul indien héritée du *Kitāb fī ḥisāb al-Hind* [Livre

---

18 On lit, chez Gérard de Crémone, « [...] *repperi totum illud numerum fore, omnemque numerum ab uno compositum esse inveni. Unus itaque inter omnem consistit numerum* » [Hughes 1986, 233] et, chez Robert de Chester : « [...] *inveni nihil aliud esse numerum, nisi quod ex unitatibus componitur. Unitas ergo est qua unaqueque res dicitur una, et unitas in omni numero reperitur* » [Hughes 1989, 29]. Abū Kāmil, quant à lui, ne donne aucune définition du nombre au début de son traité.

19 (L), fol. 42r; (V), fol. 72r : *Unitas est principium numeri et non est numerus. Numerus enim est collectio unitatum* [...].

20 Cette correspondance n'est pas sans rappeler le schéma lambdoïde de Jamblique dans son *In Nicomachi arithmeticam* où « l'unité est à la fois l'origine des nombres et celle des « parties » (les fractions unitaires) » [Jamblique 2014, 210], ce qui nous rapproche une nouvelle fois de Boèce [Guillaumin 1994].

21 (L), fol. 42r; (V), fol. 72r : [...] *sicut ergo omnis numerus multiplex unitatis est, sic eadem multiplex est ab eo denominate sue partis. Verbi gratia, ut ternarius triplex est unitatis, sic unitas tripla est sue tercie partis, a ternario denominate; unde necesse est, ut quemadmodum infinitas multiplicationes suscipit unitas, infinitas quoque partes eadem intellectu et ratione suscipiat.*

sur le calcul indien] d'al-Khwārizmī dont l'original arabe est perdu mais dont les adaptations arabo-latines[22] circulent en *Andalus* et au Maghreb extrême dès le XII^{e} siècle [Allard 1992]. C'est en effet la numération décimale positionnelle qui est explicitée, avec l'utilisation des chiffres indo-arabes dont la graphie est caractéristique des XIII^{e}/XIV^{e} siècles pour les deux copies (L) et (V), siècles pendant lesquels les chiffres adoptent une forme stable [Beaujouan 1948, 305–307 ; Burnett 2002]. Est alors définie la notion de « limite[23] » — que nous avons choisi de traduire par « ordre » —, c'est-à-dire les puissances successives de dix : unités, dizaines, centaines, etc. Les éléments d'un ordre (à partir du deuxième) sont obtenus en multipliant par dix les neuf éléments de l'ordre précédent. L'on passe ainsi de 1, 2, 3, 4,… à 10, 20, 30, 40, puis à 100, 200, 300, 400, etc.

Un point mérite d'être soulevé ici. Les fractions, largement utilisées, ne sont pas représentées de la même manière dans les deux manuscrits connus. Tandis que dans (L) — qui serait le plus ancien des deux —, le copiste écrit en toutes lettres les fractions (qu'elles soient simples ou composées d'une somme avec un entier), le copiste de (V) utilise, quant à lui, la barre de fraction horizontale utilisée en *Andalus* dès le XII^{e} siècle[24]. La figure 1 propose quelques exemples extraits de (V).

$\frac{1}{2}$ (fol. 74r) $\frac{1}{5}$ (fol. 75v) $\frac{2}{3}$ (fol. 74r) $\frac{11}{12}$ (fol. 74r)

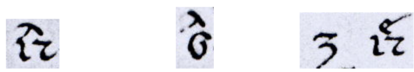
FIGURE 1. Représentation paléographique des fractions dans (V)

22 Aucun texte latin connu ne semble être une traduction directe du texte d'al-Khwārizmī. Si le *Dixit Algorizmi…* (connu par le seul Cambridge, University Library, Ii.6.5, fol. 104r–111v) est considéré comme la version latine la plus ancienne et la plus proche de l'original, il « se révèle comme un texte hybride et non comme une traduction fidèle du texte arabe d'al-Khwārizmī » [Allard 1992, v]. Voir, en outre, le schéma proposé par Allard pour rendre compte des rapports entre les versions latines connues et la version arabe [Allard 1992, xxvii].

23 Ce terme de *limes* est attesté dans plusieurs textes médiévaux, voir [Benedict 1914, 32] ou encore [L'Huillier 1990, 652].

24 À notre connaissance, le plus ancien texte connu dans lequel l'auteur utilise l'écriture d'une fraction avec une barre horizontale séparant le numérateur du dénominateur est le *Kitāb al-bayān wa-l-tadhkār* [Livre de la démonstration et du rappel] d'al-Ḥaṣṣār (actif au XII^{e} s.) [Djebbar 1981 ; Djebbar 1992 ; Moyon & Spiesser 2015, 400–403].

Par ailleurs il faut encore noter une utilisation, par le seul copiste de (V), peu commune dans les textes mathématiques connus de lettres suscrites pour rendre l'inverse d'un nombre[25] : *a* pour le singulier, *e* pour le pluriel. En outre, la désinence féminine correspond au terme partie (*pars*) sous-entendu. Par exemple, ledit scribe écrit $\overset{a}{12}$ pour *una duodecima* [un douzième] plutôt que $\frac{1}{12}$ pour l'inverse de 12 (Figure 2).



$\frac{1}{12}$ (fol. 74r) $\frac{1}{6}$ (fol. 76v) $\frac{3}{12}$ (fol. 74r)

FIGURE 2. Représentation paléographique de l'inverse dans (V)

2.2. *Les objets de l'algèbre et leur représentation*

Comme al-Khwārizmī, l'auteur poursuit avec la désignation des trois modes du nombre nécessaires pour le calcul par l'algèbre : la racine, le bien et le nombre seul. L'auteur pourra ensuite dresser l'ensemble des types possibles de problèmes en combinant ces trois modes entre eux : un à un (pour donner des équations de type simple) et un à deux (équations de type composé)[26].

La comparaison des deux paragraphes repris dans la table 1 montre une grande similitude, mais pas une identification parfaite. La distinction est nette à propos de la définition de la racine. Celle donnée par al-Khwārizmī de *jidhr* (relativement obscure), n'est pas celle proposée par l'auteur du *Liber restauracionis*. Ce dernier la définit explicitement comme la racine [carrée] du bien : « c'est le nombre qui, multiplié par lui-même, produit l'autre [à savoir le bien] ». Et, précisément, le bien est le nombre « produit à partir de ladite racine multipliée par elle-même ». Ces deux dernières définitions deviennent circulaires alors qu'elles étaient indépendantes dans le

---

25 Nous remercions ici l'archiviste paléographe Marc Smith de l'École nationale des chartes qui nous a bien confirmé l'utilisation des deux lettres suscrites *a* et *e*.

26 Devant l'implicite de notre auteur, nous avons choisi l'expression « *modes* du nombre » dans la continuité de *ḍarb* utilisé dans le *Mukhtaṣar* et *modus* des deux traductions arabo-latines connues [Rashed 2007, 96; Hughes 1986, 233; Hughes 1989, 30]. Ainsi, nous évitons toute ambiguïté avec « type » que nous utilisons pour rendre aussi *modus* du texte latin et qui désigne, quant à lui, les six cas possibles d'équations obtenues en combinant les trois modes du nombre. Voir, ci-après, « les différents types d'équations ».

Table 1. Définitions des trois modes du nombre : racine, carré et nombre simple

Le *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī d'après [Rashed 2007, 96]	*Liber restauracionis* d'après [Kaunzner 1986, 50]
J'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'*al-jabr* et d'*al-muqābala*, selon trois modes qui sont : les racines, les *carrés*, et le nombre simple, qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un *carré*. La racine, parmi ces modes, est toute chose multipliée par elle-même, à partir de l'unité, les nombres qui sont au-dessus d'elle, et les fractions qui sont au-dessous d'elle. Le *carré* est ce qu'on obtient lorsqu'on multiplie la racine par elle-même. Le nombre simple est un nombre qu'on exprime sans qu'il soit rapporté ni à une racine, ni à un *carré*.	Quant au nombre qui est nécessaire pour notre calcul, il est divisé en trois [modes] : la racine du nombre, le carré ou le bien de la racine et le nombre simple associé ni avec le carré ni avec la racine. Quant à la racine, c'est le nombre qui, multiplié par lui-même, produit l'autre. Quant au bien ou le carré de la racine, c'est le nombre qui est produit à partir de ladite racine multipliée par elle-même. Le nombre simple est ce qui n'est produit par le moyen d'aucun bien ou d'aucune racine[a].

[a] (L), fol. 42r ; (V), fol. 72r : *Numerus autem, secundum quod nostre computationi necessarius est, in 3ª dividitur : in radicem numeri, quadratum sive censum radicis, et numerum simplicem, nec censui nec radici comparatur. Radix autem est numerus, quo in se ducto, alter procreatur. Census autem vel quadratus radicis est numerus, qui ex ducta radice in se producitur. Numerus simplex est is, qui per se producitur, nulla censum vel radicem collatione respiciens.*

Mukhtaṣar. Enfin, la terminologie latine utilisée est celle stabilisée par Gérard de Crémone avec le *census* (équivalent du *māl* arabe) pour désigner le carré arithmétique de la racine, là où Robert de Chester utilise *substancia*[27]. L'inconnue, quant à elle, est signalée par, indistinctement, soit *radix* qui serait la racine [carrée du bien] (traduction du *jidhr* arabe), soit *res* qui signifie littéralement la chose (traduction du *shayʾ* arabe) [Oaks & Alkhateeb 2005].

Plus loin dans le *Liber restauracionis*, l'auteur propose une représentation des nombres et des objets de l'algèbre tout à fait originale. C'est un des paragraphes les plus importants du texte. Il avait d'ailleurs attiré l'attention de Boncompagni et Woepcke dans leurs travaux sur le symbolisme algébrique [Boncompagni 1851 ; Woepcke 1854], car il n'est présent, en l'état, dans aucune algèbre connue des pays d'Islam, que ce

[27] Dans le *Liber restauracionis*, le terme *census* ne désigne jamais le carré géométrique. Celui-ci est rendu par *tetragonum* ou plus rarement par *quadratus* qui, quant à eux, peuvent aussi désigner le carré de l'inconnue.

soit en orient ou en occident musulmans. Si, de toute évidence, ce n'est pas chez al-Khwārizmī que l'auteur puise ces connaissances-là, c'est sans aucun doute dans des sources de l'occident musulman. Comme nous allons le montrer, il pourrait s'agir d'une transcription latine partielle du symbolisme algébrique utilisé dans les écrits mathématiques d'*Andalus* à partir du XII^e siècle, avec quelques différences. À notre connaissance, le plus ancien texte connu dans lequel son auteur utilise des symboles algébriques pour l'écriture de monômes et de polynômes est le *Talqīḥ al-afkār fī l-ʿamāl bi rushūm al-ghubār* [La fécondation des esprits sur les opérations par les chiffres de poussière] du sévillan Ibn al-Yāsamīn (m. 1204). Dans cette tradition de langue arabe, le bien et la chose sont respectivement représentés par م et ش, les premières lettres de مَال [māl] et شَيء [shayʾ]. Même s'il n'y a pas, en général, de symbole qui représente un nombre simple, quand on a besoin de distinguer dans les calculs algébriques les coefficients des inconnues, la première lettre de عَدَد [ʿadad] est parfois utilisée [Djebbar 1981, 41–54]. En outre, lorsque deux quantités sont ajoutées, aucun signe n'est écrit entre celles-ci. Lorsqu'une quantité est retranchée d'une autre, on utilise le symbole privatif (ou de négation) لَا [lā] pour les séparer. Enfin, ce symbolisme est utilisé pour écrire une équation grâce au ل, dernière lettre de عَدَلَ [ʿadala] qui signifie « être égal »[28].

Dans le texte latin ici étudié, comme l'extrait suivant nous l'indique, le symbolisme, explicitement rattaché aux calculs par *al-jabr et al-muqābala*, est basé sur la désignation de chacun des trois modes du nombre, à savoir le bien x^2, la chose ou la racine x et le nombre seul, par une lettre et un signe pour indiquer s'ils sont « ajoutés » ou « retranchés ».

> Dans la suite, chaque calcul qu'on pratique dans la restauration de ce qui est retranché ou dans la réduction du surabondant, est susceptible de changement pour [se ramener à] l'un des six chapitres. Afin que cela devienne plus facile à apprendre, nous donnons quelques règles pour écrire et pour multiplier. [...]

---

28 Voir, par exemple, [Lamrabet 1994, 237–241], [Djebbar 2005, 91–94] ou encore [Ibn al-Hāʾim 2003, 292–299]. L'utilisation de ces symboles est encore attestée au Maghreb au XV^e siècle, notamment dans le *Ḥaṭṭ al-niqāb ʿan wujūh aʿmāl al-ḥisāb* [L'abaissement de la voilette sur les formes des opérations du calcul] d'Ibn Qunfundh al-Qusantīnī (m. 1407) [Lamrabet 1994, 237–241 ; Djebbar 1998, 92 ; Djebbar 2005, 78] ou encore en marge d'un commentaire de l'*Urjūza fī l-jabr wa l-muqābala* [Poème sur la restauration et la comparaison] d'Ibn al-Yāsamīn rédigé par Ibn Hāʿim (m. 1412) [Ibn al-Hāʾim 2003, 289–299]. Lamrabet signale leur utilisation encore au XIX^e siècle chez le mathématicien de Rabat al-Tādilī [Lamrabet 1994, 239]. Abdeljaouad a montré, quant à lui, leur appropriation par des mathématiciens ottomans de l'orient musulman aux XVIII^e/XIX^e siècles [Abdeljaouad 2011].

> Que l'on se souvienne en effet de cette règle d'écriture : en-dessous du nombre de biens, plaçons la lettre *c*, en-dessous du nombre de racines, plaçons la lettre *r*, avec une petite ligne encore plus bas. Mais les drachmes ont une petite ligne sans lettre toutes les fois où elles sont proposées sans diminution. [...]
>
> Mais, à chaque fois que l'on considère quelque [mode du nombre] diminué d'un autre, on écrit celui-ci en bas de l'autre avec un point à la place de la petite ligne indiquant ainsi la diminution[29].

Des exemples, sous forme tabulaire (Figures 3, 4 & 5), sont donnés dans le corps du texte dans (L) et dans les marges de (V) pour illustrer les explications de l'auteur, avec des renvois explicites dans le texte. Nous les avons intégralement repris dans notre traduction française.

Pour représenter le bien x^2, l'auteur écrit un *c*, première lettre du mot *census* au-dessus d'une petite ligne si la quantité est à ajouter, au-dessus d'un point si elle est à retrancher. De même, *r*, première lettre de *res* ou *radix* au-dessus d'une petite ligne (resp. d'un point) désigne l'inconnue x à ajouter (resp. à soustraire). Quant aux drachmes (nombre seul rapporté ni au bien, ni à la racine), les illustrations ne sont pas tout à fait en accord avec les préconisations du texte. En effet, comme dans la tradition arabe du Maghreb, aucune lettre ne devrait être inscrite alors qu'un *d*, première lettre de *dragma*, est inscrit (dans les deux copies[30]) au-dessus d'une petite ligne ou d'un point suivant s'ils sont « à ajouter » ou « à retrancher ».

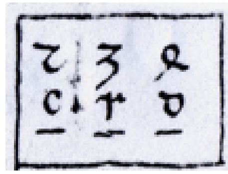
Trois tableaux, chacun proposant trois ou quatre expressions différentes, viennent illustrer la règle (Figures 3, 4 & 5). Le premier décrit un monôme en x^2 ou x avec coefficients entiers, et un nombre entier. Le deuxième reprend ces trois modes avec des coefficients fractionnaires. Au passage, on peut noter une nouvelle écriture fractionnaire : dans les deux copies, les fractions sont représentées avec le numérateur au-dessus du dénominateur sans barre horizontale pour les séparer. Le troisième illustre l'écriture de quatre binômes dont le deuxième terme est systématiquement retranché.

---

29 (L), fol. 44v; (V), fol. 73v : *Porro omnis computus, qui in restauratione diminuti vel projectione superhabundantis (*V *: particione superhabundans) exercetur, ad aliquod horum 6 capitulorum convertibilis est, quod, ut levius fiat discenti, quedam scribendi et multiplicandi praecepta damus* [...] *In scribendo quidem haec regula teneatur : numero censuum littera c, numero radicum littera r, deorsum virgulas habentes, subterius apponantur, dragme vero sine litteris virgulas habeant, quotiens haec sine diminutione praeponuntur.* [...] *Quotiens autem ex aliquo istorum diminutum quid proponitur, aliud ei subscribatur, habens punctum loco virgule, diminutionem indicans.*

30 Notons néanmoins une exception pour le dernier des trois tableaux présentés dans (L), le copiste n'indique pas les lettres *d* là où celui de (V) les indique.

(L, fol. 44v)



(V, fol. 73v)

FIGURE 3. Écriture symbolique de $+2x^2$; $+3x$; $+4$

(L, fol. 45r)

(V, fol. 73v)

FIGURE 4. Écriture symbolique de $+\frac{2}{3}x^2$; $+\frac{3}{4}x$; $+\frac{4}{5}$

(L, fol. 45r)

(V, fol. 73v)

FIGURE 5. Écriture symbolique de $2x^2 - 3x$; $2x^2 - 4$; $5x - 2x^2$; $5x - 4$

Dans (U), l'adaptation italienne de (V), les lettres utilisées sont : *s* pour *senso* ou *cienso*, *c* pour *cose* et *d* pour *dramme*. Le paragraphe énonçant la règle n'est pas tout à fait identique et gomme l'incompréhension précédente en rendant systématique l'utilisation de la lettre *d* pour les nombres :

> En écrivant cette règle, que soit écrit *s* pour le cens, c'est-à-dire pour les sens, en disant que le sens est cens, et que soit écrit *c* pour les choses et *d* écrit pour les drachmes, c'est-à-dire pour les nombres[31].

---

31 (U), fol. 36v–37r : *Scrivendo la ditta per reghula, che per lo cienso scrivete s, cioè per li sensi, dicendo che senso sia cienso, e per le cose scrive c e per le dramme scrive d, cioè per li numeri.*

Venons-en maintenant à l'utilisation effective de ce symbolisme. Elle est malheureusement extrêmement réduite car ces symboles ne sont jamais utilisés dans le corps du texte pour traduire un énoncé ou une résolution de problème. L'auteur du *Liber restauracionis* ne s'exprime que dans le style rhétorique habituel pour ce type de texte. En particulier, comme l'auteur n'a pas de symbole pour écrire l'égalité entre deux monômes ou binômes, il est incapable de manipuler une équation sous forme symbolique.

Ces symboles apparaissent néanmoins dans trois illustrations géométriques des premiers problèmes d'application des algorithmes — trois problèmes de partage de dix. Cette utilisation nous a été révélée par la lecture de (U) dans laquelle les diagrammes sont proprement exécutés et encore lisibles[32]. Certes ces diagrammes ne sont pas explicitement annoncés dans le texte (comme les tableaux précédents, par exemple) mais ils correspondent parfaitement à la construction proposée par l'auteur. Voici le premier de ces trois problèmes :

> Nous divisons 10 en [deux] parties telles que le carré de l'une est le quadruple du produit de l'une par l'autre, et le problème est de savoir quelles sont ces parties. Sa règle est ainsi : posons 10 comme la ligne AB, séparée en C selon les parties déjà mentionnées. Que l'une, à savoir AC, renferme la chose. Par conséquent, le reste CB est 10 moins la chose[33].

Le diagramme qui l'accompagne est représenté en figures 6 et 7. Il confère une réalité géométrique au problème. Il comporte à la fois les éléments qui vont permettre de le mettre en équation, et c'est précisément là que le symbolisme est utilisé, ainsi que la solution du problème : le couple $(8; 2)$.

Trois grandeurs sont ici données : $AB = 10$, $AC = r$ et $CB = 10 - r$. À première vue, la représentation symbolique de $10 - r$ est divergente par rapport à la proposition de notre auteur. En effet, on lirait plutôt $-10r$.

---

32 Dans (V, fol. 75r), seuls deux diagrammes se laissent difficilement deviner en marge et semblent avoir été réalisés par la même main que tous les autres diagrammes marginaux (notamment ceux illustrant la preuves des algorithmes, *cf.* ci-après). Nous n'avons repéré aucun diagramme de ce type dans (L). D'ailleurs, ils ne sont mentionnés dans aucune étude connue ; [Boncompagni 1851 ; Kaunzner 1986 ; Woepcke 1854]. Notons en outre qu'il y a un réarrangement des problèmes entre (L)-(V) et (U) : le troisième problème de (L) et (V) est devenu le second de (U). C'est le diagramme du troisième problème de (V) qui est totalement effacé, contrairement au diagramme du second problème de (U). Trois diagrammes sont représentés dans (U) : un pour chacun des trois premiers problèmes.

33 (L), fol. 47v : (V), fol. 75v : *Dividimus 10 in tales partes, quarum unius tetragonus quadruplus sit producto ex una in alteram, et quenam sint ille partes, quaestio sit. Huius vero prima regula talis est : Ponemus lineam AB 10, divisam ad C secundum praedictas partes, et esto una earum, scilicet AC, res; consequens est ergo, ut reliqua CB sit 10 minus re.*

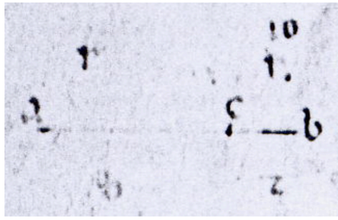


FIGURE 6. Diagramme en marge (V, fol. 75r).

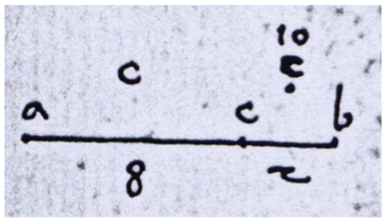


FIGURE 7. Diagramme correspondant, en marge du manuscrit italien (U, fol. 39r). Rappelons qu'ici, le *c* (pour *cosa*) représente le *r* latin (pour *res*).

Mais, il n'est pas si difficile de lever cette semblante absurdité. En effet, si l'on omet à la fois la lettre *d* pour le nombre (ce que stipule d'ailleurs explicitement l'auteur) ainsi que le coefficient unitaire de *r*, on opère alors la transformation suivante (Figure 8), et on arrive à la lecture des manuscrits.

$$\begin{array}{c} 10 \\ \underline{d} \\ 1 \\ \underset{\cdot}{r} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} 10 \\ \underset{\cdot}{r} \end{array}$$

FIGURE 8. Transcription symbolique des données du problème

Remarquons, pour conclure cette partie sur la représentation symbolique des trois modes du nombre, quelques différences avec celle opérée en occident musulman. D'abord, il faut noter que l'utilisation du symbolisme dans les diagrammes géométriques comme dans le *Liber restauracionis* ne se trouve dans aucun ouvrage de langue arabe connu. Ensuite, comme nous l'avons déjà précisé, la distinction du texte latin portant sur les quantités à ajouter ou à retrancher n'existe pas ainsi dans la tradition arabe d'Occident[34]. Nous devons enfin rappeler une dernière différence fondamentale avec le symbolisme de l'occident musulman : dans le *Liber restauracionis*, en l'absence d'un symbole pour l'égalité comme dans la tradition textuelle arabe d'occident, les symboles proposés (*c*, *r* et *d*) avec la convention associée (pointé ou souligné) ne peuvent pas être utilisés pour écrire des équations.

Ces divers éléments nous amènent à croire que nous sommes sans doute en présence des tout premiers balbutiements d'un symbolisme algébrique qui est encore loin de s'imposer dans les pratiques réelles d'écriture. Néanmoins, nous pouvons raisonnablement prétendre que l'auteur du *Liber restauracionis* n'est pas sans connaître la tradition algébrique de l'occident musulman, et même, selon toute vraisemblance, le travail d'Ibn al-Yāsamīn, de ses contemporains et de certains de ses successeurs. Il intègre ainsi, de manière pertinente mais non aboutie, certains de ces éléments, au sein d'un texte plus classique. En outre, nous avons là aussi un argument pour assurer que le texte (et certainement son auteur) a des liens indéniables avec l'occident musulman qu'il utilise pour se démarquer du texte oriental d'al-Khwārizmī.

2.3. *Les différents types d'équations*

À l'instar du mathématicien bagdadī al-Khwārizmī, l'auteur du *Liber restauracionis* est maintenant équipé pour dresser sa classification des différents types [*modus*] — autrement dit (en langage moderne), des équations de degré inférieur ou égal à deux — obtenus en combinant entre eux les trois modes du nombre. Il obtient ainsi les six types canoniques (Table 2). Sans surprise[35], il adopte la classification donnée, au IXe

34 Michel Chasles repère déjà cette originalité dans une lettre adressée à Boncompagni même s'il le fait en des termes relativement anachroniques car il n'est pas question, ici, de « quantités positives et négatives » mais simplement de quantités « à retrancher » ou « à ajouter » : « *La notation des quantités négatives est un fait original qui peut indiquer une source hindoue, et qui est intéressant aussi pour l'histoire de l'algèbre chez les Européens. On pourra s'étonner que cette notation, qui impliquait un principe capital, savoir, la distinction des quantités positives et négatives, tandis que les Arabes, comme on le voit notamment par l'algèbre de Mohammed ben Musa et celle de Fibonacci, ne connaissaient que des quantités positives* » [Boncompagni 1851, 436].

35 Malgré tout, il aurait pu en être autrement puisque d'autres auteurs des pays d'Islam ont choisi une autre classification pour les trois premiers types, notamment en Orient mais pas seulement. En particulier, al-Karajī (m. 1029), al-Samawʾal (m. 1175) et al-Kāshī (m. 1429) adoptent l'ordre 3-1-2, et al-Bīrūnī (m. 1048), al-Khayyām (m. 1131), al-Qurashī (m. 1184) ou encore Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī (m. 1213) suivent

siècle, par al-Khwārizmī et que l'on retrouve chez Abū Kāmil et dans les deux versions arabo-latines connues.

TABLE 2. Les six types des problèmes linéaires et plans, séparés en types simples (types 1, 2 et 3) et types composés (types 4, 5 et 6)

Types	équations ($p, q \in \mathbb{Q}_+^*$)
Type 1	$x^2 = px$
Type 2	$x^2 = q$
Type 3	$x = q$
Type 4	$x^2 + px = q$
Type 5	$x^2 + q = px$
Type 6	$x^2 = px + q$

Cependant, quelques différences entre le texte fondateur de l'algèbre et le *Liber restauracionis* sont à nouveau à mettre en évidence. Pour les types 2 et 3, l'auteur du *Liber restauracionis* n'est pas aussi explicite qu'al-Khwārizmī : en effet, il se limite à donner la valeur du bien (type 2) ou de la racine (type 3) laissant au lecteur le soin de déterminer respectivement sa racine (type 2) et le bien (type 3). Al-Khwārizmī, quant à lui, détaille tout en donnant systématiquement les valeurs du bien et de sa racine. Cette même concision se retrouve pour les types composés où les exemples d'équations non unitaires ne sont pas résolus mais seulement énoncés (contrairement à ce que l'on trouve dans le *Mukhtaṣar*). Ensuite, toujours pour les trois types composés, là où al-Khwārizmī (suivi par Gérard de Crémone et Robert de Chester) propose ses algorithmes de résolution exclusivement à partir d'exemples numériques à valeur générale[36], l'auteur du *Liber restauracionis* propose, quant à lui, des énoncés généraux suivis d'exemples numériques.

l'ordre 3-2-1. Voir, par exemple, [Djebbar 1981, 9]. Pour Djebbar, « *en Occident, et jusqu'au XIII^e siècle, la tradition semble avoir été plus forte : Malgré la maîtrise de toutes les opérations de l'algèbre et la manipulation courante des polynômes et des équations associées, on retrouve la classification inchangée. C'est le cas chez Ibn Badr, et chez Ibn al-Yāsamīn* » [Djebbar 1981, 10]. Au XIII^e siècle, en latin, Fibonacci (m. après 1241), quant à lui, conserve l'ordre des types simples mais adopte l'ordre 4-6-5 pour les trois types composés [Fibonacci 1857, 406–407].

36 À propos du premier type composé représenté par l'équation canonique $x^2 + 10x = 39$, Rashed précise que « compte tenu du rôle des paramètres, il n'y a pas d'anachronisme à écrire $x^2 + bx = c$ » [Rashed 2007, 32], c'est-à-dire à la considérer comme générale. Rashed travaille ensuite avec les formes $x^2 + c = bx$ et $x^2 = bx + c$ ($b, c \in \mathbb{Q}_+^*$) des deux derniers types composés pour les mêmes raisons, en transcrivant les exemples génériques d'al-Khwārizmī : $x^2 + 21 = 10x$ et $x^2 = 3x + 4$.

Ajoutons que tous les exemples proposés dans le *Liber restauracionis* sont ceux d'al-Khwārizmī à l'exception d'un seul. Pour le type 4, l'exemple de l'équation dans laquelle le coefficient du terme de degré 2 est fractionnaire, est $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 12$ alors qu'al-Khwārizmī, suivi par Gérard de Crémone et Robert de Chester, donne : $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$[37]. On pourrait aussi considérer un deuxième exemple ($5x^2 = 40$ pour le type 2) discordant pour la seule lecture de (V)[38]. En effet, sur ce point, (L) se distingue de (V) et est en accord avec le *Mukhtaṣar* et les deux autres versions arabo-latines ($5x^2 = 80$) [Kaunzner 1986, 52].

2.4. *Les règles générales*

L'auteur du *Liber restauracionis* présente explicitement des règles générales, au-delà des exemples numériques génériques classiques depuis al-Khwārizmī. Cela apparaît alors pour les copistes, dans les deux manuscrits (L) et (V), comme une formidable occasion pour exprimer leur propre conception éditoriale du texte. En effet, comme on le voit sur les figures 9 et 10, il semblerait que les copistes soient bien guidés par l'idée de mettre en relief les règles générales par rapport au reste du texte.

Au total, nous avons trois paragraphes de quatre phrases, correspondant aux trois algorithmes de résolution des équations de types composés. Chacun se distinguent parfaitement du reste du texte aussi bien dans (V) — Figure 9 — que dans (L) — Figure 10 — (ici, encadrés par nos soins).

En réalité, l'étude textuelle montre que ces paragraphes sont des strophes composés d'hexamètres dactyliques[39]. Nous montrons ci-dessous

---

37 [Rashed 2007, 102; Hughes 1986, 235; Hughes 1989, 33]. Dans la suite, lorsque nous proposons un élément de l'étude comparative entre le *Liber restauracionis*, le *Mukhtaṣar* et ses traductions arabo-latines, nous renverrons aux éditions de références en note de bas de page avec les pages précises des passages concernés, sans reprendre tous les citations *in extenso*.

38 (U) adopte la lecture de (V) [Franci 2003, 33].

39 Pour l'étude de ces strophes, nous nous sommes appuyés sur [Nougaret 1986] avec l'aide de collègues latinistes, Jean Boyé et Jean-Pierre Levet, que nous tenons à remercier.
L'hexamètre dactylique, métrique la plus fréquente de la poésie latine classique, est composé de six pieds dactyliques | – ∪ ∪ | où – schématise une position syllabique longue, et ∪ une brève. Le schéma canonique d'un hexamètre dactylique peut donc être écrit ainsi :

| – ∪ ∪ | – ∪ ∪ | – ∪ ∪ | – ∪ ∪ | – ∪ ∪ | – ∪ ∪ |

Cependant, les dactyles peuvent aussi être remplacés par des spondées | – – | en fonction de la longueur des syllabes. Les quatre premières mesures sont soit des spondées | – – |, soit des dactyles | – ∪ ∪ |, le cinquième est toujours un dactyle, et le dernier est soit un spondée, soit un trochée | – ∪ |.

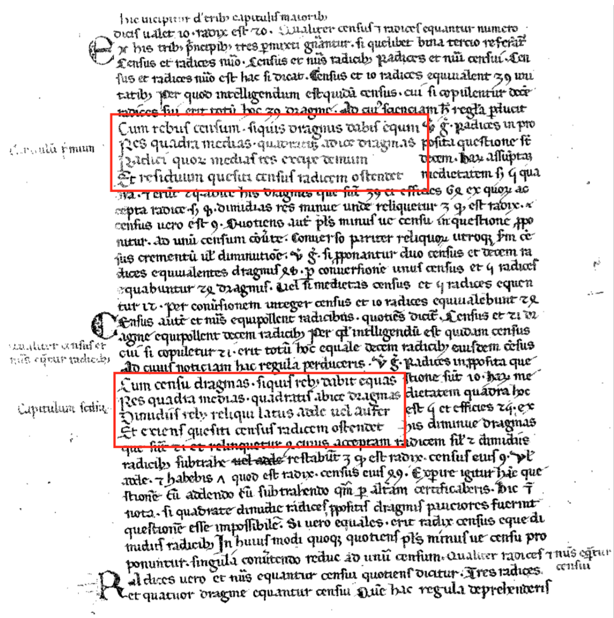


FIGURE 9. (V), fol. 72v

les découpages des vers. Dans le découpage du dernier vers de chaque strophe, il faut mentionner une synalèphe entre *radicem* et *ostendet* que nous symbolisons par la mise entre parenthèses : radic(em). Nous en signalons une autre, *collect(um)* entre *collectum* et *quesiti* pour le dernier vers de la dernière strophe.

Pour le premier algorithme :

cūm rē	būs cēn	sūm sī	quīs drāg	mīs dăbĭt	ēqŭm
rēs quā	drā mĕdĭ	ās quā	drātĭš	ādĭcĕ	drāgmās
rādī	cī quō	rūm mĕdĭ	ās rēs	ēxcĭpĕ	dēmūm
ēt rĕsĭ	duūm quĕsĭ	tī cēn	sūs rā	dīc(em) ōs	tēndĕt	.

Pour le second algorithme :

cūm cēn	sū drāg	mās sī	quīs rē	būs dăbĭt	ēquās
rēs quā	drā mĕdĭ	ās quā	drātīs	ābĭcĕ	drāgmās
dīmĭdĭ	īs rē	būs rĕlĭ	quī lătŭs	āddĕ vĕl	āufĕr
ēt ēx	īens quĕsĭ	tī cēn	sūs rā	dīc(em) ōs	tēndĕt	.

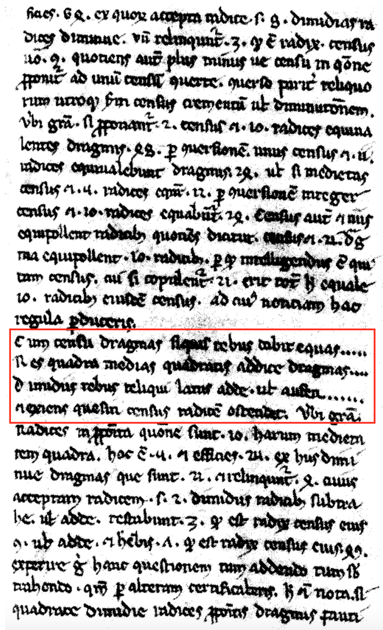


FIGURE 10. (L), fol. 43r

Pour le troisième et dernier algorithme :

sī cēn	sūs rē	būs drāg	mīsquĕ rĕ	quīrĭtŭr	ēqŭs
rēs quā	drā mĕdĭ	ās quā	drātīs	ādĭcĕ	drāgmās
quōrūm	rādī	cēm mĕdĭ	īs rā	dīcĭbŭs	āddĕ
ēt cōl	lēct(um) quĕsĭ	tī cēn	sūs rā	dīc(em) ōs	tēndĕt	.

La présence de ces vers est tout à fait originale dans ce type de texte par rapport à la tradition al-khwarizmienne. Il faut néanmoins noter que la forme versifiée pour apprendre une règle est classique dans la littérature mathématique du Moyen Âge que ce soit en arabe ou en latin. Citons quelques exemples parmi les principaux. En arabe, l'*Urjūza fī-l-jabr wa-l-muqābala* [Poème sur la restauration et la comparaison] d'Ibn al-Yāsamīn, déjà cité, concerne l'algèbre [Abdeljaouad 2005], l'*Urjūza fī-l-misāḥa* [Poème sur le mesurage] d'Ibn Luyūn al-Tujībī (m. 1349), quant à elle, concerne le corpus de géométrie pratique [Moyon 2016][40]. En latin, nous pouvons citer le fameux *Carmen de algorismo* d'Alexandre de Villedieu (m. *ca.* 1240) pour l'apprentissage de la numération décimale

40 Texte en cours d'édition et de traduction avec A. Djebbar.

positionnelle et l'épître en vers contenue dans le *Quadripartitum numerorum* de Jean de Murs (m. *ca.* 1351) contenant des éléments d'arithmétique spéculative et d'algèbre [L'Huillier 1990; Benedict 1914; Halliwell 1977, 73–83]. Les vers écrits par Alexandre de Villedieu et par Jean de Murs sont d'ailleurs eux-aussi des hexamètres dactyliques[41].

Quelles informations la présence de ces vers nous apporterait-elle ? En premier lieu, si l'on suit l'idée que la versification est effectivement utilisée dans un but didactique pour mémoriser des règles générales, cela nous permet d'avancer des hypothèses quant au lectorat et quant à l'utilisation effective du *Liber restauracionis.* En effet, ce pourrait être un texte utilisé dans un contexte d'enseignement des mathématiques où la connaissance est mise en vers pour être apprise. Sa traduction en italien et son utilisation dans le contexte des écoles d'abaque, attestées par la copie (U), renforce d'ailleurs cette hypothèse[42]. En second lieu, nous avançons l'idée que cette partie versifiée nous éloigne à nouveau de l'hypothèse de considérer le *Liber restauracionis* comme une éventuelle traduction de l'arabe au latin (au moins pour ces parties-là). En effet, le traducteur arabo-latin aurait dû respecter la mise en vers du texte arabe original, tout en respectant pleinement la métrique latine la plus classique. C'est une entreprise de traduction extrêmement délicate dont nous ne connaissons aucune manifestation pour les mathématiques. D'ailleurs, le traducteur en italien ne respectera pas, à son tour, la versification. Dans (U), ces règles sont rédigées en prose [Franci 2003, 34–35].

Les tableaux suivants (Tables 3, 4 et 5) reprennent chacun des vers pour décrire les étapes successives des algorithmes.

Pour le type 5, comme al-Khwārizmī [Rashed 2007, 106], l'auteur détaille deux autres cas possibles. Si le carré des racines est inférieur aux drachmes (c'est-à-dire $(\frac{p}{2})^2 < q$), la recherche est impossible. Si le carré est exactement égal à la moitié des racines, alors la racine du bien est égale à la moitié des racines (c'est-à-dire $x = \frac{p}{2}$). Ces deux cas sont détaillés en dehors de la strophe versifiée.

---

41 Nous pourrions encore citer comme exemples pour les XV^e^ et XVI^e^ siècles, les strophes versifiées (en latin) des marges de la *Summa* de Luca Pacioli qui, comme dans le *Liber restauracionis,* donne l'algorithme de résolution des équations de types composés [Pacioli 1494, fol. 145r]. Enfin, un dernier exemple pour la Renaissance cette fois-ci : c'est aussi sous forme de strophes versifiées que Niccolò Tartaglia énonce ses algorithmes de résolution de la cubique dans ses *Quesiti et inventioni diverse* [Recherches et inventions diverses]. Voir, par exemple, [Tartaglia 1546, 124r–124v].

42 Franci précise : « *La scrittura mercantesca e lo stile dell'esposizione collocano il suo autore nell'ambito della tradizione delle scuole dell'abaco* » [Franci 2003, 31].

Table 3. Algorithme de résolution du type 4 distinguant le caractère général de la règle et l'exemple numérique associé

Règle générale de type 4	$p, q \in \mathbb{Q}_+^*$	sur un exemple numérique
Si quelqu'un donne des drachmes égales au bien avec des choses	$x^2 + px = q$	$x^2 + 10x = 39$
Carre la moitié des choses	$\rightarrow (\frac{p}{2})^2$	$\rightarrow (\frac{10}{2})^2 = 25$
Ajoute le carré aux drachmes	$\rightarrow (\frac{p}{2})^2 + q$	$\rightarrow 25 + 39 = 64$
De la racine, soustrais alors la moitié des choses	$\rightarrow \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$	$\rightarrow \sqrt{64} - 5 = 3$
Et le reste montrera la racine du bien recherché	$x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$	$x = 3$

Table 4. Algorithme de résolution du type 5 distinguant le caractère général de la règle et l'exemple numérique associé

Règle générale de type 5	$p, q \in \mathbb{Q}_+^*$	sur un exemple numérique
Si quelqu'un donne des choses égales à des drachmes avec le bien	$x^2 + q = px$	$x^2 + 21 = 10x$
Carre la moitié des choses	$\rightarrow (\frac{p}{2})^2$	$\rightarrow (\frac{10}{2})^2 = 25$
Du carré abaisse les drachmes	$\rightarrow (\frac{p}{2})^2 - q$	$\rightarrow 25 - 21 = 4$
Ajoute ou enlève le côté du reste à la moitié des choses	$\rightarrow \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$	$\rightarrow \sqrt{4} = 2$
Et le sortant montrera la racine du bien recherché	$x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}$ ou $x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}$	$5 - 2 = 3$ ou $5 + 2 = 7$

Les règles sont donc d'abord exposées généralement pour ensuite être mises en œuvre sur les exemples numériques classiques, c'est-à-dire précisément ceux d'al-Khwārizmī : $x^2+10x = 39$, $x^2+21 = 10x$ et $x^2 = 3x+4$. Il ne nous semble pas utile d'insister ici sur l'importance de ces exemples génériques qui sont stables dans les algèbres arabe et latine. Ils se retrouvent en particulier dans le traité d'Abū Kāmil [Rashed 2012, 248, 258, 272] ainsi

TABLE 5. Algorithme de résolution du type 6 distinguant le caractère général de la règle et l'exemple numérique associé

Règle générale de type 6	$p, q \in \mathbb{Q}_+^*$	sur un exemple numérique
Si l'on cherche le bien égal à des choses et des drachmes	$x^2 = px + q$	$x^2 = 3x + 4$
Carre la moitié des choses	$\rightarrow (\frac{p}{2})^2$	$\rightarrow (\frac{3}{2})^2 = 2 + \frac{1}{4}$
Au carré ajoute les drachmes	$\rightarrow (\frac{p}{2})^2 + q$	$\rightarrow 2 + \frac{1}{4} + 4 = 6 + \frac{1}{4}$
Additionne la racine de ceci et la moitié des racines	$\rightarrow \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}$	$\rightarrow \frac{3}{2} + \sqrt{6 + \frac{1}{4}} = 4$
Et la somme montrera la racine du bien recherché	$x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}$	$x = 4$

que dans les deux traductions arabo-latines connues [Hughes 1986, 248, 258, 272 ; Hughes 1989, 32, 34, 35][43].

Ceci renforce encore plus l'originalité des énoncés généraux versifiés du *Liber Restauracionis* dans la tradition latine. Ils ne se retrouvent dans aucun texte de la tradition arabo-latine d'al-Khwārizmī ou d'Abū Kāmil. Reste maintenant à démontrer ces algorithmes.

2.5. *Les preuves*

Comme dans le *Mukhtaṣar*, seuls les types composés (à savoir les types 4, 5 et 6) sont démontrés. Malgré leur objectif semblable, les justifications de la nécessité d'apporter ou non une démonstration présentent de nettes différences dans les deux textes. Nous les avons mises en parallèle dans la table 6.

D'une part, al-Khwārizmī insiste sur la distinction fondamentale entre les types simples et composés, à savoir le partage ou non des racines en deux moitiés, qui implique la nécessité ou non d'une preuve. Alors

43 Ces exemples sont largement présents dans la littérature algébrique médiévale qu'elle soit en arabe, en latin ou en vernaculaire. En guise d'exemple, c'est notamment le cas, encore au XIVe siècle, avec le *De quadripartitum numerorum* de Jean de Murs [L'Huillier 1990, Chap. 26, 27 & 28]. Notons néanmoins l'exception notable de Fibonacci qui propose, dans son *Liber abaci* [Livre du calcul], dans cet ordre, les équations $x^2 + 10x = 39$, $x^2 = 10x + 39$ et $x^2 + 40 = 14x$ pour les équations de types 4, 6 et 5 respectivement [Fibonacci 1857, 408–409].

TABLE 6. Nécéssité des preuves des algorithmes de résolution des équations de type composé

Le *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī d'après [Rashed 2007, 106]	*Liber restauracionis* d'après [Kaunzner 1986, 50]
Ce sont les six modes que j'ai mentionnés dans l'introduction de mon livre que voici ; j'ai achevé leur explication, et j'ai affirmé que dans trois de ces modes on ne partage pas en deux moitiés le nombre des racines ; j'ai montré leur mode d'inférence et leur nécessité.	Des six types précédemment cités, les trois premiers sont jusqu'à présent évidents et ils ne nécessitent pas de preuves.
Quant aux trois sortes qui restent, dans lesquelles on a besoin de partager en deux moitiés le nombre des racines, je les ai décrites au moyen de procédés véritables, et j'ai façonné pour chacun des procédés une figure par laquelle on décèle la cause de cette partition en deux moitiés.	Quant aux suivants, ils puisent, du deuxième Livre des *Éléments* [d'Euclide], la force de leur nécessité[a].

[a] (L), fol. 43v; (V), fol. 73r : *Predictorum sex modorum, tres priores adeo evidentes sunt, quod probatione non indigent. Posteriores vero ex secundo elementorum sue necessitatis firmitatem trahunt.*

que cet argument est repris *in extenso* dans les deux traductions arabo-latines[44], l'auteur du *Liber restauracionis* passe sous silence cette distinction essentielle[45].

D'autre part, la référence explicite aux *Éléments* d'Euclide dans le *Liber restauracionis*, et même précisément au Livre II, n'est pas sans importance

44 Ici, les deux traductions diffèrent sur ce point. En effet, comme à son habitude, Gérard de Crémone est extrêmement fidèle à la version arabe [Hughes 1986, 234]. Robert de Chester, quant à lui, s'en détache légèrement en ajoutant, en plus des propos du *Mukhtaṣar* des prolégomènes mentionnant explicitement des preuves *géométriques* : « *Sex autem sunt modi de quibus, quantum ad numerum pertinet, sufficienter diximus. Nunc vero oportet ut quod numero proposuimus, geometrice idem verum esse probemus* » [Hughes 1989, 35].

45 Là, Abū Kāmil diffère d'al-Khwārizmī. En effet, d'abord, en démontrant l'algorithme de type 1, il ne se limite pas aux seuls types composés. Ensuite, il ne justifie pas la nécessité de la démonstration de ces derniers de quelque manière que ce soit. Il n'invoque pas, en particulier, le partage des racines en deux [Rashed 2012, 246, 254 et suivantes].

puisqu'al-Khwārizmī, s'il connaît au moins une version gréco-arabe des *Éléments*, ne cite pas ce monument de la géométrie spéculative grecque [Rashed 2007, 31–43]. Gérard de Crémone et Robert de Chester restent fidèles à l'algébriste bagdadī sur ce point, alors même qu'on leur attribue à l'un et à l'autre une traduction d'Euclide [Busard 1984; Busard & Folkerts 1992]. Or, l'auteur du *Liber restauracionis*, quant à lui, ne se limite pas à la seule référence au Livre II des *Éléments* dans ce paragraphe propédeutique aux démonstrations géométriques[46], il renouvelle l'opération à juste titre au moment même d'utiliser les propositions adéquates — 5 et 6 — du Livre II dans les démonstrations[47].

L'examen des trois démonstrations que nous détaillons en annexe montre que si elles sont dans l'esprit des démonstrations al-khwarizmiennes, notamment dans le type de raisonnement à l'œuvre, elles s'en détachent à plus d'un titre. Au-delà des références explicites à Euclide, l'auteur du *Liber restaurationis* modifie le raisonnement et les diagrammes sur lesquels son discours repose. Aucun des diagrammes proposés ne correspond au texte arabe, et par voie de conséquence à ceux des fidèles traductions de Gérard et de Robert. Nous pouvons même prétendre à une relative originalité de notre auteur puisque nous n'avons trouvé ni de semblables démonstrations, ni de semblables figures dans les algèbres connues[48].

3. OPÉRATIONS SUR LES OBJETS DE L'ALGÈBRE

Avant de résoudre divers problèmes par l'algèbre, l'auteur du *Liber restauracionis*, suivant en cela al-Khwārizmī, propose d'énumérer plusieurs règles de calculs (de multiplication notamment) faisant intervenir les objets de l'algèbre. Ces règles sont élémentaires au sens où elles sont préparatoires aux résolutions de problèmes :

---

46 Deux autres références générales aux *Éléments* d'Euclide, et précisément aux Livres II et X, sont citées en rapport avec le produit de deux binômes pour le Livre II et en rapport avec la question de l'irrationalité pour le Livre X (*cf.* infra).

47 À titre d'information, notons que, dans (V), une main postérieure à celle du copiste indique, en gloses marginales et interlinéaires, plusieurs références aux *Éléments* reprenant celles du copiste ou ajoutant de nouvelles lorsque le texte le nécessite. Voir, en particulier, les folios 73r et 73v.

48 Pour davantage de détails sur les éléments de comparaison, pour le seul type 4, avec al-Khwārizmī et Abū Kāmil, voir [Moyon 2007]. On peut aussi consulter avec profit l'étude [Djebbar 1981, 11–40] de Djebbar sur les démonstrations géométriques du type 5 chez al-Khwārizmī, Abū Kāmil, al-Karajī, al-Samawʾal et Ibn al-Bannā.

Tout cela étant pour ainsi dire établi, au moment de regarder avec soin la vertu de la restauration, que l'esprit du lecteur se dirige vers les problèmes[49].

3.1. *La multiplication*

Pour multiplier des sommes (et différences) de racines du bien et de drachmes entre elles (c'est-à-dire des expressions de la forme $(kx \pm a)$ et $(a \pm kx)$), l'auteur part d'une analogie avec les dizaines d (pour les racines) et les unités u (pour les nombres simples) qu'il adapte lorsque les racines sont retranchées $(a - kx)$:

> Dès lors, pour la multiplication des choses par lesquelles se trouve augmenté ou diminué un nombre, ou bien des choses qui sont augmentées ou diminuées d'un nombre, c'est exactement ce que nous observons pour la multiplication des unités et des dizaines, en admettant que la chose soit autant que la dizaine si elle est surabondante, ou bien autant que l'unité si elle est retranchée[50].

L'auteur énonce une règle générale rhétorique dont le point de départ est explicitement la propriété II.4 des *Éléments* d'Euclide[51]. Les différents développements sont organisés de façon à ce que le premier terme soit nécessairement « ajouté » :

$$
\begin{aligned}
(d_1 + u_1) \times (d_2 + u_2) &= u_1 \times u_2 + d_1 \times d_2 + u_1 \times d_2 + d_1 \times u_2\\
(d_1 + u_1) \times (d_2 - u_2) &= d_1 \times d_2 - u_1 \times u_2 + u_1 \times d_2 - d_1 \times u_2\\
(d_1 - u_1) \times (d_2 + u_2) &= d_1 \times d_2 - u_1 \times u_2 - u_1 \times d_2 + d_1 \times u_2\\
(d_1 - u_1) \times (d_2 - u_2) &= u_1 \times u_2 + d_1 \times d_2 - u_1 \times d_2 - d_1 \times u_2.
\end{aligned}
$$

Il formule aussi une « règle des signes » de la manière concise suivante[52] :

---

49 (L), fol. 47r; (V), fol. 75r : *Hiis tamquam prestructionibus totius restaurationis facultatis firmiter inspectis, lectoris animus ad questiones descendat.*

50 (L), fol. 45r; (V), fol. 73v : *Deinceps in multiplicatione rerum, quibus auctus vel diminutus proponitur numerus, aut que augentur vel diminuuntur a numero, id ipsum, quod in multiplicatione digitorum et articulorum observamus, ut res sit tamquam articulus, superhabundans vero vel diminutum tamquam digitus.*
Notons ici un élément terminologique intéressant puisque les termes latins utilisés sont *articulus* et *digitus*. Le terme *unitas* n'est pas utilisé ici alors qu'il l'est dans l'introduction arithmétique du texte. Gérard de Crémone use des termes *articulus* et *unitas* [Hughes 1986, 241] et Robert de Chester de *nodus* et *unitas* [Hughes 1989, 45].

51 « Si une ligne droite est coupée au hasard, le carré sur la droite entière est égal aux carrés sur les segments et deux fois le rectangle contenu par les segments » [Euclide 1990, 331].

52 (L), fol. 45r; (V), fol. 73v–74r : [...] *ut diminutus si diminutum multiplicet, vel superhabundans superhabundans.*

$$\begin{cases} \bullet \times (-\circ) = (-\star) \\ \bullet \times (+\circ) = (+\star). \end{cases}$$

Ensuite, deux exemples d'application suivent les règles générales :

$(10 + 2) \times (10 + 3)$
et $(10 - 2) \times (10 - 3)$.

Ainsi, le lecteur est prêt pour calculer les produits d'expression de types $(kx \pm a)$ et $(a \pm kx)$, et d'autres faisant intervenir des fractions. Seuls des exemples numériques sont alors proposés. Pour les expressions avec les racines, les mêmes coefficients que les précédents sont utilisés :

$(10 - 2x) \times (10 - 3x)$
et $(10 + 2x) \times (10 - 3x)$.

Avec les fractions, sont développés :

$(2 + \frac{1}{3}) \times (2 + \frac{1}{4})$
et $(2 - \frac{1}{3}) \times (2 - \frac{1}{4})$.

Là encore, l'auteur du *Liber restauracionis* présente quelques originalités par rapport à al-Khwārizmī et aux traductions arabo-latines de Robert et de Gérard. Énumérons-les brièvement :

(1) la présence de règles générales avec une référence explicite aux *Éléments* d'Euclide,
(2) l'énoncé de sa « règle des signes »[53],
(3) les valeurs numériques ne correspondent à aucune de celles du *Mukhtaṣar* [Rashed 2007, 122],
(4) l'absence du traitement du produit de binômes faisant intervenir des fractions de racine[54].

Tous ces éléments concourent à rendre cette partie, essentielle pour le calcul en algèbre, concise et limitée au strict nécessaire, partant à nouveau de la règle générale pour l'exemplifier avec des nombres.

53 Voici le paragraphe concerné dans le *Mukhtaṣar* : « *Si on a des dizaines auxquelles on a ajouté des unités, ou dont on a retranché des unités, il est nécessaire de les multiplier quatre fois : les dizaines par les dizaines, les dizaines par les unités, les unités par les dizaines, et les unités par les unités. Ainsi, si les unités qui sont avec les dizaines sont toutes ajoutées, la quatrième multiplication est additive ; et si elles sont toutes retranchées, la quatrième multiplication est aussi additive. Mais si les unes sont ajoutées, et les autres retranchées, la quatrième multiplication est soustractive.* » [Rashed 2007, 122].

54 En effet, al-Khwārizmī développe aussi l'exemple du produit $(10 + \frac{1}{2}x) \times (\frac{1}{2} - 5x)$ [Rashed 2007, 128] qui se retrouve dans les versions arabo-latines [Hughes 1986, 243 ; Hughes 1989, 48].

3.2. *La racine carrée*

La partie traitant de la racine carrée est relativement importante même si elle est, à nouveau, extrêmement réduite par rapport aux parties comparables dans le *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī [Rashed 2007, 130–143]. Elle est composée d'un premier paragraphe sur la justification des deux identités[55] :

$$(I_1) \quad (\sqrt{200} - 10) + (20 - \sqrt{200}) = 10$$
$$\text{et } (I_2) \quad (20 - \sqrt{200}) - (\sqrt{200} - 10) = 30 - 2\sqrt{200},$$

et de plusieurs autres paragraphes ayant pour objectif de dresser les règles de calcul sur les racines carrées : multiples, fractions, produit et quotient.

Là encore, l'auteur du *Liber restauracionis* montre quelques divergences avec le mathématicien bagdadī. D'abord, la logique de présentation : là où al-Khwārizmī généralise ses exemples numériques, notre auteur, ne dérogeant pas à son habitude, part systématiquement d'une règle générale pour ensuite l'illustrer sur des exemples numériques[56]. En outre, comme précédemment, les choix des exemples numériques (plus nombreux chez al-Khwārizmī) ne sont pas toujours identiques dans le choix des nombres.

Arrêtons-nous maintenant particulièrement sur la justification des deux identités (I_1) et (I_2). Les justifications sont basées sur un raisonnement géométrique accompagné d'un diagramme. Ces deux éléments — raisonnement et diagramme — sont totalement distincts de ceux d'al-Khwārizmī pour les deux identités [Rashed 2007, 136–140].

Suivons pas à pas la démonstration proposée[57] à partir de la figure 11 (à gauche)[58] :

---

55 Al-Khwārizmī propose en outre les identités $(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2)$ et $(100 + x^2 - 20x) - (50 + 10x - 2x^2)$ qui sont absentes du *Liber restauracionis*. Celles-ci n'admettent pas de justifications autre que « par l'expression » [Rashed 2007, 140]. Quant aux versions arabo-latines, il y a là une distinction importante : Gérard suit précisément al-Khwārizmī alors que Robert ne propose aucun de ces exemples.

56 Dans notre texte, seul le quotient de deux racines carrées n'est pas exemplifié.

57 (L), fol. 46r ; (V), fol. 74r–74v : *Radice ducentorum minus 10 applicata ad 20 minus radice ducentorum, id quod colligitur equivalet 10. Verbi gratia. Radix ducentorum minus 10 sit AB hec applicetur ad 20 minus radice ducentorum quod sit BC. Dico ergo quod tota AC equivalet 10 que sint BD per que restauretur radix 200, ergo AD est plena radix 200, de vero reliquum est 10 minus radice de 200, ergo tota AC est radix de 200, et insuper 10 minus eadem radice, quam diminuta loco eiusdem superhabundantis abicimus et relinquitur AC 10.*

58 Le diagramme marginal de (V) est presque totalement effacé. Dans (U, fol. 37v), ce diagramme est horizontal.

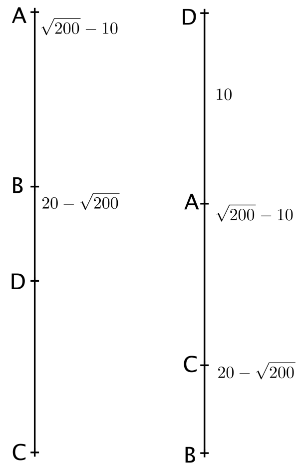


FIGURE 11. À gauche : diagramme illustrant (I_1), reconstruit à partir du diagramme marginal de (L, fol. 46r). À droite : Diagramme illustrant (I_2), reconstruit à partir des diagrammes marginaux de (L, fol. 46r) et (V, fol. 74v)

Soit $AB = \sqrt{200} - 10$ et $BC = 20 - \sqrt{200}$.
Montrer (I_1) revient alors à montrer que $AC = 10$.
Soit D de AB qui « restaure » $\sqrt{200}$, autrement dit $AD = \sqrt{200}$.
Comme $AB = \sqrt{200} - 10$, le point D est tel que $BD = 10$.
Le point D est construit entre les points B et C. Si l'on considère le « reste » DC, il s'agit de la différence entre BC et BD.
Comme $BC = 20 - \sqrt{200}$, $DC = 10 - \sqrt{200}$.
D'où, AC tout entier est $AD = \sqrt{200}$ joint à $DC = 10 - \sqrt{200}$.
AD ajoute ce qui est retranché dans DC, donc $AC = 10$.

Il s'agit en réalité d'un pur raisonnement algébrique où le diagramme ne semble être là que pour donner du sens aux opérations effectuées. Dans cette construction, le point D est mal placé car il devrait être au-delà de C dans le prolongement de AB puisque $BD = 10$ est trivialement supérieur à $BC = 10 - \sqrt{200}$. Donc, sauf si le copiste n'est pas resté fidèle à l'original, nous sommes amenés à considérer un segment représentant un longueur négative $DC = 10 - \sqrt{200}$. Nous ne croyons pas à un initiative fautive du copiste car l'auteur considère bien, dans le corps de son texte, cette longueur : « *en réalité, le reste est* $10 - \sqrt{200}$ ».

Pour (I_2), le raisonnement est plus clair et n'impose pas de commentaire supplémentaire[59]. Il est basé sur la figure 11 (à droite)[60] :

> Soit $AB = 20 - \sqrt{200}$ et $AC = \sqrt{200} - 10$.
> Montrer (I_2) revient alors à montrer que $CB = AB - AC = 30 - 2\sqrt{200}$.
> Soit D de AB tel que $AD = 10$ de sorte que $DC = \sqrt{200}$.
> D'où, $BD = AB + AD = 20 - \sqrt{200} + 10 = 30 - \sqrt{200}$.
> D'où, $BD - DC = 30 - \sqrt{200} - \sqrt{200} = 30 - 2\sqrt{200}$.
> Finalement, on obtient bien $CB = 30 - 2\sqrt{200}$.

Pour conclure ce paragraphe, précisons que la question de l'irrationalité est importante dans le *Liber restauracionis* et revêt un caractère original. En effet, de l'aveu même de son auteur qui n'est pas une reprise d'al-Khwārizmī[61], l'algèbre présente un intérêt par rapport aux *Éléments* d'Euclide pour déterminer les lignes irrationnelles :

> Il est évident que n'importe quel problème proposé selon la restauration peut se résoudre dans les types définis précédemment. L'intérêt de celle-ci est essentiel par rapport à l'enseignement du dixième livre des *Éléments*, et évidemment, pour trouver des lignes irrationnelles [*alogis*], c'est-à-dire sourdes ou bien irrationnelles, et des médiales, des binomiales et des restes ou bien des apotomés[62] qui ne peuvent être considérés comme des nombres[63].

Ce paragraphe sur la division euclidienne des lignes irrationnelles [Vitrac 2008], absent du *Mukhtaṣar* — répétons-le —, illustre parfaitement la

59 (L), fol. 46r, (V), fol. 74v : *Similiter radice 200 minus 10, sublata ex 20 minus radice 200, quod reliquum est equivalet 30 minus duabus radicibus 200. Verbi gratia. Sit AB 20 minus radice 200 cui subtrahatur AC, que sit radix 200 minus 10. Dico ergo quod reliquum CB est 30 minus 2 radicibus 200. Applicabimus igitur ad AB 10 que sint DA. Palam est ergo quod tota DB est 30 minus radice 200, ex qua sublata DC, hoc est plena radice de 200, relinquitur CB 30 minus duabus radicibus 200.*

60 Ce diagramme est lisible dans (L) et (V). Il est absent dans (U).

61 La considération explicitement exprimée par l'auteur du *Liber restaurationis* sur l'irrationalité est absente du *Mukhtaṣar* ainsi que de ses traductions [Rashed 2007, 43–48]. Précisons même ici « *la position d'al-Khwārizmī : à aucun moment celui-ci ne pose la question de l'existence des quantités irrationnelles, mais il s'en tient au seul point de vue du calcul algébrique* » [Rashed 2007, 48].

62 Nous n'avons trouvé le terme *reccisus* utilisé ici — dans le seul manuscrit (V) — dans aucune version latine des *Éléments* d'Euclide. Nous trouvons néanmoins *recisus* explicité par Fibonacci dans son *Liber Abaci* comme le synonyme d'*apothamus* [apotomé] [Fibonacci 1857, 358].

63 (L), fol. 48v, (V), fol. 76r : *Horum mutatione quaslibet questiones secundum restaurationem propositas in praedictos modos solubiles esse, palam est; cuius utilitas ad 10 librum elementorum praecipua est : in inveniendis scilicet lineis alogis, id est surdis sive irrationabilibus, et medialibus, binomiis et residuis sive reccisis, que per notum numerum assignari non possunt.*

manière avec laquelle elle est traitée au Moyen Âge dans la tradition euclidienne du Livre X [Euclide 1998, 36]. En effet, l'auteur et les deux copistes du *Liber restauracionis* démontrent ici une bonne connaissance de la littérature mathématique de leur époque. Au total, dans les deux copies (L) et (V), trois termes sont utilisés, pour les lignes irrationnelles, correspondant à la définition X.3 des *Éléments* : d'abord, dans (L) et (V), l'hellénisme *alogis* utilisé dans la version greco-latine [Busard 1987, 211] et, en glose interlinéaire dans le seul manuscrit (L), l'expression « sourd ou irrationnel » renvoyant aux versions arabo-latines diversement contaminées par les versions arabes divergentes sur ce point [Rommevaux et al. 2001, 259]. On peut enfin préciser que l'expression utilisée par notre auteur correspondrait à ce que l'on trouve dans plusieurs versions, à savoir « *irrationales sive surde* », comme chez Robert de Chester [Busard & Folkerts 1992, 233], chez Jean de Tinemue (Adélard III) [Busard 2005a, 237] ou encore chez Campanus [Busard 2005b, 306]. Gérard de Crémone, sur ce point, se démarque préférant un *et* en lieu et place du *sive* [Busard 1984, 233].

3.3. *Rapport de grandeurs et proportionnalité*

Le paragraphe explicitement intitulé « à propos de la proportion à quatre nombres » [*De proportione 4 numerorum*] dans le *Liber restauracionis* est absent en tant que tel du *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī. Le mathématicien persan n'expose qu'une partie de ces résultats au sein du chapitre des transactions commerciales[64] qui en fixe le principal domaine d'application :

> Sache que toutes les transactions entre les gens, de vente, d'achat, de change [de monnaie], de salaire, et toutes les autres, ont lieu selon deux modes, et d'après quatre nombres prononcés par le demandeur, qui sont : quantité d'évaluation, taux, prix, quantité évaluée[65] [Rashed 2007, 196].

Dans les versions arabo-latines, ce chapitre est repris chez Gérard sous le titre « chapitre sur les accords des marchands » [*Capitulum conventionum negociatorum*] [Hughes 1986, 255], et chez Robert sous le titre « règle de trois » [*Regula de tribus*] [Hughes 1989, 64] qui renvoie clairement à la recherche d'une quatrième proportionnelle. Chez ce dernier le contexte est encore celui des transactions commerciales avec la translitération latine

64 *Bāb al-muʿāmalāt* [Rashed 2007, 196].

65 La proportion en jeu s'exprime ainsi :
$$\frac{\text{quantité d'évaluation}}{\text{taux}} = \frac{\text{quantité évaluée}}{\text{prix}}.$$

des mots arabes correspondants aux quatre nombres d'al-Khwārizmī : *al-muzarar* pour la quantité d'évaluation [*al-musaʿar*], *alszarar* pour le taux [*al-saʿar*], *almuthemen* pour la quantité évaluée [*al-muthaman*] et *althemen* pour le prix [*al-thaman*]. Aucun de ces mots, ou des équivalents, ne sont utilisé pas l'auteur du *Liber restauracionis.* Seules des règles sur les proportions sont énoncées très succinctement avec aucun exemple, et donc aucune application ou contexte concret.

Il ne s'agit pas d'une présentation approfondie de ces règles qui pourraient être utilisées dans un contexte pratique. L'auteur offre ici au lecteur ayant quelques connaissances préalables comme, par exemple, la définition de quatre nombres en proportion, un *vademecum* de règles théoriques utiles pour la résolution de problèmes par l'algèbre et qu'il ne faut pas oublier.

Résumons ci-après les différents résultats de ce paragraphe :

– Si a, b, c et d sont quatre nombres en proportion (a est à b ce que c est à d), alors $a \times d = c \times b$[66].

– $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}$, ou bien pour reprendre le langage des proportions : a, b, $\sqrt{a^2}$ et $\sqrt{b^2}$ sont quatre nombres en proportion.

– $a + b = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b})$

– Restaurer une fraction $\frac{a}{b}$ donnée : $\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1$.

– Si $a \times b = c$, alors $a^2 \times b^2 = c^2$.

– Si $\frac{a}{b} = c$, alors $\frac{a^2}{b^2} = c^2$.

4. LES PROBLÈMES

Dans la suite du *Liber restauracionis* et jusqu'à la fin, l'auteur propose plusieurs séries de problèmes utiles à la compréhension des règles de l'algèbre ainsi qu'à l'entrainement. Le nombre de problèmes est beaucoup moins important que dans le *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī et que dans ses

66 Cette propriété est l'énoncé direct de la proposition VII.19 des *Éléments* : « *Si quatre nombres sont en proportion, le nombre produit à partir du premier et du quatrième sera égal au nombre produit à partir du deuxième et du troisième* [...] » [Euclide 1990, 323]. Ici, l'auteur n'y fait pas référence. Ajoutons que l'énoncé est beaucoup plus proche de celui de Robert de Chester et Campanus (dont la formulation est strictement identique à la proposition VII.20 [Busard 2005b, 246]) : « *Si fuerint quatuor numeri proporcionales, quod ex ductu primi in ultimum producetur equum erit ei quod ex ductu secundi in tercium* » [Busard & Folkerts 1992, 193], que de celui de Gérard de Crémone : « *Si fuerint quattuor numeri proportionales, numerus superficialis qui fit ex primo in quartum equalis erit numero superficiali qui fit ex secundo in tertium* » [Busard 1984, 176]. L'auteur ne mentionne pas l'énoncé réciproque.

traductions arabo-latines, elles-mêmes tronquées du chapitre sur le mesurage (*bāb al-misāḥa*) et de l'important livre des testaments (*kitāb al-waṣāyā*), propre à la tradition islamique.

Dans le cas présent, notre auteur s'est limité à un exposé exhaustif qui pourrait être qualifié de minimal. En effet, il présente d'abord, comme chez al-Khwārizmī, un problème par type d'équation. Les six problèmes de la première série sont présentés dans l'ordre d'exposition des types d'équation (de 1 à 6), de manière complète de leur énoncé jusqu'à leur résolution en suivant toutes les étapes de l'algorithme de résolution (à l'exception du type 6 où l'auteur s'arrête une fois qu'il a reconnu le type de référence). Le lecteur est ainsi armé pour résoudre tout problème se ramenant à l'un de ces six types. Cette première série de problèmes est extrêmement stable : ce sont exactement ceux d'al-Khwārizmī, ensuite traduits par Gérard et Robert à l'identique.

– Type 1 : Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $x^2 = 4x \times y$.
– Type 2 : Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $(2 + \frac{7}{9}) \times x^2 = 10^2$.
– Type 3 : Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $\frac{y}{x} = 4$.
– Type 4 : Recherche d'un nombre x tel que $(\frac{1}{3}x + 1)(\frac{1}{4}x + 1) = 20$.
– Type 5 : Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $x^2 + y^2 = 58$.
– Type 6 : Recherche d'un nombre x tel que $\frac{1}{3}x \times \frac{1}{4}x = 24 + x$.

Le *Liber restauracionis* s'achève enfin sur une seconde série de dix problèmes (numérotés de (1) à (10) dans la suite) là où al-Khwārizmī propose un chapitre entier « sur des problèmes divers » (*bāb al-masāʿil al-mukhtalifa*) dans lequel sont énoncés 34 problèmes (tous au moins accompagnés de leur solution)[67] dont une importante sélection sera choisie par les deux traducteurs arabo-latins Gérard et Robert[68].

---

67 Nous reprenons ici le compte de [Rashed 2007, 156–195].

68 Robert reprend une série de 16 problèmes et chez Gérard, on peut comptabiliser 33 problèmes en considérant à la fois le texte principal et son appendice. En effet, il faut noter que le traitement des « problèmes divers » est complexe dans les manuscrits de la version de Gérard par la distinction du texte principal avec un appendice introduit par : « *Le livre s'achève ici. Toutefois, j'ai trouvé, dans un autre livre, ces [problèmes]-là intercalés parmi ceux écrits plus haut* ». (*Liber hic finitur. In alio tamen libro repperi hec interposita suprascriptis*). Mais ce n'est pas directement notre objet ici. Voir [Hughes 1986, 257] et [Rashed 2007, 87–89].

Les six premiers problèmes de la seconde série sont complètement énoncés avec la donnée de la solution en suivant une présentation normalisée : énoncé, choix de l'inconnue, mise en équation, solution (sans la résolution précise de l'équation reprenant, comme pour les exemples de la première série de problèmes, les différentes étapes de l'algorithme).

(1) Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x+y = 10$ et $x \times y = 21$ (type 5).

(2) Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ $(x < y)$ et $y^2 - x^2 = 40$ (type 3).

(3) Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $(y - x) + (y^2 + x^2) = 54$ (type 5).

(4) Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x+y = 10$ et $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + \frac{1}{6}$ (type 5).

(5) Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $5x + \frac{1}{2}.\frac{5x}{y} = 50$ (type 5).

(6) Recherche de deux nombres x et y tels que $y - x = 2$ et $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ (type 3).

Pour les quatre derniers problèmes, seul l'énoncé est donné. La résolution semble avoir été laissée comme exercice aux lecteurs. Même si l'auteur ne décrit ni le choix de l'inconnue, ni la mise en équation, il n'est pas si difficile dans cette dernière série de problèmes de décrire les équations qu'on devrait obtenir. Le problème (7) interroge mais, partant du principe que l'inconnue est souvent (sinon exclusivement) la plus petite partie d'un partage de 10, nous obtenons l'analyse proposée ci-après. Pour (10), il y a ambiguïté en fonction du choix de l'inconnue.

(7) Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ $(x < y)$ et $\frac{x \times y}{y-x} = 5 + \frac{1}{4}$.

(8) Recherche d'un nombre x tel que $4x \times 5x = 2x^2 + 36$.

(9) Recherche d'un nombre x tel que $(x^2 - (\frac{1}{3}x^2 + 3))(x^2 - (\frac{1}{3}x^2 + 3)) = x^2$.

(10) Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $x^2 = 10y$[69].

Dans l'ensemble des problèmes proposés, nous retrouvons les deux types les plus classiques des algèbres des pays d'Islam. D'abord, ce sont les « partage de 10 » qui se révèlent majoritaires (11 problèmes sur 16)[70]. Ce sont ensuite des recherches du bien (ou de la racine du bien) étant

69 Pour ce problème, Gérard de Crémone met en équation de telle manière à résoudre l'équation $(10 - t)^2 = 10t$; [Hughes 1986, 257].

70 À propos de ce type de problèmes, voir [Oaks 2015, 8–9].

données certaines conditions. Une analyse comparative des problèmes avec le *Mukhtaṣar* et les deux versions arabo-latines (Table 7) montre que la série proposée par l'auteur du *Liber restauracionis* est très proche de celle de Gérard, dans son contenu et son organisation, sans toutefois être totalement identique (notamment à cause du problème (6)).

TABLE 7. Comparaison des problèmes du *Liber restauracionis* avec le *Mukhtaṣar* et les deux traductions arabo-latines connues

Liber restauracionis	Le *Mukhtaṣar* d'après [Rashed 2007]	Robert de Chester d'après [Hughes 1989]	Gérard de Crémone d'après [Hughes 1986]
(1)	1	1	1
(2)	2	2	2
(3)	3	3	3
(4)	4	n'y figure pas	4
(5)	5	n'y figure pas	5
(6)	8	5	7
(7)	10	n'y figure pas	8
(8)	18	8	9
(9)	21	10	10
(10)	n'y figure pas	n'y figure pas	App.2

5. CONCLUSION

Nous avons posé plusieurs questions au sujet du *Liber restauracionis*, texte central de la présente étude, quant à son auteur, son contexte d'écriture ou encore sa forme éditoriale. Si nous n'avons pas encore suffisamment d'éléments pour répondre à certaines d'entre elles, nous pensons néanmoins pouvoir avancer quelques hypothèses pour reconsidérer ce texte en remettant en cause l'historiographie classique. Comme nous l'avons précisé, ce texte est aujourd'hui présenté, de manière consensuelle, comme la troisième traduction arabo-latine médiévale du *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī. Notre thèse est tout autre.

L'étude que nous venons de mener du *Liber restauracionis* montre bien ses filiations avec l'algèbre d'al-Khwārizmī. Mais, s'agit-il pour autant d'une traduction arabo-latine du *Mukhtaṣar* ? Nous ne le croyons pas à cause des nombreuses divergences entre les deux textes : l'ordre d'exposition des paragraphes, les fortes différences dans l'établissement des preuves des algorithmes (accentuées par le recours explicite à Euclide dans le *Liber restauracionis*) et des identités intégrant des racines carrées, le choix d'une présentation qui va de la règle générale aux exemples numériques (lorsqu'ils sont donnés), des paragraphes nouveaux (comme celui en relation avec le symbolisme) ou structurés autrement (comme pour la proportion), ou encore les choix numériques qui ne sont pas nécessairement ceux de l'algébriste bagdadī, etc. Pour nous, il s'agirait donc plutôt d'une réécriture, relativement plus didactique que le *Mukhtaṣar*, qui pourrait être utilisée pour enseigner l'algèbre. Maintenant, cette réécriture peut très bien avoir été réalisée en langue arabe par un mathématicien de l'occident musulman de la fin du XII^e^ siècle ou postérieur (de par la présence du symbolisme et de la barre de fraction), et dans ce cas-là, notre texte est bien une traduction arabo-latine d'un texte arabe (mais pas directement de l'algèbre d'al-Khwārizmī) encore inconnu, et Guillaume de Lunis pourrait alors en être l'auteur.

Cependant, l'utilisation de la versification pour énoncer les algorithmes de résolution des trois types composés est, pour nous, un argument fort pour avancer l'hypothèse, à l'instar du *Liber Mahameleth*[71], qu'il n'existerait pas d'original arabe mais qu'il s'agirait plutôt d'une rédaction originale en latin développée dans le contexte de l'algèbre arabe avec les apports spécifiques de l'occident musulman. En effet, outre l'absence complet d'arabismes dans le *Liber restauracionis*, nous pensons qu'il est philologiquement bien hasardeux de prétendre que les strophes versifiées soient, au moins elles, issues d'une traduction arabo-latine. L'auteur pourrait alors être un mathématicien d'*Andalus* ou de la péninsule ibérique plus largement. Qu'il soit ou non arabisant, il rédigerait son texte directement en latin en connaissant ou en consultant directement des textes arabes produits dans l'occident musulman et sans doute aussi les traductions arabo-latines alors disponibles (au moins celle de Gérard de Crémone). Quoiqu'il en soit, cet auteur est mathématiquement instruit et particulièrement bien renseigné de la littérature contemporaine, notamment vis-à-vis des *Éléments* d'Euclide (Livres II, VII et X en particulier).

---

71 « *The* Liber mahameleth *thus clearly relies on Arabic sources, and this is hardly surprising for the time and place of its writing. But we may even affirm that the* Liber mahameleth *was (initially)* written in an Arabic environment. *Indeed, its reader was supposed to have, or to be able to have, access to some Arabic treatises and read them in the original.* » [Sesiano 2014, xviii].

Enfin, considérant les caractéristiques didactiques du *Liber restauracionis* que nous avons mises en évidence (particulièrement la versification, la concision, une présentation systématiquement analytique — de la règle générale à l'exemple numérique), nous avançons aussi l'hypothèse qu'il aurait été rédigé pour être enseigné au sein d'un cercle de latinisants de l'Europe médiévale découvrant les sciences des pays d'Islam. Le cas échéant, si nous devions encore désigner un rôle éventuel pour Guillaume de Lunis, alors nous ne pourrions l'envisager que comme le traducteur de la version latino-italienne dont (U) est un témoin.

Note

Au moment d'envoyer l'article définitivement corrigé, nous avons découvert et pris connaissance d'une troisième copie du texte, encore inédite. Sa lecture montre que le texte est proche des deux copies (L) et (V) déjà connues. Cela ne remet donc en cause ni la thèse présentée ici, ni la traduction française qui suit. Nous préparons une édition critique prenant en compte les trois manuscrits maintenant connus.

6. TRADUCTION FRANÇAISE

Nous livrons ici pour la première fois une traduction moderne (en français) du *Liber restaurationis*. Nous nous sommes basés sur l'édition critique de référence[72] [Kaunzner 1986]. Nous avons aussi largement consulté les deux manuscrits connus de la version latine : le ms. Vat. Lat. 4606 de la Biblioteca Apostolica Vaticana (fol. 72r–77r) et le ms. Lyell 52 de la Bodleian Library d'Oxford (fol. 42r–49v)[73]. Pour assurer notre lecture des deux manuscrits latins précédents, nous avons aussi eu recours, dans sa forme manuscrite — ms. Urb. Lat. 291 de la Biblioteca Apostolica Vaticana (fol. 34r–41v) —, à la version italienne éditée dans [Franci 2003], notamment pour certaines figures géométriques, difficilement lisibles dans les versions latines. Comme dans notre analyse, (V) et (L) renvoient respectivement au manuscrit de la Vaticane et à celui d'Oxford.

---

72 Nous signalons ici une erreur factuelle dans l'édition. Il faut lire « *Si enim proponantur* [V1 : *proponatur*] *digitus et articulus in digitum et articulum multiplicandi, quadripartimur totam multiplicationem per 4 secundi* [V1 : *secundum*] *elementorum , scilicet ut digitus in digitum, articulus in articulum subalterne, digitus in articulum, articulus in digitum, contraditorie multiplicetur, ut diminutus, si diminutum* [V, fol. 74r] *multiplicet, vel superhabundans superhabundans* » de la troisième à la neuvième ligne de [Kaunzner 1986, 66].

73 Dans [Kaunzner 1986], l'auteur publie un *fac-simile* de ce manuscrit.

Nous avons traduit au plus près du texte latin sans néanmoins accrocher la langue française et en intégrant une ponctuation qui permet de structurer le texte. C'est aussi dans ce but que nous avons mis en forme des paragraphes qui ne reflètent pas la mise en page des manuscrits. En outre, lorsque nous avons choisi d'introduire des mots pour permettre une meilleure compréhension du texte, ou rendre la lecture plus aisée, nous les avons introduits entre crochets droits [...]. Nous avons aussi rédigé notre texte avec la numération indo-arabe dès que les copistes l'utilisaient[74], notamment celui de (V). Nous avons conservé la forme littérale sinon. Les diagrammes géométriques que nous avons réalisés sont fidèles à l'une ou l'autre des copies (L) et (V) ; nous avons systématiquement choisi les plus complets. Enfin, dans un souci de fluidité de lecture, nous avons voulu limiter au maximum les appels de notes de bas de page. Ainsi, nous avons délibérément omis tout apparat critique ou référence au texte latin sauf pour quelques éléments terminologiques qui nous ont paru utiles, accompagnés pour certains de quelques commentaires[75]. Nous avons aussi utilisé les notes pour les transcriptions mathématiques modernes (réservées aux seuls énoncés). Au fil du texte, nous précisons en outre les folios des deux manuscrits aussi bien que possible (les structures grammaticales des phrases latines et françaises étant distinctes) pour les lecteurs qui voudraient éventuellement les consulter.

* * *

/(V) 72r/ Commence ici le livre qui, selon les Arabes, est appelé « *algebra* et *almucabala* », et qui, chez nous, est nommé le livre de la restauration[76]. Il a été traduit de l'arabe au latin, à Tolède, par le maître Gérard de Crémone.

/(L) 42r/ L'unité est le principe du nombre et n'est pas un nombre. Le nombre est en effet une collection d'unités. De même que tout nombre est multiple de l'unité, ainsi ce même multiple est ce par quoi on dénomme ses parties. Par exemple, comme trois est le triple de l'unité, ainsi l'unité est le triple de sa troisième partie dénommée « un tiers ». D'où, il est nécessaire que, de quelque manière que ce soit, l'unité admette des multiplications infinies et qu'elle admette aussi des divisions infinies dans

---

74 Pour les fractions, nous avons opté, par commodité, pour l'écriture moderne avec la barre horizontale.

75 Pour l'ensemble du texte latin, nous renvoyons notre lecteur à [Kaunzner 1986].

76 Le terme *restauratio* est utilisé pour traduire le terme arabe *al-jabr*, seul à être conservé ici. Dans la suite du texte, *al-muqābala*, qui est abandonné dans la dénomination principale du livre, est principalement traduit par *ejectio*.

le même intellect et la même raison. Mais tout nombre s'exprime, de manière tout à fait convenable, à l'aide de seulement neuf chiffres puisqu'une multitude innombrable découle de la répétition de leurs multiplications par dix, c'est-à-dire qu'étant donné la disposition naturelle des nombres, la progression se fait de l'unité première jusqu'aux neuf chiffres. Et là, on leur attribue le premier ordre. Ensuite, à n'importe quel multiple de dix des chiffres, on en produit neuf autres, à savoir 10, 20, 30 et ainsi de suite jusque 90, qui sont tous dans le second ordre. Ceux-ci, étant multiplié par dix par le même procédé, sont placés dans le troisième ordre, comme 100, 200, 300 et ainsi de suite jusque 900. De la même manière, on obtient la règle pour engendrer les ordres infinis, bien arrangés à partir des neuf chiffres. Pour tout calcul, rien n'est en effet plus utile que de se soumettre au travail sur le nombre.

Commencent ici les chapitres d'*al-jabr* avec d'abord les trois moins importants.

Premier des chapitres les moins importants. De la manière avec laquelle on égale le bien aux racines.

Quant au nombre qui est nécessaire pour notre calcul, il est divisé en trois [modes] : la racine du nombre, le carré ou le bien de la racine et le nombre simple associé ni avec le carré ni avec la racine. Quant à la racine, c'est le nombre qui, multiplié par lui-même, produit l'autre. Quant au bien ou le carré de la racine, c'est le nombre qui est produit à partir de la dite racine multipliée par elle-même. Le nombre simple est ce qui n'est produit par le moyen d'aucun bien ou d'aucune racine.

Ces trois [modes] rapprochés chacun à chacun définissent trois types, à savoir le bien égale tantôt les racines, tantôt le nombre ou encore les racines [égale] le nombre.

Par exemple, un bien [égale] des racines lorsqu'on dit : on égale un bien à 5 racines[77]. C'est un fait établi que /**(L) 42v**/ la racine du bien est 5 et celui-ci est 25. Et bien sûr, il est égal à 5 de ses racines. Ou encore, lorsqu'on dit : le tiers du bien est égal à quatre racines[78], dans ces circonstances, le bien atteint 12 racines, et celui-ci est 144. Ou encore, lorsque cinq biens sont égaux à 10 racines[79], un unique bien égale 2 racines. Donc, manifestement, puisque la racine est deux, son bien est 4. Dans de tels cas, voilà ce sur quoi il conviendra de porter son attention : que toutes les fois où l'on compare

77 $x^2 = 5x$.

78 $\frac{1}{3}x^2 = 4x$.

79 $5x^2 = 10x$.

les racines ou le nombre[80] avec le bien, qu'il soit plus ou moins [qu'un bien], on ramène[81] le bien à l'unité [et] je ramène[82] de la même manière les racines ou le nombre par semblable accroissement ou diminution.

Second des chapitres les moins importants. De la manière avec laquelle on égale le bien à un nombre.

Ce type est celui où le bien est rapporté au nombre. Un bien est égal à 9[83], et c'est 9. Ou encore, [si] 5 biens valent 40[84], alors un bien vaut la cinquième partie de 40, à savoir 8[85]. Ou encore, [si] la moitié d'un bien vaut 18[86], alors celui-ci est 36.

Troisième des chapitres les moins importants. De la manière avec laquelle on égale les racines à un nombre.

Ce type est celui où les racines égalent un nombre. La racine vaut 3[87], alors elle est 3. Ou encore, [si] 4 racines égalent 20[88], alors une racine est 5. Ou encore, si la moitié d'une racine /**(V) 72v**/ vaut 10[89], la racine est 20.

On commence ici les trois chapitres les plus importants.

En dehors de ces trois [types] simples, trois [types] composés sont engendrés. Que deux [des trois modes du nombre] soient rapportés au troisième : le bien et les racines au nombre, le bien et le nombre aux racines, les racines et le nombre au bien.

De la manière avec laquelle on égale un bien et des racines à un nombre.

Un bien et des racines [rapportés] au nombre est comme si on dit : un bien et 10 racines égalent 39 unités[90]. Afin de rendre [ceci] compréhensible, c'est comme si un certain bien lié à 10 de ses racines était autant que 39 drachmes. La règle suivante conduit à sa connaissance.

Premier chapitre.

Si quelqu'un donne des drachmes égales au bien avec des choses,

---

80 Littéralement, « [...] où l'on compare l'un ou l'autre des restes avec le bien ».

81 *Converto.*

82 *Converso.*

83 $x^2 = 9$.

84 $5x^2 = 40$.

85 (L) a une autre lecture $5x^2 = 80$: « Ou encore, [si] 5 biens valent 80, alors un bien vaut la cinquième partie de 80, à savoir 16 ». C'est l'unique divergence numérique entre (V) et (L).

86 $\frac{1}{2}x^2 = 18$.

87 $x = 3$.

88 $4x = 20$.

89 $\frac{1}{2}x = 10$.

90 $x^2 + 10x = 39$.

Carre la moitié des choses. Ajoute le carré aux drachmes.
De la racine, soustrais alors la moitié des choses.
Et le reste montrera la racine du bien cherché.

Par exemple, dans le problème proposé, il y a dix racines. Carre la moitié de celles-ci, à savoir 5, c'est-à-dire multiplie-les par elles-même, et ce sera 25. Ajoute-leur les drachmes, qui sont 39, et tu **/(L) 43r/** auras 64 desquels la racine [carrée] est prise, à savoir 8. Soustrais les choses partagées en deux. Il reste 3, ce qui est la racine. Quant au bien, c'est 9.

Toutes les fois où il est proposé, dans la question, plus qu'un bien ou moins, ramène-le à un unique bien. Je convertis les restes — les racines et le nombres — de la même manière selon l'accroissement du bien ou sa diminution. Par exemple, si sont proposés deux biens et dix racines égalant 48 drachmes[91]. Par conversion, un bien et 5 racines seront égaux à 24 drachmes. Ou encore, si la moitié d'un bien et 5 racines égalent 12[92], alors, par conversion, un bien entier et 10 racines seront égales à 24.

De la manière avec laquelle on égale un bien et un nombre à des racines.

Cette fois, on dit : un bien et un nombre égalent des racines. Un bien et 21 drachmes égalent 10 racines[93]. Pour rendre compréhensible [ceci], c'est comme si on ajoute 21 à un bien, et le tout sera égal à dix de ses racines. La règle suivante conduit à sa connaissance.

Deuxième chapitre.

Si quelqu'un donne des choses égales à des drachmes avec le bien,
Carre la moitié des choses. Du carré abaisse les drachmes.
Ajoute ou enlève le côté du reste à la moitié des choses.
Et le sortant montrera la racine du bien recherché.

Par exemple, dans le problème proposé, il y a 10 racines. Carre la moitié de celles-ci, qui est 5, et tu réaliseras 25. De cela, enlève les drachmes, qui sont 21. Il reste 4 dont la racine [carrée] est prise. En même temps, soustrais-la à la moitié des racines, il restera 3, qui est la racine dont le bien est 9, ou bien additionne-la, et tu auras 7, qui est la racine dont le bien est 49. Expérimente donc ce problème tantôt en ajoutant, tantôt en soustrayant, puisque tu trouveras avec certitude par l'un ou par l'autre.

Remarque encore ici que, si le carré de la moitié des racines est plus petit que les drachmes présentées **/(L) 43v/**, le problème est impossible. Si, par contre, il est égal, alors la racine du bien sera égale à la moitié des racines.

91 $2x^2 + 10x = 48$.

92 $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 12$.

93 $x^2 + 21 = 10x$.

Dans ce type aussi, toutes les fois où il est proposé plus ou moins qu'un bien, ramène tout séparément, par conversion, à un unique bien.

De la manière avec laquelle on égale des racines et un nombre à un bien.

Cette fois, on dit : des racines et un nombre égalent un bien. Trois racines et quatre drachmes égalent un bien[94]. Que cette règle soit saisie.

/(V) 73r/ Troisième chapitre.

Si l'on cherche le bien égal à des choses et des drachmes,
Carre la moitié des choses. Au carré ajoute les drachmes.
Additionne la racine de ceci et la moitié des racines.
Et la somme montrera la racine du bien recherché.

Par exemple, dans le problème proposé, il y a trois racines. Carre la moitié prise de celles-ci, tu auras deux et un quart. Ajoute-leur les drachmes, à savoir 4 et tu réaliseras 6 et un quart. Ajoute la racine [carrée] de ceci, à savoir deux et un demi, à la moitié des racines. De cela, seront recueillis 4, ce qui est la racine. Quant au bien, c'est 16.

[À propos des preuves]

Des six types précédemment cités, les trois premiers sont jusqu'à présent évidents et ils ne nécessitent pas de preuves. Quant aux suivants, ils puisent, du deuxième Livre des *Éléments* [d'Euclide], la force de leur nécessité.

[Preuve de la manière d'égaler le bien et les racines avec le nombre.]

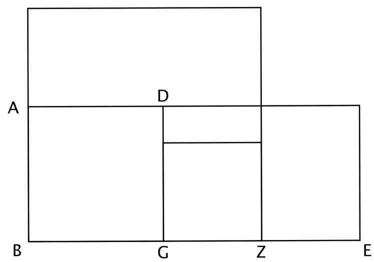
Le premier d'entre-eux est lorsqu'un bien et 10 racines égalent 39 drachmes, l'argumentation[95] est celle-ci. Je pose le carré *ABGD* comme le bien. Sa racine *DG* est multipliée par 10 drachmes, qui sont la ligne *GE* continuant directement la ligne *BG*. Il [en] résulte donc la surface *DE*. Comme on égale le bien avec 10 de ses racines à 39 drachmes, il est nécessaire que la surface *AE* réalise 39 drachmes. Ainsi, divise par moitié la ligne *GE* au point *Z* qui est dans la continuité directe de la ligne *BG*. Par la sixième [proposition] du second *Élément*, la surface obtenue à partir de *EB* par *GB*, c'est-à-dire la surface *AE* qui égale 39, et du carré *GZ*, égale le carré *BZ* **/(L) 44r/**. Donc, je multiplie les racines partagées en deux, qui sont 5, par elles-mêmes. Il en vient le carré *GZ*, auquel j'ajoute la multiplication *EB* par *GB* qui est 39 drachmes. Et on recueille 64, desquels

---

94 $3x + 4 = x^2$.

95 Le terme ici utilisé est *ratio*, là où Gérard de Crémone utilise *causa* pour traduire très fidèlement le terme arabe *ʿilla* [cause] d'al-Khwārizmī. Robert de Chester n'utilise que le terme général *probatio*.

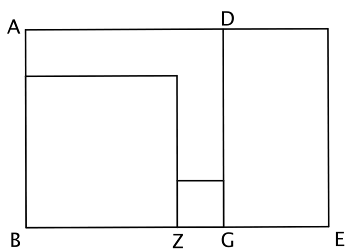
on prend la racine, qui est *BZ*, dont je retranche les racines partagées en deux, c'est-à-dire *GZ*. Et le reste est *BG*, à savoir la racine du bien énoncé.



Preuve de la manière d'égaler le bien et le nombre avec les racines.

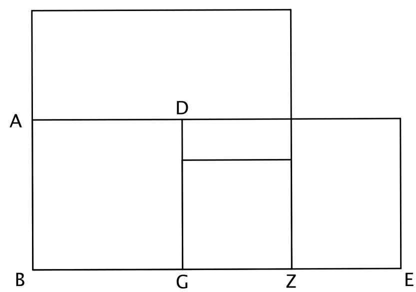
Quand à l'argumentation du second [type] qui est un bien et 21 drachmes qu'on égale à 10 racines, elle est semblable. Je pose le carré *ABGD* comme le bien dont la racine *AB* est multipliée par 10 drachmes, qui sont le côté *BE*. Il en résulte la surface *AE*. Donc, à partir de cela, on rend égales 10 racines au bien avec 21 drachmes. Mais, du bien qui est le carré *AG*, il reste la surface *DE* correspondant à 21 drachmes. Ainsi, on divise par moitié la ligne *BE* au point *Z*. Celui-ci peut être situé soit entre les points *G* et *E*, soit entre les points *B* et *G*.

Qu'il soit alors d'abord entre les points *B* et *G*.



Donc par la cinquième [proposition] du second *Élément*, le carré *BZ* est égal au produit de *BG* par *GE* ajouté au carré *ZG*. Donc, je multiplie les racines partagées en deux, qui sont *BZ*, par elles-mêmes. Et il [en] vient le carré 25, dont j'enlève le résultat de *BG* par *GE*, qui est 21. Je prends alors la racine du carré restant, à savoir 4, ou si l'on veut la ligne *GZ*. Et la racine *BG* du bien recherché est réalisée en ajoutant les racines partagées en deux, c'est-à-dire *BZ*.

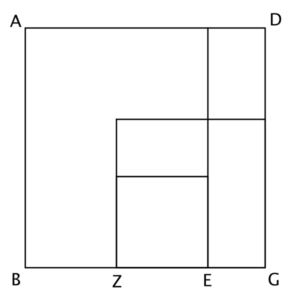
Mais si le point *Z* est situé entre les points *G* et *E*, il est nécessaire que la ligne [*GZ*] qui, ajoutée aux racines partagées en deux, réalise la racine du bien. Découvre [aussi] la racine du bien dans le reste des racines partagées en deux dont a été enlevée cette même ligne, et ceci est prouvé.



[Preuve de la manière d'égaler les racines et le nombre avec le bien.]

/**(V) 73v**/On prouve ici comment on égale les racines et le nombre avec le bien.

Quant au troisième type qui est 3 racines et 4 drachmes égalant le bien, l'argumentation est celle-ci. Je pose le carré *ABGD* comme le bien, dont je multiplie la racine *AB* par trois drachmes qui seraient le côté *BE*. Il en résulte la surface /**(L) 44v**/ *AE* qui égale 3 racines. Ce qui est effectivement de reste du carré, à savoir la surface *ED*, est égal à 4 drachmes. Divise ensuite la ligne *BE* par moitié au point *Z* qui est dans la continuité directe de *EG* de sorte que ce qui résulte de *BG* par *GE* avec le carré *ZE* égale le carré *ZG* [par la sixième proposition du second *Élément* d'Euclide]. Je multiplie donc *ZE*, qui est la racine partagée en deux, par elle-même. Et il [en] vient deux et un quart que j'ajoute au produit de *BG* par *GE*, c'est-à-dire la surface *ED* qui est 4. Et je recueille six et un quart, dont je prend la racine [carrée], à savoir *ZG*, qui est deux et demi. Les racines partagées en deux, c'est-à-dire *BZ*, lui sont ajoutées. J'obtiens complètement la racine *BG* du bien proposé dont la représentation est celle-ci.



De la manière de représenter le bien, les racines et les drachmes.

Dans la suite, chaque calcul qu'on pratique dans la restauration de ce qui est retranché ou dans la réduction du surabondant[96], est susceptible de changement pour [se ramener à] l'un des six chapitres. Afin que cela devienne plus facile à apprendre, nous donnons quelques règles pour écrire et pour multiplier, lesquelles concernent tour à tour la multiplication de la chose entière, et aussi des choses dont on diminue un nombre ou on l'ajoute, ou bien encore des choses qui diminuent un nombre ou qui s'y ajoutent, en sachant que de la multiplication de la chose par la chose résulte autant qu'un bien[97] et que de la multiplication de la chose par un nombre ne résulte qu'un nombre de choses[98].

Que l'on se souvienne en effet de cette règle d'écriture : en-dessous du nombre de biens, plaçons la lettre *c*, en-dessous du nombre de racines, plaçons la lettre *r*, avec une petite ligne encore plus bas. Mais les drachmes ont une petite ligne sans lettre toutes les fois où elles sont proposées sans diminution. Par exemple, deux biens, trois racines et 4 drachmes sont représentés ainsi :

2	3	4
$\underline{c}$	$\underline{r}$	$\underline{d}$

Deux tiers du bien, trois quarts de la racine [et] quatre cinquièmes d'une drachme sont représentés suivant cette règle :

2	3	4
3	4	5
$\underline{c}$	$\underline{r}$	$\underline{d}$

Mais, à chaque fois qu'on considère quelque [mode du nombre] diminué d'un autre, on écrit celui-ci en bas de l'autre avec un point à la place de la petite ligne indiquant ainsi la diminution. **/(L) 45r/** Par exemple, deux biens moins trois racines, deux biens moins 4 drachmes, 5 racines moins 2 biens [et] 5 racines moins 4 drachmes sont notés ainsi[99] :

---

96 La lecture des deux manuscrits diverge ici : *projectione superhabundantis* pour (L) et *particione superhabundantis* pour (V). Nous pensons que ces expressions désignent ici simplement l'opération d'*al-muqābala* [comparaison/réduction] (voir note 2). Ainsi, le couple classique *al-jabr/al-muqābala* se trouve à nouveau réuni ici.

97 $x \times x = x^2$.

98 $n \times x = nx$, avec $n \in \mathbb{Q}_+^*$.

99 Pour les tableaux de symboles, nous avons conservé ici les meilleures lectures des deux manuscrits (voir, à ce sujet, le paragraphe « Les objets de l'algèbre et leur représentation »).

2	2	5	5
c̲	c̲	r̲	r̲
3	4	2	4
ṛ	ḍ	c̣	ḍ

[À propos de la multiplication]

Dès lors, pour la multiplication des choses par lesquelles se trouve augmenté ou diminué un nombre[100] ou bien des choses qui sont augmentées ou diminuées d'un nombre[101], c'est exactement ce que nous observons pour la multiplication des unités et des dizaines[102], en admettant que la chose soit autant que la dizaine si elle est surabondante et autant que l'unité si elle est retranchée. En effet, si l'on propose de multiplier une unité et une dizaine par une unité et une dizaine, nous partageons en quatre toute la multiplication d'après la quatrième [proposition] du second *Élément*, c'est-à-dire en l'unité par l'unité, la dizaine par la dizaine et subalternement, on multiplie l'unité par la dizaine et *a contrario*, la dizaine par l'unité, de sorte que ce soit retranché si on multiplie par un retranché **/(V) 74r/** ou surabondant si on multiplie par un surabondant. D'où le résultat des restes accumulés montre le résultat de toute la multiplication proposée.

Par exemple, on propose 10 et 2 multiplié par 10 et 3[103]. Nous multiplions 2 par 3, et c'est 6. De même, 10 par 10 deviendront 100, 2 par 10 deviendront 20, et 10 par 3 deviendront 30. Leur somme est 156.

On propose aussi de multiplier 10 moins 2 par 10 moins 3[104]. Nous multiplions 2 retranchés par 3 retranchés, et ils deviendront 6 ajoutés, 10 par 10 et ils deviendront 100, 2 retranchés par 10 et ils deviendront 20 en moins, 10 par 3 retranchés et ils deviendront 30 en moins. Donc, il résulte 56 de la multiplication, comme somme des restes.

De la manière avec laquelle on multiplie les racines du bien et les drachmes entre elles.

De cette manière, nous multiplions les choses desquelles soit on retranche le nombre soit on l'ajoute, ou bien les choses qui sont soit retranchées du nombre, soit ajoutées. Par exemple, on pose 10 drachmes

---

100 $(n \pm x)$, avec $n \in \mathbb{Q}_+^*$.

101 $(x \pm n)$, avec $n \in \mathbb{Q}_+^*$.

102 *Digitus* et *articulus.*

103 $(10 + 2)(10 + 3)$.

104 $(10 - 2)(10 - 3)$.

moins 2 choses multipliées **/(L) 45v/** par 10 dragmes moins 3 choses[105]. Nous multiplions deux choses retranchées par 3 choses retranchées, et ils seront 6 biens en plus. De même, 10 drachmes par 10 deviennent 100, 2 choses retranchées par 10 drachmes deviennent 20 choses en moins, 10 par 3 choses retranchées deviennent 30 choses en moins. Donc, la somme de cette multiplication est 6 biens et 100 drachmes moins 50 choses. De même, on multiplie 10 drachmes plus deux choses par 10 drachmes moins trois choses[106], les choses additionnées par 3 choses retranchées deviennent 6 biens en moins, 10 par 10 deviennent 100 drachmes, 2 choses additionnées par 10 deviennent 20 choses en plus, 10 par 3 choses retranchées deviennent 30 choses retranchées. Donc, nous restaurons les 30 choses retranchées par les 20 premières choses, et elles seront autant que 10 choses retranchées. Donc, de cette multiplication, il ressort 100 drachmes moins 6 biens et 10 choses.

On se conduit de la même manière pour une multiplication de nombres avec des fractions. En effet, on propose 2 drachmes et un tiers à multiplier par 2 drachmes et un quart[107] ; le tiers par le quart devient $\frac{1}{12}$, 2 par 2 deviennent 4, le tiers par 2 devient deux tiers, 2 par le quart devient la moitié, donc le tout devient 5 drachmes et $\frac{3}{12}$. De même, [on propose] 2 drachmes moins un tiers par 2 moins un quart[108]. On multiplie le tiers retranché par le quart retranché, cela devient $\frac{1}{12}$ en plus, 2 par 2 deviennent 4, le tiers retranché par 2 deviennent $\frac{2}{3}$ en moins, 2 par le quart retranché devient $\frac{1}{2}$ en moins. Donc, le tout est 2 drachmes et $\frac{11}{12}$. Et remarque que la chose retranchée par la chose devient le bien retranché[109]. Instruit de ces règles pour multiplier, tu exerceras ton esprit dans les restaurations, dont nous mettrons en évidence la souplesse dans deux exemples **/(L) 46r/** fort utiles à l'exposé suivant.

À propos des racines [carrées].

Ce qu'on recueille de la racine de deux cents moins 10 ajoutée à 20 moins racine de deux cents égale 10[110]. Par exemple, que *AB* soit la racine de deux cents moins 10. On l'ajoute à 20 moins racine de deux cents, qui serait *BC*. Je dis donc que tout *AC* égale 10. Que *BD* soit ce par quoi on restaure racine de 200, *AD* est donc la racine de 200 tout entière. **/(V) 74v/** En

105 $(10-2x)(10-3x)$.

106 $(10+2x)(10-3x)$.

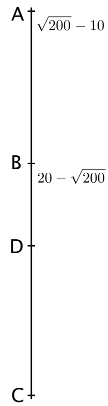
107 $(2+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{4})$.

108 $(2-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{4})$.

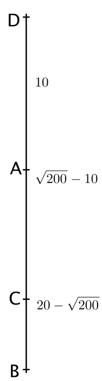
109 $-x \times x = -x^2$.

110 Preuve de l'identité $(\sqrt{200}-10)+(20-\sqrt{200})=10$.

réalité, le reste est 10 moins racine de 200. *AC* tout entier est donc racine de 200 au-dessus de 10 moins cette même racine. Nous posons à la place de la même quantité surabondante ce qui est diminué, et il reste 10 pour *AC*.



Ici on traite encore de racines. De la même façon, racine de 200 moins 10 enlevée de 20 moins racine de 200 devient le reste qui égale 30 moins 2 racines de 200[111]. Par exemple, que *AB* soit 20 moins la racine de 200 dont on soustrait *AC* qui serait racine de 200 moins 10. Je dis donc que le reste *CB* est 30 moins 2 racines de 200. Ainsi, nous ajoutons à *AB* 10, qui serait *DA*. C'est donc évident que *BD* tout entier est 30 moins racine de 200, duquel on enlève *DC* qui est la racine de 200 toute entière, il reste *CB* 30 moins deux racines de 200.



111 Preuve de l'identité $(\sqrt{200}-10)-(20-\sqrt{200})=30-2\sqrt{200}$.

À propos de la multiplication des racines.

Dès lors, pour prendre n'importe quel multiple d'une quelconque racine, multiplie le bien de celle-ci par le carré du nombre par lequel le multiple est nommé, et la racine du produit[112] est la racine proposée selon ce nombre multiple[113]. Par exemple, si tu veux prendre le double de la racine de 9, multiplie 9 par le carré de deux qui est ce par quoi est nommé le double, et tu produis 36 dont il va de soi que la racine 6 est le double de la racine proposée[114].

Mais, si tu cherches le sous-multiple d'une racine, divise le bien de celle-ci par le carré du nombre par lequel est nommé le sous-multiple, et la racine du quotient[115] sera la racine proposée selon ce nombre sous-multiple[116]. Par exemple, **/(L) 46v/** si tu cherches ce qui est contenu deux fois dans la racine de 36, divise 36 par le carré de deux qui est ce par quoi est nommé la moitié, et il en sort 9 dont la racine est ce qui est contenu deux fois dans la racine proposée[117].

Si l'on observe ceci avec attention alors il est très facile de doubler, de tripler, de partager en deux ou de diviser par trois n'importe quelle racine exprimable ou bien sourde d'un nombre[118]. Aussi, à chaque fois que tu souhaites multiplier la racine d'un bien par la racine d'un autre, multiplie le bien par le bien et la racine du produit qui en résulte est autant que ce qui résulte de la multiplication des racines[119].

Mais, toutes les fois où tu veux multiplier le double de n'importe quelle racine par n'importe quel multiple d'une autre racine, calcule le bien des multiples de l'une et l'autre en multipliant l'un par l'autre, d'où la racine du produit qui en résulte donne le résultat qu'on recueille de la multiplication d'un multiple d'une racine par le multiple de l'autre [racine][120]. Par exemple, si tu désires multiplier le double de la racine de 9 par le triple de

112 Littéralement, « le total qui est produit ».

113 $n \times \sqrt{p} = \sqrt{n^2 \times p}$.

114 $2 \times \sqrt{9} = \sqrt{2^2 \times 9} = \sqrt{36} = 6$.

115 Littéralement, « le total qui est produit ».

116 $\frac{\sqrt{p}}{n} = \sqrt{\frac{p}{n^2}}$.

117 $\frac{\sqrt{36}}{2} = \sqrt{\frac{36}{2^2}} = \sqrt{9} = 3$.

118 Une « racine sourde » est un nombre irrationnel, par opposition à une racine exprimable qui peut s'écrire comme nombre entier ou fractionnaire. C'est une traduction directe de l'arabe *aṣamm*.

119 $\sqrt{p^2} \times \sqrt{n^2} = \sqrt{p^2 \times n^2} = p \times n$.

120 $2\sqrt{p} \times n\sqrt{q} = \sqrt{2^2 \times n^2 \times p \times q}$.

la racine de 4[121], effectue le bien du double de la racine de 9, c'est 36, et du triple de la racine de 4, qui est encore 36. Et multiplie l'un par l'autre, tu produis 1296, dont la racine est le résultat de la multiplication du double de la racine de 9 par le triple de la racine de 4.

À propos de la division des racines.

Pour diviser une racine par une racine, divise le bien par le bien, d'où la racine du quotient[122] est ce qui résulte de la division[123]. Mais pour diviser n'importe quel multiple d'une racine par n'importe quel autre multiple d'une racine, calcule le bien de l'un et de l'autre **/(V) 75r/**, que je divise l'un par l'autre, la racine de ceci est ce qui résulte de la division[124].

À propos de la proportion de 4 nombres.

Et aussi, parmi ce qui reste, il est clair que la multiplication du premier de quatre nombres en proportion par le quatrième produit autant que celle du deuxième par le troisième[125]. Et lorsque deux racines sont divisées/**(L) 47r/** l'une par l'autre, dès lors les racines des biens sont dans le même rapport[126]. D'où, la somme de ces deux biens égalent la somme des autres obtenus en multipliant la division précédente par le résultat de la multiplication des racines[127].

De plus, pour trouver le nombre par lequel des fractions à multiplier restaurent l'unité, divise complètement l'unité par celles-ci quelles qu'elles soient, et conserve ce qui en résulte. En effet, dans ce cas, les fractions à multiplier restituent l'unité[128].

De même, si de la multiplication du premier de deux nombres par le second, il résulte un troisième. Alors, si on multiplie le carré du premier par le carré du second, il en résulte le carré du troisième[129]. Et, si de la

121 $2\sqrt{9} \times 3\sqrt{4}$.

122 Littéralement, « total obtenu ».

123 $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$.

124 $\frac{a\sqrt{p}}{b\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}\frac{p}{q}}$.

125 Si a, b, c et d sont quatre nombres en proportion (a est à b ce que c est à d), alors $a \times d = c \times b$.

126 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}$.

127 $a + b = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b})$ (?).

128 $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

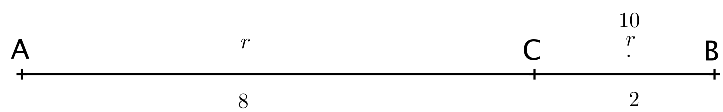
129 Si $a \times b = c$, alors $a^2 \times b^2 = c^2$.

division du premier de deux nombres par le second, il en résulte un troisième. Alors, si on divise le carré du premier par le carré du second, il en ressort le carré du troisième[130].

Tout cela étant pour ainsi dire établi, au moment de regarder avec soin la vertu de la restauration, que l'esprit du lecteur se dirige vers les problèmes. Nous formerons alors 6 problèmes, et nous montrerons la manière avec laquelle nous résolvons les 6 types cités précédemment.

Premier problème[131] qui est établi dans le premier des sous-chapitres où l'on égale le bien aux racines.

Nous divisons 10 en [deux] parties telles que le carré de l'une est le quadruple du produit de l'une par l'autre, et le problème est de savoir quelles sont ces parties[132]. Sa règle[133] est ainsi : posons 10 comme la ligne *AB*, séparée en *C* selon les parties déjà mentionnées. Que l'une, à savoir *AC*, renferme la chose. Par conséquent, le reste *CB* est 10 moins la chose.



En continuant à multiplier la chose par elle-même, le bien est fait. De la même façon, en la multipliant par 10 moins la chose, 10 choses moins le bien sont faits, dont il est indispensable que le quadruple soit le bien que révèle la chose par elle-même. Ensuite, donc, 10 choses moins le bien sont multipliées par 4. Tu égales le produit — 40 choses moins 4 biens — à un bien. Donc, nous restaurons ce qui est retranché, et ce ne peut pas être autrement /**(L) 47v**/ que les 4 biens diminués qui viennent s'ajouter à la fois aux racines et au bien. De là, 40 choses égalent 5 biens. Dans cela, tu réduis le bien à l'unité, cela deviendra un bien égalant 8 choses. Donc, il est évident que 8 est ce qui est connu pour une chose, soit la partie *AC*. Ainsi, 2 est de reste pour *CB*. Et à la manière du premier des plus petits des 6 [types], qui est « le bien égal aux racines », notre problème est résolu.

130 Si $\frac{a}{b} = c$, alors $\frac{a^2}{b^2} = c^2$.

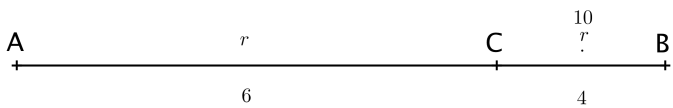
131 C'est le terme *quaestio* [question] qui est ici utilisé, correspondant au terme arabe *mas'ala* [question/problème] [Souissi 1968, 192].

132 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $x^2 = 4x \times y$.

133 Le terme latin *regula* renvoie ici, sans ambiguïté, au terme arabe *qiyās* qui propose les étapes de la mise en équation (pour se remener à l'un des six types connus) et de la résolution [Rashed 2007, 51].

Second problème établi dans le second des sous-chapitres où l'on égale le bien au nombre.

Nous divisons 10 en [deux] parties telles que le carré de l'une multiplié par deux drachmes et 7 neuvièmes soit égal au carré du tout[134]. La règle de sa découverte est celle-ci : soit *AC* que nous avons lié à la chose et que *CB* soit 10 moins la chose.



AC, que l'on multiplie par lui-même, devient le bien. Comme le tout est multiplié par 2 drachmes et 7 neuvièmes, il est donc essentiel que 2 avec 7 neuvièmes du bien égalent le carré de *AB*, c'est-à-dire 100. On le ramène à un bien, précisément en divisant. Effectivement, réfléchis **/(V) 75v/** attentivement à la fraction de deux et 7 neuvièmes de bien qui le fasse devenir un unique bien, c'est $\frac{1}{5}$ et le cinquième des quatre cinquièmes. Si on compare à un seul bien, on égalera 36 drachmes. Donc, manifestement, parce que la racine est 6, ceci est la chose *AC*. C'est pourquoi, de cette manière, la recherche se ramène au second type où l'on égale le bien [à un nombre].

Problème établi dans le troisième des sous-chapitres où l'on égale les racines au nombre.

Nous divisons 10 en [deux] parties telles que 4 soit le résultat de la division de l'une par l'autre[135]. Ensuite, que la chose soit une de ces parties, l'autre est donc 10 moins la chose. Et parce que tu divises 10 moins la chose par la chose, comme il est convenu, le résultat est 4. Il est alors évident que 10 moins la chose sera le résultat de la multiplication de la chose par 4. En effet, toutes les fois où le diviseur est multiplié par ce qui est produit de cette division, il donne en retour le dividende[136], donc 4 choses égalent 10 moins la chose. Et, après la restauration du retranché, 5 choses égalent 10, donc on égale une chose à **/(L) 48r/** 2. D'où, ce problème est résolu par le troisième type qui est « les racines égalent le nombre ».

Problème établi dans le premier chapitre des plus importants.

Ensuite, nous recherchons avec soin, par exemple, quel est le nombre dont le tiers et une drachme, multiplié par son quart avec une drachme

134 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $(2 + \frac{7}{9}) \times x^2 = 10^2$.

135 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $\frac{y}{x} = 4$.

136 $b \times \frac{a}{b} = a$.

produit 20 drachmes[137]. Que la chose soit le nombre, le tiers de la chose avec une drachme est multiplié par le quart de la chose avec une drachme. De là il est produit $\frac{1}{12}$ de bien et une drachme et le tiers et le quart de la chose, nous établissons qu'ils deviennent égaux à 20 drachmes. Quant à ce qui est nécessaire à la restauration, on ne restaure le bien que s'il augmente sa valeur par une multiplication par 12. Effectivement, dès que les uns et les autres ont augmenté leur valeur par 12 et que les drachmes abondantes de part et d'autre ont été comparées, il reste un bien tout entier avec 7 racines égalant 228 drachmes. Et aussi, ce problème où un bien avec des racines égalent un nombre qu'on résout à l'aide du quatrième type selon la règle précitée, montre la multitude proposée et la chose elle-même obtenue. Par exemple, carre la moitié des choses, qui sont 3 et demi, tu réaliseras 12 et un quart. Ajoutes-y les drachmes, et tu réaliseras 240 et un quart, soustrais les choses partagées en deux à la racine de ceci — qui est 15 et demi — et il reste 12 qui est la chose cherchée.

Problème établi dans le second chapitre des plus importants.

Nous divisons 10 en [deux] parties telles que les carrés mis ensemble produisent 58[138]. Que la chose soit une partie, l'autre est 10 moins la chose. On ajoute le produit de la chose par elle-même, c'est-à-dire le bien, et le produit de 10 moins la chose par lui-même, c'est-à-dire le bien et 100 moins 20 choses. De là, on recueille 2 biens et 100 moins 20 choses qui, selon les données, égalent 58. Et après restauration, les biens avec 100 égalent 58 drachmes avec 20 choses. Aussi, après comparaison des drachmes abondantes, 2 biens **/(V) 76r/** avec 42 égalent 20 choses. Mais, après réduction à un unique bien, cela devient : un bien avec 21 est égal à 10 racines. Donc, manifestement, ce problème se résoud à l'aide du type où le bien **/(L) 48v/** avec le nombre égalent la chose. Respecte scrupuleusement la règle qui donne la chose, et tu trouveras 3.

Problème proposé dans le troisième chapitre des plus importants.

Par conséquent, nous regardons attentivement ce nombre dont je multiplie le tiers par le quart, ce qui l'étend au-delà de lui-même de 24 drachmes[139]. Donc, que la chose soit le nombre dont je multiplie le tiers par le quart, il résulte $\frac{1}{12}$ du bien. Cette donnée est effectivement égale à la chose et 24 drachmes. Donc, par restauration[140], un bien tout entier

137 $(\frac{1}{3}x+1)(\frac{1}{4}x+1)=20$.

138 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x+y=10$ et $x^2+y^2=58$.

139 $\frac{1}{3}x \times \frac{1}{4}x = 24 + x$.

140 Le terme *restauracio* est utilisé ici pour désigner l'opération qui consiste à restaurer une fraction à l'unité (ici $\frac{1}{12}$ en la multipliant par 12). Cette double utilisation du

égale 12 racines avec 288 drachmes. Et, parce qu'il relève du sixième type, par sa règle, ce problème établit la quantité d'une seule chose saisie par le nombre donné.

Il est évident que n'importe quel problème proposé selon la restauration peut se résoudre dans les types définis précédemment. L'intérêt de celle-ci est essentiel par rapport à l'enseignement du dixième livre des *Éléments*, et évidemment, pour trouver des lignes irrationnelles, c'est-à-dire sourdes ou bien irrationnelles, et des médiales, des binomiales et des restes ou bien des apotomés qui ne peuvent être considérés comme des nombres. La restauration est aussi une voie très assurée dans la géométrie pratique et dans absolument toutes les questions formées d'inconnues selon l'arithmétique.

À propos du second chapitre des plus importants par lequel est résolu ce problème.

Nous proposons d'ailleurs d'autres recherches de la forme précédente. On recherche quelles sont, de fait, les [deux] parties de dix pour lesquelles il résulte 21 de la multiplication de l'une par l'autre[141]. Que la chose soit l'une d'elles, l'autre sera 10 moins la chose. De leur multiplication, il résulte 10 choses moins le bien, qui sont données égales à 21. Donc, par restauration de ce qui est retranché, 10 choses deviennent égales au bien et 21. Ainsi résous à l'aide de la cinquième règle, et tu trouveras les parties 3 et 7.

Problème du troisième sous-chapitre.

De même, on recherche quelles sont, de fait, les [deux] parties de 10 dont il reste 40 du carré de la plus grande dont on soustrait le carré de la plus petite[142]. Que la chose soit une partie, dont le carré est le bien, l'autre sera 10 moins la chose. Son carré est 100 et le bien moins 20 choses desquels **/(L) 49r/** un bien est diminué. Et, il reste 100 moins 20 choses qui égalent, comme il a été dit plus haut, 40. Aussi, par restauration, 40 et 20 choses égalent 100. Par comparaison des drachmes abondantes, 60 égalent 20 choses, donc on égale 3 drachmes à une chose par le troisième type.

---

mot *restauratio* correspond d'une part à l'usage archaïque de la racine trilitère *jabara* en arabe (pour restaurer une fraction ou une figure géométrique) et d'autre part à l'usage proposé par al-Khwārizmī (dans le cadre de la résolution d'équations) [Moyon 2017, 122].

141 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $x \times y = 21$.

142 Partage de 10 en deux parties x et y (avec $x < y$) telles que $x + y = 10$ et $y^2 - x^2 = 40$.

Problème du second chapitre des plus importants.

De même, on recherche quelles sont, de fait, les [deux] parties de dix pour lesquelles on recueille 54 de leur différence ajoutée à la somme de leur carré[143]. Que la chose soit une partie, l'autre sera 10 moins la chose. On ajoute aux carrés des deux parties, à savoir 100 et 2 biens moins 20 choses, la différence 10 moins deux choses, ce qu'on donne égal à 54. Ainsi, par /**(V) 76v**/ restauration des choses, 2 biens avec 110 égalent 54 et 22 choses. Ainsi, par comparaison des nombres abondants, on égalise 56 et 2 biens avec 22 choses. Et, par réduction à l'unité, on égale un bien avec 28 à 11 choses. Résous à l'aide du cinquième type et la chose sera 4.

Problème du second chapitre des plus importants.

On recherche encore quelles sont, de fait, les [deux] parties de dix pour lesquelles la somme de chacune des divisions de l'une par l'autre donne 2 drachmes et $\frac{1}{6}$[144]. Que la chose soit une partie, l'autre sera 10 moins la chose. Leurs carrés additionnés donnent 2 biens et 100 moins 20 choses. Vu ce qui est donné au-dessus, nécessairement, ils sont égaux à la multiplication d'une des deux parties par l'autre que je multiplie par la somme des divisions de chacune des deux parties par l'autre, il s'agit ici de 2 et un sixième. Donc, multiplie la chose par 10 moins la chose, et tu auras 10 choses moins le bien, multiplie[-le] par 2 et un sixième, d'où tu recueilles 21 choses et 2 tiers de celle-ci moins deux biens et un sixième de celui-ci. [C'est égal] à la somme des carrés, à savoir 2 biens et 100 moins 20 choses. Donc, si l'une et l'autre augmentent, de la même manière, de ce qui est à compenser, à savoir les biens diminués, alors 21 choses et deux tiers de celle-ci deviennent égales à 100 /**(L) 49v**/ et 4 biens et un sixième de celui-ci moins 20 choses. Après restauration des choses, 41 choses et deux tiers de celle-ci seront égales à 100 et 4 biens et un sixième de celui-ci qu'il est nécessaire de ramener à un seul bien. Donc, si l'on regarde avec soin quelle est la fraction ou les fractions de quatre biens et un sixième de celui-ci qui le fasse devenir un unique bien, c'est le cinquième et le cinquième du cinquième. Et, tour à tour, on agit de la sorte tout autant avec les drachmes qu'avec les choses. Donc, un unique bien avec 24 égalent 10 choses. Résous à l'aide du cinquième type et la chose sera 4.

Du second chapitre des plus importants.

De même, on recherche quelles sont, de fait, les [deux] parties de dix pour lesquelles on recueille 50 en additionnant le produit d'une des deux

---

143 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x+y=10$ et $(y-x)+(y^2+x^2)=54$.

144 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x+y=10$ et $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2+\frac{1}{6}$.

parties par 5 à la moitié du quotient de ce même produit par l'autre partie[145]. Qu'une partie soit la chose, on la multiplie par 5, et elles seront 5 choses. Celles-ci sont divisées par la partie restante qui est 10 moins la chose, d'où il résulte ce qui est inconnu et dont la moitié est 50 moins 5 choses. Effectivement, il est fait en sorte que cette quantité additionnée aux 5 choses donne 50 drachmes. Mais, parce que ce qui est inconnu est obtenu de la division de 5 choses par 10 moins la chose, si l'on multiplie sa moitié qui est 50 moins 5 choses par 10 moins la chose, il en résulte 5 choses partagées en deux, ce qui est 2 et demi. Ici, 500 avec 5 biens moins 100 choses égalent 2 choses et demi. Et donc, après réduction du bien à l'unité, 100 avec un bien moins 20 choses égalent la chose partagée en deux. Et, après restauration, on égale 100 avec un bien à 20 choses et demie. Résous à l'aide du cinquième type et la chose sera 8.

Du troisième des sous-chapitres.

De même pour la recherche de deux quantités qui diffèrent de deux et desquelles il résulte un demi de la division du plus petit par le plus grand[146]. Que la chose soit la plus petite quantité, la plus grande est la chose et 2 **/(V) 77r/**. Donc, puisque, de la division de la chose par la chose et 2, il en ressort un demi, la multiplication de la chose et deux par la moitié égale la chose, laquelle doit être 2.

[Autres problèmes]

De même, on cherche quelles sont, de fait, les [deux] parties de dix telles que si leur différence divise la multiplication de l'une par l'autre, il en résulte 5 et un quart[147].

De même, on cherche quel est le bien dont 4 racines multipliées par 5 racines donnent une aussi grande quantité que 2 biens et 36 drachmes[148].

Plus amplement, on recherche quel est le bien dont tu soustrais son tiers et 3 drachmes, ce qui subsiste est multiplié par lui-même, établis que le bien est ainsi produit[149], etc.

Ensuite, on recherche quelles sont les [deux] parties de dix desquelles il est produit autant de la multiplication de l'une par 10 que de la multiplication de l'autre par elle-même[150].

---

145 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $5x + \frac{1}{2}.\frac{5x}{y} = 50$.

146 Recherche de deux nombres x et y tels que $y - x = 2$ et $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

147 Partage de 10 en deux parties x et y $(x < y)$ telles que $x + y = 10$ et $\frac{x \times y}{y - x} = 5 + \frac{1}{4}$.

148 Recherche de x tel que $4x \times 5x = 2x^2 + 36$.

149 Recherche de x tel que $(x^2 - (\frac{1}{3}x^2 + 3))(x^2 - (\frac{1}{3}x^2 + 3)) = x^2$.

150 Partage de 10 en deux parties x et y telles que $x + y = 10$ et $x^2 = 10y$.

Ayant été formés à ces types, on trouvera la solution aux divers problèmes à partir des règles qui précèdent.

7. ANNEXE : DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DES ALGORITHMES DE RÉSOLUTION DES TROIS TYPES COMPOSÉS

Dans cette annexe, nous présentons l'analyse des preuves des algorithmes de résolution des trois types composés. Nous avons choisi de les présenter sous forme de tableaux synthétiques avec dans la colonne de gauche le raisonnement explicite de l'auteur (sur les exemples numériques et sans ajouter de commentaire mathématique personnel) et, dans la colonne de droite, les principes du raisonnement géométrique sur le cas général.

Les diagrammes qui peuvent aider à la compréhension des démonstrations sont en marge dans (V) comme dans (L) sans qu'on puisse vraiment savoir s'ils sont de la main du copiste du texte principal[151]. Mais, dans (V), une main postérieure a renseigné les diagrammes en y indiquant les grandeurs numériques. Seul le diagramme associé au type 6 est annoncé dans le corps du texte[152]. En outre, les diagrammes sont distincts dans les deux copies conservées; celles de (L) sont incomplètement réalisées. Nous avons donc choisi de reprendre ici les diagrammes de (V). Ce sont aussi ceux qui accompagnent notre traduction française.

7.1. *Le type 4*

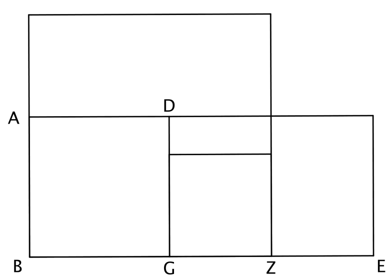


FIGURE 12. Construction associée à la Table 8

151 Les diagrammes en marge du fol. 44r de (L) sont illisibles.

152 (L), fol. 44v; (V), fol. 73v : « *cuius figura hec est* ».

TABLE 8. Démonstration géométrique de l'algorithme de type 4

Équation de type 4 : $x^2 + 10x = 39$	Généralisation à $x^2 + px = q$
Soit *ABGD* un carré	$\rightarrow ABGD = x^2$
DG est le côté du carré	$\rightarrow DG = x$
On pose *E* tel que $GE = 10$ et *E* dans le prolongement de *BG* du côté de *G*.	
$(DE) = DG \times GE$, donc $(DE) = 10x$	$\rightarrow (DE) = p \times x$
Comme $(AE) = ABGD + (DE)$	
et $ABGD + (DE) = x^2 + 10x = 39$,	
alors $(AE) = 39$,	$\rightarrow (AE) = q$
Soit *Z* le milieu de *GE*	
donc $GZ = \frac{GE}{2} = \frac{10}{2} = 5$	$\rightarrow GZ = \frac{p}{2}$
D'après *Éléments* II.6[153],	
$EB \times BG + GZ^2 = BZ^2$	
ou encore $(AE) + GZ^2 = BZ^2$	$\rightarrow BZ^2 = (\frac{p}{2})^2 + q$
donc $39 + 25 = BZ^2$, soit $BZ^2 = 64$	
donc $BZ = 8$	$\rightarrow BZ = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}$
Mais $BG = BZ - GZ$ donc $BG = 8 - 5 = 3$, d'où $x = 3$	$\rightarrow BG = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$

7.2. *Le type 5*

TABLE 9. Démonstration géométrique de l'algorithme de type 5

Équation de type 5 : $x^2 + 21 = 10x$	Généralisation à $x^2 + q = px$
Soit *ABGD* un carré	$\rightarrow ABGD = x^2$
AB est le côté du carré	$\rightarrow AB = x$
On pose maintenant *E* tel que $BE = 10$ et *E* dans le prolongement de *BG* du côté de *G*.	$\rightarrow BE = p$
$(AE) = AB \times BE$, d'où $(AE) = 10 \times x$	$\rightarrow (AE) = p \times x$
On en déduit $(DE) = (AE) - ABGD$ et donc $(DE) = 21$	$\rightarrow (DE) = q$

---

153 « *Si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle, contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite ajoutée, est, pris avec le carré sur sa moitié, égal au carré sur la droite composée de sa moitié et la droite ajoutée* » [Euclide 1990, 335].

Le copiste de la glose marginale de (V) précise « par la sixième du second [livre] d'Euclide » [*per sextam secundi euclidis*] pour cette preuve ainsi que pour celle du type 6 où l'auteur ne précise pas à nouveau la référence explicitement. Contrairement à [Hughes 1989, 18], il faut bien lire *sextam* et non *septam*. Une comparaison paléographique du *x* et du *p* ne laisse aucun doute dans la glose « *ista probantur per sextam secundi euclidis* » ; (V), fol. 73v.

On construit le milieu Z de BE. Il y a deux possibilités qui permettent de donner les deux solutions possibles[154].

- Soit Z est entre les points B et G (Table 10)
- Soit Z est entre les points G et E (Table 11)

TABLE 10. Démonstration géométrique de l'algorithme de type 5 — Z est entre les points B et G

1er cas : Z est entre les points B et G $BZ = \frac{BE}{2} = \frac{10}{2} = 5$	$\rightarrow BZ = \frac{p}{2}$
D'après *Éléments* II.5[155], $BZ^2 = BG \times GE + ZG^2$ soit $BZ^2 = (DE) + ZG^2$ donc $ZG^2 = 25 - 21 = 4$	$\rightarrow ZG^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$
donc $ZG = 2$	$\rightarrow ZG = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$
$BG = ZG + BZ$ donc $BG = 5 + 2 = 7$, d'où $x = 7$	$\rightarrow BG = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

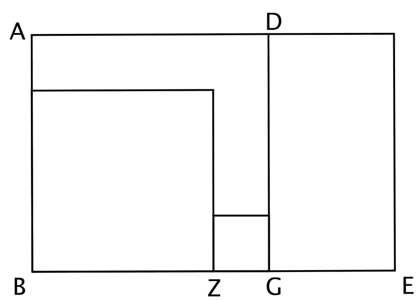


FIGURE 13. Construction associée aux Tables 9 et 10

154 Le cas où $Z = G$ n'est pas considéré sans doute parce qu'il est trivial. En effet, si $Z = G$, alors $BG = GE = (\frac{p}{2})$. Dans ce cas, et seulement dans ce cas, $x = \frac{p}{2}$. On retrouve nécessairement le cas où $(\frac{p}{2})^2 = q$. Nous retrouvons une partie de la remarque accompagnant la règle générale du type 5. Quant au problème impossible ($(\frac{p}{2})^2 < q$), aucune justification géométrique n'est apporté.

155 « *Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite.* » [Euclide 1990, 333].

TABLE 11. Démonstration géométrique de l'algorithme de type 5 — Z est entre les points G et E

2ᵉ cas : Z est entre les points G et E $BZ = \frac{BE}{2} = \frac{10}{2} = 5$	$\rightarrow BZ = \frac{p}{2}$
$BG = BZ - GZ$, d'où $BG = 5 - 2 = 3$	$\rightarrow BG = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

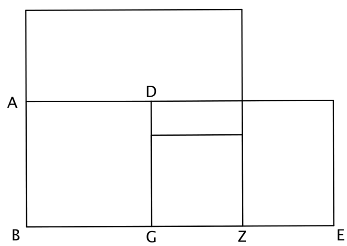


FIGURE 14. Construction associée aux Tables 9 et 11

7.3. *Le type 6*

TABLE 12. Démonstration géométrique de l'algorithme de type 6

Équation de type 6 : $3x + 4 = x^2$	Généralisation à $px + q = x^2$
Soit $ABGD$ un carré	$\rightarrow ABGD = x^2$
AB est le côté du carré	$\rightarrow AB = x$
On pose maintenant E tel que $BE = 3$	
$(AE) = AB \times BE$, soit $(AE) = 3 \times x$	
Mais $(ED) + (AE) = ABGD$,	$\rightarrow (ED) = p \times x$
donc $(ED) = 4$	
Soit Z le milieu de BE donc $BZ = \frac{BE}{2} = \frac{3}{2}$	$\rightarrow BZ = \frac{p}{2}$
$BG \times GE + ZE^2 = ZG^2$	
ou encore $(ED) + ZE^2 = ZG^2$	$\rightarrow ZG^2 = (\frac{p}{2})^2 + q$
donc $4 + (\frac{3}{2})^2 = ZG^2$, soit $ZG^2 = 6 + \frac{1}{4}$	
donc $ZG = 2 + \frac{1}{2}$	$\rightarrow BZ = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}$
Mais $BG = BZ + ZG$ donc $BG = \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 4$, d'où $x = 4$	$\rightarrow BG = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q}$

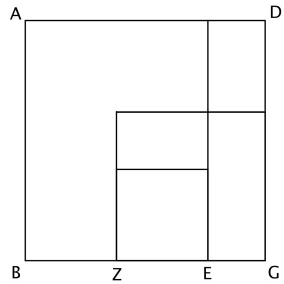


FIGURE 15. Construction associée à la Table 12

RÉFÉRENCES

ABDELJAOUAD (Mahdi)

[2005] 12th century algebra in an arabic poem : Ibn al-Yāsamīn's *Urjūza fī'l-jabr wa'l-muqābala*, *Llull*, 28/61 (2005), p. 181–194.

[2011] La circulation des symboles mathématiques maghrébins entre l'Occident et l'Orient musulmans, dans Bouzari (Abdelmalek) & Guergour (Youcef), dir., *IXe colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Alger : Imprimerie Fasciné, 2011, p. 7–36.

ABŪ KĀMIL

[2004] *Die Algebra. Kitab al-gabr wal-muqabala des Abu Kamil Soga ibn Aslam*, Alep : Institute for the history of Arabic Science, 2004.

ALLARD (André)

[1992] *Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī. Le Calcul Indien (Algorismus)*, Paris, Namur : Blanchard et Société des études classiques, 1992.

[1997] L'influence des mathématiques arabes dans l'Occident médiéval, dans Rashed (Roshdi), dir., *Histoire des sciences arabes*, vol. 2, Paris : Seuil, 1997, p. 199–229.

ARISTOTE

[1970] *Métaphysique*, Paris : Vrin, 1970.

BEAUJOUAN (Guy)

[1948] Étude paléographique sur la 'rotation' des chiffres et l'emploi des apices du xe au xiie siècle, *Revue d'histoire des sciences*, 1 (1948), p. 301–313.

[1991] *Par raison de nombres : l'art du calcul et les savoirs médiévaux*, Aldershot : Variorum, 1991.

BENEDICT (Suzan Rose)

[1914] *A Comparative Study of the Early Treatises Introducing into Europe the Hindu Art of Reckoning*, PhD in Philosophy, University of Michigan, 1914.

Boèce
[1995] *Institution arithmétique*, Paris : Les Belles Lettres, 1995.

Boncompagni (Baldassarre)
[1851] Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabionetta astronomo del secolo decimoterzo, *Atti dell'accademia pontificia dei nuovi lincei*, 4 (1851), p. 387–493.

[1857] *Trattati d'aritmetica. II. Ioannis Hispalensis Liber algorismi de pratica arismetrice*, Roma : Tipografia delle Scienze Fisiche e Matematiche, 1857.

Burnett (Charles)
[2001] The Coherence of the Arabic-Latin Translation Program in Toledo in the Twelfth Century, *Science in Context*, 14(1) (2001), p. 249–288.

[2002] Indian Numerals in the Mediterranean Basin in the Twelfth Century, with Special Reference to the 'Eastern Forms', dans Dold-Samplonius (Yvonne), Dauben (Joseph W.), Folkerts (Menso) & Van Dalen (Benno), eds., *From China to Paris : 2000 years transmission of mathematical ideas*, Stuttgart : Franz Steiner, 2002, p. 237–288.

Busard (Hubertus Lambertus Ludovicus)
[1984] *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's* Elements *Commonly Ascribed to Gerard of Cremona*, Asfār / Publications of the Research institute for the history of Muslim-Christian relations, Leiden : E. J. Brill, 1984.

[1987] *The Mediaeval Latin Translation of Euclid's* Elements *Made Directly from the Greek*, Boethius, Stuttgart : Franz Steiner, 1987.

[2005a] *Johannes de Tinemue's Redaction of Euclid's* Elements *: the So-Called Adelard III Version*, Boethius, vol. 1, [Stuttgart] : Franz Steiner, 2005.

[2005b] *Campanus of Novara and Euclid's* Elements, Boethius, vol. 1, [Stuttgart] : Franz Steiner, 2005.

Busard (Hubertus Lambertus Ludovicus) & Folkerts (Menso)
[1992] *Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's* Elements, *the So-Called Adelard II Version*, Science Networks, n°8-9, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 1992.

De la Mare (Albinia Catherine)
[1971] *Catalogue of the Collection of Medieval Manuscripts Bequeathed to the Bodleian Library, Oxford by James P. R. Lyell*, Oxford : Clarendon Press, 1971.

Delle Donne (Fulvio)
[2007] Un'edita epistola sulla morte du Guglielmo de Luna, Maestro presso lo studium di Napoli, e le traduzione prodotte alla corte du Manfredi di Svevia, *Recherches de Théologie et Philosophie médiévales*, LXXIV (1) (2007), p. 225–245.

Djebbar (Ahmed)

[1981] *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles*, Publications mathématiques d'Orsay, vol. 81-02, Orsay : Université Paris XI, 1981.

[1992] Le traitement des fractions dans la tradition mathématique arabe du Maghreb, dans Benoit (Paul), Chemla (Karine) & Ritter (Jim), dir., *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag, 1992, p. 223–245.

[1998] *Contribution à l'étude des activités mathématiques dans l'Occident musulman (IX^e-XVI^e siècles)*, Habilitation à diriger des recherches, École des hautes études en Sciences Sociales (Paris), 1998.

[2005] *L'algèbre arabe : genèse d'un art*, Paris : Vuibert Adapt, 2005.

[2016] La circulation de l'algèbre arabe en Europe et son impact, *Micrologus*, XXIV (2016), p. 95–119.

Euclide

[1990] *Les Éléments. Livres I-IV*, vol. 1, Paris : Presses universitaires de France, 1990.

[1998] *Les Éléments. Livre X*, vol. 3, Paris : Presses universitaires de France, 1998.

Fibonacci (Leonardo)

[1857] *Il liber abbaci*, Roma : Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857.

Franci (Raffaella)

[2003] Una traduzione in volgare dell'al-jabr di l-Khwarizmi (ms. Urb. Lat. 291 Biblioteca apostolica Vaticana), dans Franci (Raffaella), Pagli (Paolo) & Simi (Annalisa), dir., *Il sogno di Galois. Scritti di storia della matematica dedicati a Laura Toti Rigatelli per il suo 60° compleanno*, Univesità di Siena : Centro di Studi della matematica Medioevale, 2003, p. 19–49.

Franci (Rafaella) & Toti Rigatelli (Laura)

[1983] Maestro Benedetto da Firenze e la storia dell'algebra, *Historia Mathematica*, 10 (1983), p. 297–317.

Ghaligai (Francisco di Lionardo)

[1521] *Summa de arithmetica*, Florence : B. Zucchetta, 1521.

Guillaumin (Jean-Yves)

[1994] La structure du chapitre 1,4 de l'*Institution Arithmétique* de Boèce et le cours d'Ammonios sur Nicomaque, *Revue d'histoire des sciences*, 47(2) (1994), p. 249–258.

Halliwell (James Orchard)

[1977] *Rara mathematica*, Hildesheim, New York : Georg Olms, 1977.

HISSETTE (Roland)

[1997] Guillaume de Luna ou de Lunis ou Lunense : un même traducteur d'Averroès et de traités d'al-Jabr ?, *Bulletin de philosophie médiévale*, 29 (1997), p. 121–129.

[2001] Des traductions doubles de Guillaume de Luna ou de Lunis, dans Hamesse (Jacqueline), dir., *Les traducteurs au travail : leurs manuscrits et leurs méthodes*, Turnhout : Brepols, 2001, p. 257–273.

HØYRUP (Jens)

[2010] Hesitating progress : the slow development toward algebraic symbolization in abbacus and related manuscripts, c. 1300 to c. 1550, dans Heeffer (Albrecht) & Van Dyck (Maarten), dir., *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics : Studies in Logic*, vol. 26, Londres : College Publications, 2010, p. 3–56.

HUGHES (Barnabas)

[1982] The Medieval Latin Translations of al-Khwārizmī's Algebra, *Manuscripta*, 26 (1982), p. 31–37.

[1986] Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's al-jabr, *Mediaeval Studies*, 48 (1986), p. 211–263.

[1989] *Robert of Chester's Latin Translation of al-Khwārizmī's al-jabr*, Stuttgart : Franz Steiner, 1989.

IBN AL-HĀʾIM

[2003] *Sharḥ al-urjūza al-yāsamīniya*, Tunis : Publications de l'Association tunisienne des sciences mathématiques, 2003.

JAMBLIQUE

[2014] *In Nicomachi arithmeticam*, Mathematica Graeca Antiqua, Pisa : Fabrizio Serra, 2014.

KARPINSKI (Louis Charles)

[1910] An Italian Algebra of the Fifteenth Century, *Bibliotheca mathematica : Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, 3(11) (1910), p. 209–219.

KATZ (Victor J.) & PARSHALL (Karen Hunger)

[2014] *Taming the Unknown : A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century*, Princeton, Oxford : Princeton Univ. Press, 2014.

KAUNZNER (Wolfgang)

[1985] Über eine frühe lateinische Bearbeitung der Algebra al-Khwârizmîs in MS Lyell 52 der Bodleian Library Oxford, *Archive for History of Exact Sciences*, 32(1) (1985), p. 1–16.

[1986] Die lateinishe Algebra in MS Lyell 52 der Bodleian Library, Oxford, früher Ms Admont 612, dans Hamann (Günther), Hrsg., *Aufsätze zur Geschichte der Naturwissenschaften und Geographie*, Wien : Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 1986, p. 47–89.

KOUTEYNIKOFF (Odile)

[2005] Le livre complet en algèbre d'Abu Kamil, *Repères IREM*, 61 (2005), p. 37–58.

LAMRABET (Driss)
[1994] *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines*, Rabat : chez l'auteur, 1994.

LEJBOWICZ (Max)
[2012] La découverte des traductions latines du *Kitāb al-jabr wa l-muqābala* d'al-Khwārizmī, dans Rommevaux (Sabine), Spiesser (Maryvonne) & Massa Esteve (Maria Rosa), dir., *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*, Centre d'Études Supérieures de la Renaissance : Le savoir de Mantice, Paris : Honoré Champion, 2012, p. 15–32.

LEVEY (Martin)
[1966] *The Algebra of Abu Kamil*, Madison : The University of Wisconsin Press, 1966.

LÉVY (Tony)
[2003] L'algèbre arabe dans les textes hébraïques (I). Un ouvrage inédit d'Isaac Ben Salomon al-Aḥdab (XIVe siècle), *Arabic Sciences and Philosophy*, 13 (2003), p. 269–301.

L'HUILLIER (Ghislaine)
[1990] *Le* quadripartitum numerorum *de Jean de Murs*, Genève, Paris : Droz, 1990.

MOYON (Marc)
[2007] La tradition algébrique arabe du traité d'al-Khwârizmî au Moyen Âge latin et la place de la géométrie, dans Barbin (Évelyne) & Bénard (Dominique), dir., *Histoire et Enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements*, Lyon : INRP-IREM, 2007, p. 289–318.
[2012] Algèbre & *Practica geometriæ* en Occident médiéval latin : Abū Bakr, Fibonacci et Jean de Murs, dans Rommevaux (Sabine), Spiesser (Maryvonne) & Massa Esteve (Maria Rosa), dir., *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*, Centre d'Études Supérieures de la Renaissance : Le savoir de Mantice, Paris : Honoré Champion, 2012, p. 33–65.
[2016] Ibn Luyūn at-Tujībī (1282-1349) : un nouveau témoin de la science du mesurage en Occident musulman, dans Bouzari (Abdelmalek), dir., *Actes du XIe colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Alger, 26-28 octobre 2013)*, Alger : Éditions Al-Khalduniya, 2016, p. 333–352.
[2017] *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales*, De diversis artibus, Turnhout : Brepols, 2017.

MOYON (Marc) & SPIESSER (Maryvonne)
[2015] L'arithmétique des fractions dans l'œuvre de Fibonacci : fondements & usages, *Archive for History of Exact Sciences*, 69(4) (2015), p. 391–427.

NOUGARET (Louis)
[1986] *Traité de métrique latine classique*, Paris : Klincksieck, 1986.

OAKS (Jeffrey)
[2015] Series of Problems in Arabic Algebra : The Example of ʿAlī al-Sulamī, *SHS Web of Conferences*, 22(5) (2015), p. 1–16.

OAKS (Jeffrey A.) & ALKHATEEB (Haitham M.)
[2005] Māl, enunciations, and the prehistory of Arabic algebra, *Historia Mathematica*, 32 (2005), p. 400–425.

PACIOLI (Luca)
[1494] *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Venetia : Paganino de Paganini, 1494.

RASHED (Roshdi)
[2007] *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, Paris : Blanchard, 2007.
[2012] *Abū Kāmil : Algèbre et analyse diophantienne*, Berlin, Boston : W. De Gruyter, 2012.

ROMMEVAUX (Sabine), DJEBBAR (Ahmed) & VITRAC (Bernard)
[2001] Remarques sur l'histoire du texte des *Éléments* d'Euclide, *Archive for History of Exact Sciences*, 55(3) (2001), p. 221–295.

SESIANO (Jacques)
[1993] La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abū Kāmil, dans Folkerts (Menso) & Hogendijk (Jan Peter), eds., *Vestigia Mathematica : Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam, Atlanta : Rodopi, 1993, p. 315–452.
[2014] *The Liber Mahameleth : a 12th-Century Mathematical Treatise*, Cham : Springer, 2014.

SOUISSI (Mohamed)
[1968] *La langue des mathématiques en arabe*, Tunis : Université de Tunis, 1968.

TARTAGLIA (Niccolò)
[1546] *Quesiti et inventioni diverse*, Venetia : Venturino Ruffinelli, 1546.

ULIVI (Elisabetta)
[2002] Benedetto da Firenze (1429-1479) un maestro d'abaco del XV secolo. Con documenti inediti e con un'Appendice su abacisti e scuole d'abaco a Firenze nei secoli XIII-XVI, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, XXII(1) (2002).

VAN EGMOND (Warren)
[1980] *Practical Mathematics in the Italian Renaissance : A Catalog of Italian Abacus Manuscripts and printed Books to 1600*, Firenze : Museo i Istituto di Storia della Scienza, 1980.

VITRAC (Bernard)
[2008] Les formules de la « puissance » (*dunamis, dunasthai*) dans les mathématiques grecques et dans les dialogues de Platon, dans Crubellier (Michel), Jaulin (Annick), Lefèbvre (David) & Morel (Pierre-Marie), dir., *Dynamis : Autour de la puissance chez Aristote*, Louvain : Peeters, 2008, p. 73–148.

WOEPCKE (Franz)
[1854] Notes sur des notations algébriques employées par les Arabes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 39 (1854), p. 162–165.