BULLETIN DE LA S. M. F.

J. A. DE SÉGUIER

Sur une proposition de Mathieu

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 65-66

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__65_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE PROPOSITION DE MATHIEU;

Par M. DE SÉGUIER.

Mathieu a énoncé ce principe que *dans un groupe* $\mathcal{G}$ *transitif de degré* $q = 2p + 1$ (p *et* q *étant premiers*) *d'ordre* $< \frac{1}{2}(q!)$ *et* $> q(q-1)$, *les diviseurs d'ordre* p *sont permutables à des substitutions de degré* $2(p-1) = q - 3$ (*J. M.*, 1873, p. 26).

La démonstration que j'en ai donnée récemment (*J. M.*, 1902, p. 281) (¹) peut être remplacée par la suivante, qui est beaucoup plus simple.

On verra toujours de la même manière que $\mathcal{G}$ n'a pas de diviseur d'ordre p^2 et que ses substitutions d'ordre p ont deux cycles. Soient N l'ordre du diviseur G de $\mathcal{G}$ qui fixe un symbole et dp l'ordre du groupe des substitutions permutables à un diviseur d'ordre p. On peut supposer que G n'a pas de substitutions paires, sans quoi on considérerait le plus petit multiple commun des substitutions paires. Alors le groupe des éléments de $\mathcal{G}$ permutables à un de ses diviseurs d'ordre q est d'ordre pq et $\mathcal{G}$ contient

$$\frac{Nq}{pq}(q-1) = 2N$$

substitutions d'ordre q.

Si $d = 1$, G contient $N\frac{p-1}{p}$ substitutions d'ordre p et $\mathcal{G}$ contient $2N + Nq\frac{p-1}{p}$ substitutions ($\neq 1$) d'ordre p ou q.

Il reste donc dans $\mathcal{G}$, et de même dans G, $\frac{N}{p}$ substitutions. Mais cela est impossible, les conjugués de G étant premiers entre eux.

On obtient une autre démonstration simple en s'appuyant sur ce théorème de M. Frobenius que les diverses substitutions de $\mathcal{G}$ fixent en tout qN symboles.

(¹) Les inégalités hors texte de la page 281 doivent être remplacées par

$$\tfrac{1}{2}qN + e_3 \geqq qN\frac{p-1}{dp}, \qquad d > \frac{3}{2}\frac{p-1}{p},$$

et ne donnent $d \geqq 2$ que pour $p > 2$. Mais le cas $p = 2$ est obvie. On remarquera que, pour un groupe quelconque G d'ordre N, $e_1 + e_2 = \Sigma_1^\tau i g_i = \tau N$, τ étant le nombre des systèmes d'intransitivité de G.

Je profiterai de l'occasion pour réparer une omission. Dans le Mémoire cité j'ai développé la démonstration (¹) de ce théorème qu'*un groupe de degré* $p+1$ *et d'ordre* $\frac{p(p^2-1)}{2}$ *deux fois transitif* (il est clair qu'il le sera deux fois, s'il l'est seulement une) *est nécessairement le groupe des substitutions* $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ *où* $\alpha\delta-\beta\gamma \equiv 1 \pmod{p}$ *sauf si* $p=7$ *auquel cas il y a un autre type* (*C. R.*, avril 1901). M. Frobenius en a publié une nouvelle démonstration (*S. A. B.*, avril 1902) dont je n'ai eu connaissance que tout récemment.

(¹) Au dernier alinéa de la page 274 il faut faire $s=r$; mais le raisonnement n'en est que simplifié.