BULLETIN DE LA S. M. F.

M. BRION
D. LUNA

Sur la structure locale des variétés sphériques

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 211-226
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__211_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 211-226.

SUR LA STRUCTURE LOCALE DES VARIÉTÉS SPHÉRIQUES

PAR

M. BRION et D. LUNA (*)

RÉSUMÉ. — Soit X une variété algébrique normale sur laquelle opère un groupe algébrique réductif G; une telle variété est appelée « sphérique » si un sous-groupe de Borel de G a une orbite ouverte dans X. Soit T un tore maximal de G et soit $x \in X$ un point fixé par T (il n'y a qu'un nombre fini de tels x). Nous décrivons l'opération de certains sous-groupes paraboliques de G contenant T, dans un voisinage ouvert affine de x dans X. Nous appliquons ensuite ce résultat à l'étude des décompositions cellulaires de X associées à l'opération de T.

ABSTRACT. — Let X be a normal algebraic variety on which operates a reductive algebraic group G; such a variety is called "spherical" if a Borel subgroup of G has an open orbit in X. Let T be a maximal torus in G, and let $x \in X$ be fixed by T (there are only finitely many such x). We describe the action of certain parabolic subgroups of G containing T, on an open affine neighborhood of x in X. We apply this to study the cellular decompositions of X associated with the action of T.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe, et soit X une G-variété algébrique normale (le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle). Nous dirons que X est *sphérique* si un — et par conséquent tout — sous-groupe de Borel de G a une orbite dense dans X.

Soit T un tore maximal de G et soit X une G-variété sphérique. Le résultat principal de ce travail concerne la structure locale de l'opération de G au voisinage d'un point fixe x de T dans X. Nous montrons (*voir* 1.5) qu'il existe des sous-groupes paraboliques P de G possédant les propriétés suivantes :

(1) P contient T;

(2) P_x (le sous-groupe d'isotropie de P en x) est réductif;

(*) Texte reçu le 7 avril 1986

M. BRION et D. LUNA, Institut Fourier, B P n 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex (France).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/02 211 16 $ 3.60
© Gauthier-Villars

(3) quelles que soient les sous-P_x-variétés affines A de G et S de X vérifiant certaines conditions de transversalité (pour les détails *voir* 1.1 et 1.2), le morphisme naturel $P *_{P_x} (A \times S) \to X$ est une immersion ouverte (ici $P *_{P_x} (A \times S)$ désigne la P-variété affine, espace total du fibré associé au fibré principal $P \to P/P_x$, de fibre type $A \times S$).

Lorsque G_x est un sous-groupe parabolique de G, il n'y a qu'un seul sous-groupe parabolique P de G qui vérifie (1) et (2) (celui qui est opposé à G_x) et on retombe sur un résultat de [4], § 1.

Notre principale motivation pour trouver l'énoncé ci-dessus a été l'article [7] de C. DE CONCINI-T. A. SPRINGER, article dans lequel sont étudiées les décompositions cellulaires (à la BIALYNICKI-BIRULA, *voir* [2]) de certaines compactifications des espaces symétriques adjoints (*voir* aussi [6]). Dans la deuxième partie de notre travail, nous expliquons comment on peut adapter, grâce à ce qui précède, quelques-uns de leurs énoncés au cadre plus général des variétés sphériques.

Nous remercions C. De Concini, C. Procesi et T. A. Springer de nous avoir communiqué leurs résultats.

1

Soit G un groupe algébrique réductif connexe, et soit X une G-variété algébrique normale et irréductible, le corps de base k étant algébriquement clos et de caractéristique nulle.

1.1. Soit $x \in X$. On dira qu'une sous-variété (localement fermée) S de X est transverse à $G.x$ en x si :

(1) S est affine, normale et irréductible;

(2) $S \cap G.x = \{x\}$;

(3) le morphisme $G \times S \to X$ (donné par l'opération de G dans X) est lisse en $(1, x)$.

LEMME. — *Soit H un sous-groupe réductif de G_x. Il existe des sous-variétés de X transverses à $G.x$ en x et stables par H.*

Preuve. — D'après un résultat de SUMIHIRO [18], quitte à remplacer X par un voisinage ouvert G-stable de x dans X, et G par un revêtement fini, on peut supposer X plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}(V)$, où V est un G-module rationnel de dimension finie. Puisque l'opération de H

dans V est complètement réductible, on peut trouver un sous-espace vectoriel W de V, stable par H et vérifiant :

$$(*) \qquad T_x G.x \oplus T_x \mathbf{P}(W) = T_x \mathbf{P}(V).$$

Posons $S' = \mathbf{P}(W) \cap X$: c'est un fermé de X qui contient x et qui est stable par H. De $(*)$ résulte que $G \times \mathbf{P}(W) \to \mathbf{P}(V)$ est lisse en $(1, x)$. Puisque le carré

$$\begin{array}{ccc} G \times S' & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times \mathbf{P}(W) & \to & \mathbf{P}(V) \end{array}$$

est cartésien, il s'ensuit que $G \times S' \to X$ est lisse en $(1, x)$, d'où il résulte en particulier que x est un point normal de S'. De $(*)$ suit aussi que x est un point isolé de $\mathbf{P}(W) \cap G.x$ (et donc aussi de $S' \cap G.x$). L'opération de H dans S' étant géométriquement réductive ([15], p. 145), on peut trouver un voisinage S de x dans S', stable par H et vérifiant (1), (2) et (3) (quitte à choisir S assez petit, on peut même obtenir que $G \times S \to X$ soit lisse partout).

1.2. Soit T un tore maximal de G. Notons ${}^T X$ l'ensemble des points fixes de T dans X. Soit $x \in {}^T X$.

Soit P un sous-groupe parabolique de G vérifiant les hypothèses suivantes :

(1) $T \subset P$;

(2) P_x est réductif;

(3) P a une orbite ouverte dans X.

Désignons par Q le sous-groupe parabolique de G qui est opposé à P et qui contient T. Les hypothèses (1) et (2) impliquent que la composante neutre de G_x est contenue dans Q.

Pour tout groupe algébrique affine H, notons H^u son radical unipotent. Puisque P_x (qui contient T) normalise Q^u et $(G_x)^u$, il est bien connu ([17], 10.1.2) qu'on peut trouver une sous-P_x-variété A de Q^u telle que la multiplication $A \times (G_x)^u \to Q^u$ soit un isomorphisme.

Soit S une sous-P_x-variété de X transverse à $G.x$ en x. Notons $P *_{P_x} (A \times S)$ le quotient de $P \times A \times S$ sous l'opération de P_x définie par

$$p(q, a, s) = (qp^{-1}, pap^{-1}, ps)$$

$(p \in P_x,\ (q,\ a,\ s) \in P \times A \times S)$: c'est la P-variété algébrique affine dont l'algèbre des fonctions régulières est composée des fonctions régulières sur $P \times A \times S$ invariantes sous P_x. L'application naturelle

$$P \times A \times S \to X$$

passe au quotient en un P-morphisme de variétés algébriques

$$\varphi : \quad P *_{P_x} (A \times S) \to X.$$

LEMME. — *Soit P un sous-groupe parabolique de G vérifiant les hypothèses* (1), (2), (3) *ci-dessus. Alors quelles que soient les P_x-variétés A et S comme ci-dessus, le P-morphisme φ est étale.*

Preuve. — Notons z l'image de $(1,\ 1,\ x) \in P \times A \times S$ dans $P *_{P_x} (A \times S)$. Montrons d'abord que φ est étale en z.

D'après la définition de S et puisque $P \times Q^u \to G$ est une immersion ouverte, le morphisme naturel $P \times Q^u \times S \to X$ est lisse en $(1,\ 1,\ x)$. Il n'est pas difficile de voir que le morphisme composé

$$P \times A \times S \to P \times Q^u \times S \to X$$

reste lisse en $(1,\ 1,\ x)$ (par exemple en utilisant la caractérisation des morphismes lisses au moyen des anneaux locaux complétés, *voir* [8], § 17.5). Comme $P \times A \times S \to P *_{P_x} (A \times S)$ est lisse, il s'ensuit que φ est lisse et donc étale en z, les variétés source et but de φ ayant même dimension.

Par hypothèse P a une orbite ouverte dans X. Puisque φ est étale en z, P a aussi une orbite ouverte dans $P *_{P_x} (A \times S)$ d'où il suit que P_x a une orbite ouverte dans $A \times S$. Comme $A \times S$ est affine et P_x réductif, le point fixe $(1,\ x)$ est l'unique orbite fermée de P_x dans $A \times S$, d'où il résulte que le seul ouvert P-stable de $P *_{P_x} (A \times S)$ qui contient z est $P *_{P_x} (A \times S)$ tout entier. Il s'ensuit que φ est étale partout.

Remarque. — Avec les hypothèses et les notations du lemme précédent, il n'est pas vrai en général que φ soit une immersion ouverte. Voici un exemple simple : $G = SL(2)$, $T =$ le tore standard de $SL(2)$, $X = \mathbb{P}(S^3 k^2)$, $x = ku^2 v$ (où $u,\ v$ est la base canonique de k^2); toutes les hypothèses du lemme sont vérifiées pour $P = G$, mais aucun des φ construit avec la recette du lemme n'est une immersion ouverte.

1.3. Soit $G \to GL(V)$ une représentation rationnelle de dimension finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $S^n V$ la puissance symétrique n-ième de V (et pour tout $v \in V$, on écrira v^n pour la puissance n-ième de v, $v^n \in S^n V$). Si w est un vecteur non nul de $S^n V$, on notera $\bar{w}$ le point de $\mathbb{P}(S^n V)$ en-dessous de w.

Soit T un tore maximal de G. Notons $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl et $X(T)$ le groupe des caractères de T. Pour tout $\alpha \in X(T)$ désignons par M_α un G-module rationnel simple qui contient un vecteur $v_\alpha \neq 0$ vérifiant : v_α est vecteur propre de T de poids α et $G_{\bar{v}_\alpha}$ est un sous-groupe parabolique de G. Il est bien connu que $M_\alpha \simeq M_\beta$ si et seulement si $\alpha \in W.\beta$, et que $M_\alpha' \simeq M_{-\alpha}$. Notons C_α la sous-variété de $\mathbb{P}(M_\alpha)$ associée au cône des vecteurs primitifs C_α^* de M_α. Il est bien connu que l'algèbre des fonctions régulières sur C_α^* est G-isomorphe à $\oplus_{n \in \mathbb{N}} M_{-n\alpha}$.

LEMME. — *Soit $v \in V - \{0\}$ un vecteur propre de T. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une décomposition $S^n V = M \oplus N$ en deux sous-G-modules, telle que, si w est la projection de v^n sur M le long de N, alors $w \neq 0$ et $G_{\bar{w}}$ est un sous-groupe parabolique de G.*

Preuve. — Supposons que v soit un vecteur propre de poids $\alpha \in X(T)$. Posons

$$C = \mathbb{P}(V) \times C_{-\alpha} \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(M_{-\alpha}) \subset \mathbb{P}(V \otimes M_{-\alpha})$$

(plongement de Segre), et notons C^* le cône de $V \otimes M_{-\alpha}$ correspondant. Le point $v \otimes v_{-\alpha}$ appartient à C^* et est fixé par T; il s'ensuit que son orbite par G dans C^* est fermée (*voir* [12], p. 354). Par conséquent, il existe une fonction régulière G-invariante sur C^*, non nulle en $v \otimes v_{-\alpha}$. Puisque l'algèbre des fonctions régulières sur C^* est isomorphe à

$$\oplus_{n \in \mathbb{N}} S^n V' \otimes M_{n\alpha},$$

il existe $n \in \mathbb{N}$ et une décomposition $S^n V = M \oplus N$ en deux G-modules, avec $M \simeq M_{n\alpha}$, tels que la projection w de v^n sur M le long de N soit non nulle. Comme w est un vecteur propre de T dans $M \simeq M_{n\alpha}$ de poids $n\alpha$, $G_{\bar{w}}$ est nécessairement un sous-groupe parabolique de G (qui est égal à G lorsque $\dim M_\alpha = 1$).

Remarque. — On peut déduire le lemme précédent aussi de la théorie de l'instabilité (*voir* [9] ou [11], § 12); l'hypothèse « v vecteur propre de T » est en fait superflue.

1.4. Soient H un groupe algébrique réductif, Z et Z' deux H-variétés algébriques, $\varphi : Z \to Z'$ un H-morphisme algébrique et $z \in Z$. Le lemme suivant est un cas particulier du lemme fondamental de [13] (p. 94, *voir* aussi [1]).

LEMME. — *Supposons que Z et Z' soient affines, qu'il n'existe que les constantes comme fonctions régulières H-invariantes sur Z et Z' (condition remplie, par exemple lorsque H a une orbite dense dans Z et Z'), que φ soit étale en z, que les orbites $H.z$ et $H.\varphi(z)$ soient fermées dans Z et Z', et que φ envoie $H.z$ bijectivement sur $H.\varphi(z)$. Alors φ est un isomorphisme.*

1.5. Supposons maintenant que X est une G-variété sphérique (c'est-à-dire que un — et par conséquent tout — sous-groupe de Borel de G a une orbite ouverte dans X); dans ce cas tout sous-groupe parabolique de G vérifie l'hypothèse (3) de 1.2. Soit T un tore maximal de G et soit $x \in {}^T X$.

THÉORÈME. — *Il existe des sous-groupes paraboliques P de G possédant les propriétés suivantes :*

(1) *P contient T;*

(2) *P_x est réductif;*

(3) *quels que soient A et S comme dans* 1.2, *le morphisme naturel $P *_{P_x} (A \times S) \to X$ est une immersion ouverte.*

Preuve. — Quitte à rétrécir X, on peut supposer que $G.x$ soit la seule orbite fermée de G dans X (car G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X, *voir* [14], p. 218). Grâce au résultat de Sumihiro déjà utilisé [18], on peut alors considérer X comme plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ dans lequel G opère. Quitte à passer à un revêtement fini de G, on peut supposer que l'opération de G se relève en une opération linéaire dans V.

Notons x^* un point de $V - \{0\}$ au-dessus de x. D'après 1.3, quitte à remplacer V par $S^n V$ et $X \to \mathbb{P}(V)$ par $X \to \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^n V)$ (plongement de Véronèse), on peut supposer qu'il existe une décomposition $V = M \oplus N$ en sous-G-modules qui vérifie : M est simple, la projection v de x^* sur M le long de N est non nulle et G_v est un sous-groupe parabolique de G.

Notons M' le G-module dual de M. Désignons par C la sous-variété de $\mathbb{P}(M')$ correspondant au cône des vecteurs primitifs de M'. Soit y le point de C dont le groupe d'isotropie G_y contient T et est un sous-groupe parabolique de G opposé à G_v. Posons $P = G_y$; par construction, on a $T \subset P$.

Désignons par $\bar{X}$ l'adhérence de X dans $\mathbb{P}(V)$. On a $\bar{X} \times C \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(M') \subset \mathbb{P}(V \otimes M')$ (plongement de Segre). Notons l la forme linéaire naturelle

$$V \otimes M' = (M \oplus N) \otimes M' \to M \otimes M' \to k,$$

et posons

$$(\bar{X} \times C)_0 = (\bar{X} \times C) - \mathbb{P}(l^{-1}(0)) :$$

c'est un ouvert affine G-stable de $\bar{X} \times C$. Puisque T fixe (x, y), l'orbite $G.(x, y)$ est fermée dans $(\bar{X} \times C)_0$, donc affine. Les espaces homogènes affines des groupes réductifs ayant des groupes d'isotropie réductifs, il s'ensuit que $G_{(x,y)} = P_x$ est réductif.

Soient A et S comme dans 1.2. Considérons l'application naturelle

$$G \times A \times S \to X \times C :$$

$$(g, a, s) \mapsto (gas, gy)$$

elle passe au quotient en un G-morphisme

$$\psi : \quad G *_{P_x} (A \times S) \to X \times C.$$

L'image de ψ est contenue dans $(X \times C)_0 = (X \times C) - \mathbb{P}(l^{-1}(0))$: il suffit de voir que $X \times \{y\} \subset (X \times C)_0$, et cette inclusion résulte de ce que toute orbite de P dans X contient x dans son adhérence (*voir* 1.2) et de ce que $(x, y) \in (X \times C)_0$.

Montrons que ψ est étale : cela résulte de ce que $\varphi : P *_{P_x} (A \times S) \to X$ l'est (*voir* 1.2) et de ce que la restriction de ψ à

$$(Q^u P) *_{P_x} (A \times S) \simeq Q^u \times [P *_{P_x} (A \times S)]$$

est égale à $1 \times \varphi$, suivie de l'isomorphisme $Q^u \times X \to Q^u \times X$ $((q, z) \mapsto (q, qz))$, suivie de l'immersion ouverte $Q^u \times X \to X \times C$ $((q, z) \mapsto (z, qy))$.

Puisque P a une orbite ouverte dans X, G a une orbite ouverte dans $(\bar{X} \times C)_0$. Comme ψ est étale, G a aussi une orbite ouverte dans $G *_{P_x} (A \times S)$. On voit facilement que

$$\psi : \quad G *_{P_x} (A \times S) \to (\bar{X} \times C)_0$$

vérifie aussi les autres hypothèses de 1.4; il s'agit donc d'un isomorphisme. D'où en particulier que $(X \times C)_0 = (\bar{X} \times C)_0$. La dernière assertion du théorème découle alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(X \times \{y\}) & \xrightarrow{\psi} & X \times \{y\} \\ \wr & & \wr \\ P *_{P_x}(A \times S) & \xrightarrow{\varphi} & X. \end{array}$$

1.6. Conservons les notations du théorème. Si G_x est un sous-groupe parabolique de G (c'est-à-dire si l'orbite $G.x$ est une variété projective), le seul sous-groupe parabolique P de G qui vérifie les conditions (1) et (2) du théorème, est celui qui est opposé à G_x et qui contient T. Dans ce cas $A = \{1\}$ et on se trouve proche du résultat 1.4 de [4].

Rappelons ce résultat.

PROPOSITION. — *Soit X une G-variété algébrique normale quelconque (non nécessairement sphérique) et soit $x \in X$. On suppose que G_x est un sous-groupe parabolique de G. Pour tout sous-groupe parabolique P de G opposé à G_x, il existe alors une sous-P_x-variété (localement fermée) affine W de X contenant x et telle que l'application naturelle $P^u \times W \to X$ soit une immersion ouverte.*

Indiquons comment on peut adapter la preuve du théorème pour retrouver cette proposition.

Grâce au résultat de Sumihiro utilisé déjà plusieurs fois [18], il suffit de considérer le cas $X = \mathbb{P}(V)$, où V est un G-module rationnel de dimension finie. Soit $V = M \oplus N$ une décomposition en sous-G-modules vérifiant : M est simple et $x \in \mathbb{P}(M)$. Soit $V' = M' \oplus N'$ la décomposition correspondante du G-module dual. Notons C l'unique orbite fermée de G dans $\mathbb{P}(M')$, et soit $y \in C$ tel que $G_y = P$.

Notons $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G. On a

$$V = \mathfrak{G}.x^* \oplus (\mathfrak{G}.y^*)^\perp$$

où $(\mathfrak{G}.y^*)^\perp$ est l'orthogonal dans V de $\mathfrak{G}.y^* \subset V'$ (*voir* [4], 1.1). Posons

$$W = \mathbb{P}(kx^* \oplus (\mathfrak{G}.y^*)^\perp) - \mathbb{P}((ky^*)^\perp);$$

c'est une sous-P_x-variété affine de $\mathbb{P}(V)$. Notons

$$\varphi : \quad P^u \times W \to \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}((k.y^*)^\perp)$$

le morphisme naturel. Nous allons montrer que φ est un isomorphisme. Il suffit clairement de le prouver lorsque $N = \{0\}$.

Supposons donc $V = M$, et considérons l'application

$$G \times W \to \mathbb{P}(M) \times C$$
$$(g, w) \mapsto (gw, g.y);$$

elle passe au quotient en un G-morphisme

$$\psi : \quad G *_{P_x} W \to \mathbb{P}(M) \times C.$$

Considérons $\mathbb{P}(M) \times C$ comme plongé dans $\mathbb{P}(M \otimes M')$ et posons $(\mathbb{P}(M) \times C)_0 = (\mathbb{P}(M) \times C) - \mathbb{P}(l^{-1}(0))$, où $l : M \otimes M' \to k$ est la forme linéaire canonique. On montre alors comme dans la preuve du théorème que l'image de ψ est contenue dans $(\mathbb{P}(M) \times C)_0$ et que

$$\psi : \quad G *_{P_x} W \to (\mathbb{P}(M) \times C)_0$$

vérifie toutes les conditions de 1.4 [ici P n'a pas une orbite dense dans $\mathbb{P}(M)$, mais l'ensemble des $z \in \mathbb{P}(M)$ tels que $\overline{P.z} \ni x$ est dense dans $\mathbb{P}(M)$!]; il s'agit donc d'un isomorphisme. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}((\mathbb{P}(M) \times \{y\})_0) & \xrightarrow{\bullet} & (\mathbb{P}(M) \times \{y\})_0 \\ \wr & & \wr \\ P^u \times W \simeq P *_{P_x} W & \xrightarrow{\bullet} & \mathbb{P}(M) - \mathbb{P}((k.y^*)^\perp) \end{array}$$

résulte alors que φ est également un isomorphisme.

2

Dans tout ce paragraphe, on désignera par G un groupe algébrique réductif connexe, et par X une G-variété algébrique sphérique.

2.1. Soit B un sous-groupe de Borel de G. Notons X_G^0 (resp. X_B^0) l'orbite ouverte de G (resp. de B) dans X. Nous dirons que (la G-variété sphérique) X est *toroïdale* si l'adhérence de $X_G^0 - X_B^0$ dans X ne contient aucune orbite de G dans X : ce sont elles qui ressemblent le plus, parmi les G-variétés

sphériques, aux plongements toriques. Nous aurons aussi besoin de la condition suivante.

(*) Pour toute orbite Y de G dans X, il existe des orbites Y_i de codimension i de G dans X vérifiant $Y_r = Y$ et $Y_i \subset \overline{Y}_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

LEMME 1. — *On suppose que X est (sphérique) affine et que G a un point fixe dans X. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(1) *X est toroïdale;*

(2) *X vérifie la condition (*);*

(2') *il existe des fermés irréductibles G-stables F_i de codimension i dans X $(i = 1, \ldots, \dim X)$ tels que $F_i \subset F_{i-1}$;*

(3) *le groupe dérivé de G opère trivialement dans X.*

Preuve. — (1) $\Rightarrow$ (3). Puisque G a une orbite ouverte dans X qui est affine, le point fixe est l'unique orbite fermée de G dans X. Par suite, toute orbite de B dans X contient ce point fixe dans son adhérence. De (1) suit alors que $X_G^0 = X_B^0$. Cette dernière orbite est affine, comme espace homogène sous un groupe résoluble. Par conséquent, pour tout $x \in X_G^0$, G_x est réductif (comme groupe d'isotropie d'un espace homogène affine sous un groupe réductif), et $BG_x = G$. On sait que ces conditions impliquent que le groupe dérivé de G est contenu dans G_x (*voir* [4], 3.4, lemme), d'où (3).

Il est clair que (2) $\Rightarrow$ (2').

(2') $\Rightarrow$ (3). On déduit de (2') qu'il existe des orbites Y_i de codimension i de G dans X $(i = 0, \ldots, \dim X)$ vérifiant $Y_i \subset \overline{Y_{i-1}}$. Soit $x \in Y_i$. Supposons que le groupe dérivé de G est contenu dans G_x. Le groupe G_x étant alors réductif, on peut choisir une sous-G_x-variété S de X transverse à Y_i en x (1.1). Le morphisme $G *_{G_x} S \to X$ est étale (1.2). On en déduit que $S \cap Y_{i-1}$ est une G_x-variété de dimension 1 de S et que $((G_x)_y)^0 = (G_y)^0$, quel que soit $y \in S \cap Y_{i-1}$. Puisque $G_x/(G_x)_y$ est quasi-affine de dimension 1 et que G_x est réductif, le groupe dérivé de $(G_x)^0$ est contenu dans $(G_x)_y$. Il s'ensuit que le groupe dérivé de G est contenu dans G_y. On montre ainsi, par récurrence descendante, que le groupe dérivé de G est contenu dans l'isotropie de Y_0, d'où (3).

Que (3) $\Rightarrow$ (1) est évident. Que (3) $\Rightarrow$ (2) résulte des propriétés bien connues des plongements toriques (*voir* [10], [5]).

LEMME 2. — *Soit $x \in X$ tel que l'orbite $G.x$ soit une variété projective, et soient P et W comme dans* 1.6. *Si X est toroïdale, alors la P_x-variété W*

vérifie les conditions du lemme 1, *et toute orbite de G dans X qui rencontre W, coupe W suivant une orbite de* P_x.

Preuve. — Du fait que $P^u \times W \to X$ est une immersion ouverte et de l'hypothèse que X est une G-variété sphérique toroïdale, on déduit aussitôt que W est une P_x-variété sphérique toroïdale. D'après le lemme 1, le groupe dérivé de P_x opère alors trivialement dans W. Soient $W_1, \ldots, W_r$ les différents fermés irréductibles P_x-stables de codimension 1 dans W. Posons $X_i = \overline{P^u W_i}$. On a $X_i \cap W = W_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Les sous-variétés X_i sont irréductibles, stables par P, de codimension 1 dans X et contiennent $G.x$. Puisqu'on suppose X toroïdal, il s'ensuit que $X_i \cap X_G^0 = \varnothing$. On en déduit que les X_i sont stables par G. Soit F un fermé irréductible P_x-stable de W. D'après la théorie des plongements toriques ([10], [5]), il existe $i_1, \ldots, i_s \in \{1, r\}$ tels que $F = W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_s}$. On a :

$$(G.F) \cap W \subset X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_s} \cap W = W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_s} = F,$$

d'où $(G.F) \cap W = F$. Pour toute orbite Y de P_x dans W, on a alors $(G.\bar{Y}) \cap W = \bar{Y}$ et $(G.(\bar{Y} - Y)) \cap W = \bar{Y} - Y$, d'où $(G.Y) \cap W = Y$, ce qui termine la preuve du lemme 2.

LEMME 3. — *Toute G-variété toroïdale complète X vérifie la condition* (*).

Preuve. — Soit Y une orbite de G dans X. Choisissons $x \in \bar{Y}$ tel que l'orbite $G.x$ soit fermée, donc une variété projective. Soient P *et* W comme dans 1.6. D'après les lemmes 1 et 2, il existe des orbites W_i de codimension i $(i = 1, \ldots, r)$ de P_x dans W vérifiant $W_r = Y \cap W$ et $W_i \subset \overline{W_{i-1}}$. D'après le lemme 2, les $Y_i = GW_i$ sont alors des orbites de codimension i de G dans X vérifiant $Y_r = Y$ et $Y_i \subset \overline{Y_{i-1}}$.

LEMME 4. — *Si X est toroïdale et complète, alors tout fermé irréductible G-stable Y de X est une sous-variété normale.*

Preuve. — Choisissons $x \in Y$ tel que l'orbite $G.x$ soit fermée, donc une variété projective. Soient P et W comme dans 1.6. On a $Y \cap (P^u W) \simeq P^u \times Z$, où Z est un fermé irréductible P_x-stable de W. Le lemme 4 résulte alors aussitôt du lemme 2 et des propriétés bien connues des plongements toriques ([10], [5]).

Remarque. — On peut montrer plus généralement que tout fermé irréductible G-stable d'une G-variété sphérique (resp. toroïdale) est une G-variété sphérique (resp. toroïdale).

PROPOSITION. — *Soit T un tore maximal de G, soit $x \in {}^T X$, et soient P, A, S comme dans 1.5. Si X est toroïdale et complète, alors toute orbite de G dans X qui rencontre S, coupe S suivant une orbite de T.*

Preuve. — Du fait que $P *_{P_x} (A \times S) \to X$ est une immersion ouverte, on déduit que $A \times S$ et S sont des $(P_x)^0$-variétés sphériques (attention, P_x n'est pas nécessairement connexe!). Pour toute orbite Y de G dans X, $\bar{Y}$ est une variété normale (*voir* lemme 4). Comme $P *_{P_x} (A \times S) \to X$ est une immersion ouverte, $S \cap \bar{Y}$ est encore une variété normale. Puisque S est une $(P_x)^0$-variété sphérique affine, x est contenu dans toute composante irréductible de $S \cap \bar{Y}$, d'où il suit que $S \cap \bar{Y}$ est irréductible. Puisqu'on suppose X toroïdal complet, d'après le lemme 3, il vérifie la condition (*) : soient Y_i des orbites de codimension i ($i = 1, \ldots, r$) de G dans X vérifiant $G.x = Y_r$ et $Y_i \subset \overline{Y_{i-1}}$. D'après ce qui précède, les $S \cap \bar{Y}_i$ sont des fermés irréductibles P_x-stables de codimension i dans S, $i = 1, \ldots, r = \dim S$, vérifiant $S \cap \bar{Y}_i \subset S \cap \overline{Y_{i-1}}$. D'après le lemme 1, le groupe dérivé de $(P_x)^0$ opère donc trivialement dans S. Il s'ensuit que T a une orbite ouverte S_T^0 dans S. Soient $S_1, \ldots, S_m$ les différentes composantes irréductibles de $S - S_T^0$. Posons $X_i = \overline{PAS_i}$: c'est un fermé P-stable, *a priori* non nécessairement irréductible, mais pur de codimension 1 dans X. Puisque toute composante irréductible de X_i contient $G.x$ et qu'on suppose X toroïdal, on en déduit que les X_i sont stables par G. Soit Y une orbite de G dans X dont l'adhérence $\bar{Y}$ est une composante irréductible de X_i contenant S_i. On a $X_i = \overline{PAS_i} \subset \bar{Y}$, d'où il suit que $X_i = \bar{Y}$ est irréductible. Il en résulte que $X_i \cap S = P_x S_i$ est irréductible (*voir* plus haut), d'où $X_i \cap S = S_i$. On termine alors la preuve de la proposition comme celle du lemme 2.

Remarque. — Il y a d'autres propriétés des plongements toriques qu'on peut étendre, grâce à 1.5, aux G-variétés toroïdales : par exemple, dans une G-variété toroïdale lisse, l'adhérence de toute orbite de G est lisse, les fermés irréductibles G-stables de codimension 1 (qui sont donc lisses) se coupent transversalement, ... (*voir* aussi [6], [7]).

2.2. Soit Z une G-variété algébrique normale. Pour tout $z \in {}^G Z$, on notera $Z(G, z)$ l'ensemble des $z' \in Z$ tels que $\overline{G.z'} \ni z$: c'est une sous-G-variété affine de Z. Soit Z' une autre G-variété algébrique normale et soit $\varphi : Z \to Z'$ un G-morphisme algébrique; il est clair que φ envoie $Z(G, z)$ dans $Z'(G, \varphi(z))$, quel que soit $z \in {}^G Z$.

LEMME. — *Si φ est lisse en $z \in {}^{G}Z$, alors il existe des G-morphismes algébriques $\sigma : Z'(G, \varphi(z)) \to Z(G, z)$ tels que $\varphi \circ \sigma$ soit l'identité de $Z'(G, \varphi(z))$.*

Preuve. — Quitte à remplacer Z et Z' par des voisinages G-stables de z et $\varphi(z)$ convenables, on peut supposer que Z et Z' sont affines [18]. On peut alors trouver, grâce à la réductivité linéaire de G, des fonctions régulières $f_1, \ldots, f_r$ sur Z vérifiant :

(1) $f_1, \ldots, f_r$ sont nulles en z;

(2) l'espace vectoriel engendré par $f_1, \ldots, f_r$ est stable par G;

(3) le morphisme φ induit un isomorphisme

$$\hat{\mathcal{O}}_{Z,z} \xleftarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{Z',\varphi(z)}[[f_1, \ldots, f_r]].$$

Notons Z'' la sous-G-variété de Z définie par les équations $f_1 = \ldots = f_r = 0$. Le morphisme $\varphi : Z'' \to Z'$ est étale en z. Du lemme fondamental de [13], p. 94, résulte alors que $\varphi : Z''(G, z) \to Z'(G, z)$ est un isomorphisme. Puisque $Z''(G, z)$ est une sous-G-variété fermée de $Z(G, z)$, le lemme est démontré.

Supposons maintenant que $G = T$ soit un tore. Notons $X_*(T)$ l'ensemble des sous-groupes à 1 paramètre multiplicatif de T. Pour $z \in {}^{T}Z$ et $\lambda \in X_*(T)$ posons

$$Z(\lambda, z) = \{ z' \in Z, \lim_{t \to 0} \lambda(t) z' = z \};$$

c'est une sous-T-variété fermée de $Z(T, z)$. Si $\varphi : Z \to Z'$ est lisse en $z \in {}^{T}Z$, il résulte aussitôt du lemme précédent que

$$\varphi(Z(\lambda, z)) = Z'(\lambda, \varphi(z)).$$

Soit X une G-variété sphérique complète. Fixons un tore maximal T de G. L'ensemble ${}^{T}X$ est fini (car G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X, et T n'a qu'un nombre fini de points fixes dans tout espace homogène sous G).

Une variété complète dans laquelle un tore opère en fixant seulement un nombre fini de points, possède des « décompositions cellulaires » [2]. Rappelons comment on les définit : on choisit $\lambda \in X_*(T)$ en « position suffisamment générale » pour que k^* opérant dans X à travers λ ait les mêmes points fixes que T; alors X est la réunion disjointe des $X(\lambda, x)$,

$x \in {}^T X$. On appelle les $X(\lambda, x)$, $x \in {}^T X$, les cellules de la décomposition cellulaire; si X est lisse, les cellules sont des espaces affines (pour tout cela, *voir* [2]).

Désignons par $G(\lambda)$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $\lim_{t \to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1}$ existe dans G. Il est bien connu que $G(\lambda)$ est un sous-groupe parabolique de G (*voir* [15], p. 57). Lorsque λ est en « position générale », alors $G(\lambda)$ est même un sous-groupe de Borel de G, et on a $\lim_{t \to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \in T$ quel que soit $g \in G(\lambda)$; dans ce cas, les cellules $X(\lambda, x)$, $x \in {}^T X$, sont manifestement stables par $G(\lambda)$.

2.3. Soit X une G-variété sphérique complète et soit T un tore maximal de G. On fixe $\lambda \in X_*(T)$ en « position suffisamment générale » pour que la décomposition cellulaire $X(\lambda, x)$, $x \in {}^T X$ de X soit bien définie et pour que $G(\lambda) = B$ soit un sous-groupe de Borel de G (*voir* 2.2). La proposition suivante généralise [7], § 4.

PROPOSITION. — *Si X est toroïdale, alors l'intersection de chaque cellule avec chaque orbite de G ou bien est vide, ou bien est une orbite de B.*

Preuve. — Soit $x \in {}^T X$ et soient P, A, S comme dans 1.5. On pose $P(\lambda) = P \cap G(\lambda) = P \cap B$ et $A(\lambda) = A \cap G(\lambda) = A \cap B$. Du fait que $P \times A \times S \to X$ est lisse, on déduit que $X(\lambda, x) = P(\lambda) A(\lambda) S(\lambda, x)$ (*voir* 2.2). Soit $G.z$ une orbite dans X qui rencontre $X(\lambda, x)$; on peut supposer que $z \in X(\lambda, x) \cap S = S(\lambda, x)$. De la proposition 2.1 résulte alors $X(\lambda, x) \cap G.z = P(\lambda) A(\lambda)(T.z) \subset B.z$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Il existe des G-variétés sphériques, projectives, lisses (non toroïdales) pour lesquelles la conclusion de la proposition précédente est fausse : par exemple, si N est un G-module rationnel de dimension finie vérifiant :

(1) N est une G-variété sphérique;

(2) G a une orbite non affine dans N;

(3) il existe $\lambda \in X_*(G)$ tel que $N(\lambda, 0) = N$;

alors $X = \mathbb{P}(N \oplus k)$ est une telle G-variété. Voici un exemple simple :

$$G = GL(2, k), \qquad N = k^2.$$

2.4. Soit H un sous-groupe sphérique de G (c'est-à-dire un sous-groupe algébrique tel que G/H soit une G-variété sphérique). Soit B un sous-groupe de Borel de G. Dans [3] a été démontré que B n'a qu'un nombre

fini d'orbites dans G/H (ou, ce qui revient au même, que H n'a qu'un nombre fini d'orbites dans G/B, ou que les doubles classes de G sous $B \times H$ sont en nombre fini). Ce résultat découle aussi de 2.3, puisque d'après [14] G/H peut se plonger dans des G-variétés sphériques complètes et toroïdales. Cette approche (inaugurée par C. DE CONCINI et T. A. SPRINGER dans le cas symétrique, *voir* [7]) permet de dépasser le simple résultat de finitude et aller vers une description des orbites. Précisons un peu.

On se ramène facilement au cas où $N_G(H)/H$ est fini. Dans ce cas, il existe une « compactification » meilleure que les autres de G/H : à savoir, il existe une unique G-variété X possédant les propriétés suivantes (pour le cas particulier symétrique *voir* [6], pour le cas sphérique général cela résulte de [14] et [16]) :

(1) X est (normale sphérique) toroïdale et complète;

(2) X contient G/H comme orbite ouverte;

(3) X ne contient qu'une seule orbite fermée.

D'après 2.3, les orbites de B dans G/H seront décrites si l'on sait expliciter, pour cette G-variété X particulière [et pour un tore maximal T de B et un $\lambda \in X_*(T)$ convenables] les $x \in {}^T X$ dont la cellule $X(\lambda, x)$ rencontre l'orbite ouverte G/H.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARDSLEY (P.) and RICHARDSON (R. W.). – Etale slices for algebraic transformation groups in characteristic *p*, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 51, 1985, p. 295-317.

[2] BIALYNICKI-BIRULA (A.). – Some theorems on actions of algebraic groups, *Ann. of Math.*, vol. 98, 1980, p. 480-497.

[3] BRION (M.). – Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques, *Manuscripta Math.*, 55, 1986, p. 191-198.

[4] BRION (M.), LUNA (D.) and VUST (Th.). – Espaces homogènes sphériques, *Inventiones Math.*, 84, 1986, p. 617-632.

[5] DANILOV (V. I.). – The geometry of toric varieties, *Russian Math. Surveys*, vol. 33 : 2, 1978, p. 97-154.

[6] DE CONCINI (C.) and PROCESI (C.). – Complete symmetric varieties, Proc. Montecatini Conf. on Invariant Theory, 1-44, *Lect. Notes in Math.*, n° 996, Springer-Verlag, 1983.

[7] DE CONCINI (C.) and SPRINGER (T. A.). – *Betti numbers of complete symmetric varieties*, Preprint.

[8] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). – Éléments de Géométrie Algébrique IV, *Publ. Math. de l'I.H.E.S.*, n° 32, 1967.

[9] KEMPF (G.). – Instability in invariant theory, *Ann. of Math.*, vol. 108, 1978, p. 299-316.

[10] KEMPF (G.), KNUDSEN (F.), MUMFORD (D.) and SAINT-DONAT (B.). – Toroidal Embeddings, *Lecture Notes in Math.*, n° 339, Springer-Verlag, 1974.

[11] KIRWAN (F.). – Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry, *Math. Notes*, 31, Princeton Univ. Press, 1984.

[12] KOSTANT (B.). – Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, vol. 85, 1963, p. 327-404.

[13] LUNA (D.). – Slices étales, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire 33, 1973, p. 81-105.

[14] LUNA (D.) and VUST (Th.). – Plongements d'espaces homogènes, *Commentarii Math. Helverici*, vol. 58, 1983, p. 186-245.

[15] MUMFORD (D.) and FOGARTY (J.). – *Geometric invariant theory*, Second enlarged edition, Springer, 1982.

[16] PAUER (F.). – Caractérisation valuative d'une classe de sous-groupes d'un groupe algébrique, 109e *Congrès national des Soc. savantes*, Dijon 1084, sciences, fasc. III, p. 159-166.

[17] SPRINGER (T. A.). – Linear algebraic groups, *Progress in Math.*, n° 9, Birkhäuser, 1981.

[18] SUMIHIRO (H.). – Equivariant completion, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 14, 1974, p. 1-28.