BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GENTY

Note sur la déformation infinitésimale des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 221-227

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__221_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

NOTE SUR LA DÉFORMATION INFINITÉSIMALE DES SURFACES;

Par M. E. GENTY.

Dans un Mémoire non encore publié relatif à la déformation infinitésimale des surfaces, j'ai obtenu quelques propositions, dont l'énoncé intéressera peut-être les lecteurs du *Bulletin*.

1. M. Bianchi dit que deux surfaces (A) et (B) sont *associées*, lorsqu'elles se correspondent point par point, avec parallélisme des plans tangents, de telle sorte qu'aux asymptotiques de l'une corresponde sur l'autre un réseau conjugué.

Soient x, y et z; x_1, y_1 et z_1 les coordonnées de deux points correspondants A *et* B, *de deux surfaces* (A) et (B) *qui se correspondent point par point. Pour que ces deux surfaces soient associées, il faut et il suffit que les expressions $z_1\,dy - y_1\,dz$, $x_1\,dz - z_1\,dx$, $y_1\,dx - x_1\,dy$ soient des différentielles exactes, de telle sorte qu'on puisse poser*

$$(1)\qquad \begin{cases} z_1\,dy - y_1\,dz = d\xi, \\ x_1\,dz - z_1\,dx = d\eta, \\ y_1\,dx - x_1\,dy = d\zeta. \end{cases}$$

ξ, η et ζ sont alors les coordonnées d'un point M d'une surface (M) correspondant à (A) par orthogonalité des éléments.

2. Si les premiers membres des équations (1) sont des différentielles exactes, il en sera de même des expressions $z\,dy_1 - y\,dz_1$, $x\,dz_1 - z\,dx_1$, $y\,dx_1 - x\,dy_1$, et l'on pourra poser

$$(2)\qquad \begin{cases} z\,dy_1 - y\,dz_1 = d\xi_1, \\ x\,dz_1 - z\,dx_1 = d\eta_1, \\ y\,dx_1 - x\,dy_1 = d\zeta_1. \end{cases}$$

ξ_1, η_1 et ζ_1 seront les coordonnées d'un point N définissant une surface (N) qui correspond à (B) par orthogonalité des éléments.

On aura d'ailleurs

$$\begin{aligned} d\xi - d\xi_1 &= d(yz_1 - y_1 z), \\ d\eta - d\eta_1 &= d(zx_1 - z_1 x), \\ d\zeta - d\zeta_1 &= d(xy_1 - x_1 y), \end{aligned}$$

ou, en disposant convenablement des constantes introduites par les intégrations,

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi - \xi_1 = yz_1 - y_1 z, \\ \eta - \eta_1 = zx_1 - z_1 x, \\ \zeta - \zeta_1 = xy_1 - x_1 y. \end{cases}$$

3. Soient X, Y et Z les cosinus directeurs de la normale au point A de (A), u et v les paramètres arbitraires auxquels on rapporte la surface, et posons

$$\begin{aligned} D_A &= -\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}, \\ D'_A &= -\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}, \\ D''_A &= -\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}, \end{aligned}$$

où nous désignons par le signe S une somme étendue à trois termes jouant le même rôle par rapport aux trois axes coordonnés.

Les quantités D_A, D'_A et D''_A seront, à un facteur commun près, pour la surface (A), les déterminants de Gauss D, D′ et D″; nous les appellerons les *coefficients de forme* de (A).

On aura de même, pour les coefficients de forme de (B),

$$\begin{aligned} D_B &= -\mathrm{S}\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}, \\ D'_B &= -\mathrm{S}\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -\mathrm{S}\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}; \\ D''_B &= -\mathrm{S}\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}; \end{aligned}$$

et la condition qui exprime qu'aux asymptotiques de l'une des surfaces correspond sur l'autre un réseau conjugué prend la forme

$$(4) \qquad D_A D''_B - 2 D_A D'_B + D''_A D_B = 0.$$

Or, si l'on pose

$$\mathrm{S}\, x_1 \mathrm{X} = p,$$

p sera la distance de l'origine au plan tangent en B à (B) et l'on aura

$$\mathrm{D}_\mathrm{B} = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial u} - \alpha' \frac{\partial p}{\partial v} + ep\right),$$

$$\mathrm{D}'_\mathrm{B} = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta' \frac{\partial p}{\partial v} + fp\right),$$

$$\mathrm{D}''_\mathrm{B} = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma \frac{\partial p}{\partial u} - \gamma' \frac{\partial p}{\partial v} + gp\right),$$

e, f et g désignant les coefficients de l'élément linéaire de la représentation sphérique de (A), α, α', β, β', γ et γ' les symboles de Christoffel dérivés de cet élément linéaire.

Si enfin dans l'équation (4) on remplace D_B, D'_B et D''_B par les expressions qui précèdent, il vient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{D}_\mathrm{A}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma \frac{\partial p}{\partial u} - \gamma' \frac{\partial p}{\partial v} + gp\right) - 2\,\mathrm{D}'_\mathrm{A}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta' \frac{\partial p}{\partial v} + fp\right) \\ &\qquad + \mathrm{D}''_\mathrm{A}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial u} - \alpha' \frac{\partial p}{\partial v} + ep\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre d'où dépend la recherche d'une surface (B) associée à une surface donnée (A). *Elle a pour caractéristiques les asymptotiques de* (A).

On a d'ailleurs

$$x_1 = p\mathrm{X} + \frac{\dfrac{\partial p}{\partial u}\left(\mathrm{Z}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial v} - \mathrm{Y}\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial v}\left(\mathrm{Y}\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u} - \mathrm{Z}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u}\right)}{h},$$

avec les expressions analogues pour y_1 et z_1.

Ainsi :

Toute solution p de l'équation (5) *détermine :*

1° *Une surface* (B) *associée à* (A) ;

2° *Deux surfaces* (M) *et* (N) *correspondant respectivement à* (A) *et* (B) *par orthogonalité des éléments;*

3° *Quatre couples de surfaces applicables dont la construction est bien connue;*

4° *Enfin, une déformation infinitésimale des surfaces* (A), (B), (M) *et* (N) *définie par les relations*

$$(A')\quad \begin{cases} x' = x + \varepsilon\xi, \\ y' = y + \varepsilon\eta, \\ z' = z + \varepsilon\zeta, \end{cases} \qquad (B')\quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + \varepsilon_1\xi_1, \\ y'_1 = y_1 + \varepsilon_1\eta_1, \\ z'_1 = z_1 + \varepsilon_1\zeta_1; \end{cases}$$

$$(M')\quad \begin{cases} \xi' = \xi - \varepsilon_2 x, \\ \eta' = \eta + \varepsilon_2 y, \\ \zeta' = \zeta + \varepsilon_2 z, \end{cases} \qquad (N')\quad \begin{cases} \xi'_1 = \xi_1 + \varepsilon_3 z_1, \\ \eta'_1 = \eta_1 + \varepsilon_3 y_1, \\ \zeta'_1 = \zeta_1 + \varepsilon_3 z_1. \end{cases}$$

L'équation (5) admet pour solution particulière le cosinus de l'angle de la normale en A à (A) avec une direction fixe quelconque.

Pour cette solution, l'associée de (A) se réduit à un point fixe B; la surface (M) est un plan et la déformation correspondante de (A) consiste dans une rotation autour de OB, suivie d'une translation. La surface est donc simplement déplacée, mais non déformée. A toute autre solution de l'équation (3) correspond une déformation effective de (A).

4. Des relations (1) et (2) on tire

$$dx = \frac{Y\,d\zeta - Z\,d\eta}{p}, \qquad dx_1 = \frac{Y\,d\zeta_1 - Z\,d\eta_1}{q},$$

où $q = \sum x X$ désigne la distance de l'origine au plan tangent en A à (A), avec des expressions analogues pour les différentielles des autres coordonnées.

Donc le point M_1, qui a pour coordonnées

$$\frac{X}{p}, \quad \frac{Y}{p}, \quad \frac{Z}{p},$$

définit une surface (M_1) associée à M; *c'est la polaire réciproque de* (B) *par rapport à l'origine.*

De même l'associée de (N) est la polaire réciproque de (A) par rapport à l'origine.

5. Par des calculs très simples, on obtient, pour les coefficients

de forme des surfaces (M), (N), (A'), etc., les expressions suivantes :

$$D_M = \frac{p}{bh}(D_A D'_B - D'_A D_B),$$

$$D'_M = \frac{p}{bh}(D_A D''_B - D'_A D'_B) = \frac{p}{bh}(D'_A D'_B - D''_A D_B),$$

$$D''_M = \frac{p}{bh}(D'_A D''_B - D''_A D'_B);$$

$$D_N = \frac{bq}{ap} D_S,$$

$$D'_N = \frac{bq}{ap} D'_S,$$

$$D''_N = \frac{bq}{ap} D''_S;$$

$$D_{A'} = D_A + \frac{\varepsilon b}{p} D_M,$$

$$D'_{A'} = D'_A + \frac{\varepsilon b}{p} D'_M,$$

$$D''_{A'} = D''_A + \frac{\varepsilon b}{p} D''_M;$$

$$D_{B'} = D_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D_M,$$

$$D'_{B'} = D'_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D'_M,$$

$$D''_{B'} = D''_B + \frac{\varepsilon_1 b}{p} D''_M;$$

$$D_{M'} = D_M + \frac{\varepsilon_2 b}{p} D_A,$$

$$D'_{M'} = D'_M + \frac{\varepsilon_2 b}{p} D'_A,$$

$$D''_{M'} = D''_M = \frac{\varepsilon_2 b}{p} D''_A;$$

$$D_{N'} = D_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D_B,$$

$$D'_{N'} = D'_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D'_B,$$

$$D''_{N'} = D'_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D''_B,$$

où l'on a posé

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{OA},$$
$$b = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \overline{OB}.$$

Soient d'abord u et v les paramètres du réseau conjugué commun à (A) et (B). On aura

$$D'_A = D'_B = 0$$

et, par suite,

$$D_M = D''_M = D_N = D''_N = 0.$$

Donc *au réseau conjugué commun aux deux surfaces associées* (A) *et* (B) *correspondent les asymptotiques des surfaces* (M) *et* (N).

Soient maintenant u et v les paramètres des asymptotiques de (A). On aura

$$D_A = D''_A = D'_B = D'_M = D'_N = D'_{B'} = D'_{N'} = 0;$$

on peut donc énoncer la proposition suivante :

Aux asymptotiques de (A) *correspondent : les réseaux conjugués des surfaces* (B) *et* (N) *qui restent conjugués dans la déformation infinitésimale correspondante de ces deux surfaces; un réseau conjugué sur* (M); *les asymptotiques de la surface* (N_1) *associée à* (N).

On a

$$D_{A'} D''_{B'} - D'_{A'} D'_{B'} + D''_{A'} D_{B'} = 0.$$

Donc aux asymptotiques de (A') *correspond sur* (B') *un réseau conjugué et inversement.*

6. Reprenons enfin les équations (3)

$$\xi - \xi_1 = yz_1 - y_1 z,$$
$$\eta - \eta_1 = zx_1 - z_1 x,$$
$$\zeta - \zeta_1 = xy_1 - x_1 y.$$

La normale en M à (M) étant parallèle à OB et la normale en N à (N) étant parallèle à OA, ces équations montrent que (M) et (N) sont les deux nappes de la surface focale de la congruence

engendrée par la droite MN ; et, comme les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, on a immédiatement la proposition suivante de Ribaucour :

Considérons une déformation infinitésimale d'une surface (A) *et, par chaque point* A *de* (A), *menons, dans le plan tangent à cette surface, la droite perpendiculaire au déplacement que subit le point* A *dans la déformation; les droites ainsi construites forment une congruence telle que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.*

On a, d'ailleurs,

$$\mathrm{S}(\xi - \xi_1)^2 = \mathrm{S}(yz_1 - y_1 z)^2$$

ou

$$\overline{\mathrm{MN}} = ab \sin \mathrm{V},$$

V étant l'angle des directions OA et OB.