BULLETIN DE LA S. M. F.

CONSTANTIN NĂSTĂSESCU
NICOLAE POPESCU

# Anneaux semi-artiniens

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 96 (1968), p. 357-368
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__357_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Bull. Soc. math. France,*
96, 1968, p. 357 à 368.

# ANNEAUX SEMI-ARTINIENS

PAR

CONSTANTIN NĂSTĂSESCU ET NICOLAE POPESCU.

## 1. Définitions et notations.

Soit $A$ un anneau unitaire quelconque, et soient $M$ un $A$-module à gauche et $N$ un sous-module non nul de $M$. On dit que $M$ est une *extension essentielle* de $N$ si, pour tout sous-module non nul $P$ de $M$, on a $P \cap N \neq 0$. Le $A$-module $M$ est dit *co-irréductible* s'il est extension essentielle de ses sous-modules non nuls. Un sous-module $N$ de $M$ est dit *irréductible* si $M/N$ est co-irréductible.

Dans ce qui suit, on notera par $\mathfrak{R}(A)$ (ou par $\mathfrak{R}$) le radical de Jacobson d'un anneau $A$. Dans [1], on dit que le radical de Jacobson est *T-nilpotent à gauche* (resp. à droite) si, pour toute suite d'éléments $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de $\mathfrak{R}(A)$, il existe un entier $n$ tel que $x_1 x_2 \ldots x_n = 0$ (resp. $x_n x_{n-1} \ldots x_1 = 0$).

Nous dirons qu'un anneau $A$ *remplit la condition* (H) à gauche (resp. à droite) si tout $A$-module à gauche (resp. à droite) non nul contient un sous-module propre maximal. Une caractérisation des anneaux remplissant une telle condition est donnée par Guy RENAULT dans [9].

Si $A$ est un anneau commutatif et $M$ un $A$-module un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ est dit associé à $M$ (au sens de [4], Chap. 4) s'il existe $x \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\, x$. On note par $\mathrm{Ass}(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à $M$.

## 2. Quelques considérations sur les l. c.-anneaux.

Soit $A$ un anneau unitaire quelconque. Dans [8], on dit que la catégorie $\mathrm{Mod}A$ des $A$-modules à gauche est une *l. c.-catégorie* (i. e. une catégorie localement co-irréductible) si tout $A$-module non nul $M$ contient un sous-module co-irréductible non nul. On dit que $A$ est un l. c.-anneau à gauche si $\mathrm{Mod}A$ est une l. c.-catégorie. Dans [8], on donne une caractérisation partielle de ces anneaux.

Jacques FORT dit qu'un $A$-module $M$ est *riche en co-irréductibles* si tout sous-module $N$ non nul contient un sous-module co-irréductible non nul (*voir* [5] et [6]). En tenant compte de ses résultats (*loc. cit.*) et de [8], on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit $A$ un anneau unitaire quelconque. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *$A$ est un* l. c.*-anneau à gauche;*

(2) *Tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de $A$ est une intersection réduite d'idéaux à gauche irréductibles;*

(3) *Pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$, il existe $x \in A$ tel que $(\mathfrak{a} : x)$ soit irréductible;*

(4) *Pour tout $A$-module à gauche $M$, tout sous-module est une intersection réduite de sous-modules irréductibles;*

(5) *Pour tout $A$-module à gauche $M$ et tout sous-module $N \subset M$, il existe $x \in M$ tel que l'idéal $\{N : x\} = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\}$ soit irréductible.*

*Démonstration.* — Le théorème 3 de [6] affirme que $M$ est riche en co-irréductibles si, et seulement si, o possède une décomposition irréductible réduite dans tout sous-module non nul de $M$; il est alors évident que $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$.

Prouvons que $(2) \Rightarrow (1)$. Soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal, et soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{a}_\alpha$ une intersection réduite d'irréductibles, donc, dans le $A$-module $A/\mathfrak{a}$, $o = \bigcap_{\alpha \in I} \bar{\mathfrak{a}}_\alpha$ (intersection réduite de sous-modules irréductibles). Soit $\alpha_0 \in I$ et $\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha \in I - \{\alpha_0\}} \bar{\mathfrak{a}}_\alpha$ alors $\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha_0} \neq o$ et $\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha_0} \cap \bar{\mathfrak{a}}_{\alpha_0} = o$, donc $\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha_0} \subset A/\mathfrak{a}_{\alpha_0}$, donc est co-irréductible, et par suite, le $A$-module $A/\mathfrak{a}$ contient un sous-module co-irréductible non nul.

$(1) \Rightarrow (5)$. Soit $N \subset M$, $M/N$ contient un co-irréductible non nul, donc il existe $\hat{x} \in M/N$ tel que $A\hat{x}$ soit co-irréductible non nul. Il est clair que $\{N : x\}$ est le noyau de l'application $\varphi : A \to A\hat{x}$ $\varphi(\lambda) = \lambda x$, et est un idéal irréductible.

$(5) \Rightarrow (3)$ étant évident, il reste à prouver que $(3) \Rightarrow (1)$. Soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal, et soit $\varphi : A/(\mathfrak{a} : x) \to A/\mathfrak{a}$ l'application $\varphi(\hat{\lambda}) = \widehat{\lambda x}$ qui est un monomorphisme, alors $A/\mathfrak{a}$ contient un co-irréductible non nul.

### 3. Anneaux semi-artiniens.

Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe sont supposés commutatifs et unitaires, sauf mention explicite du contraire.

DÉFINITION. — Soit $A$ un anneau quelconque (commutatif ou non). On dit que $A$ est *semi-artinien à gauche* si tout $A$-module à gauche non nul contient un sous-module simple non nul.

PROPOSITION 3.1. — *Les affirmations suivantes sont vraies :*

(1) *Si $A$ est intègre et semi-artinien à gauche, c'est un corps;*

(2) *Si $A$ est semi-artinien et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal bilatère, alors $A/\mathfrak{a}$ est semi-artinien;*

(3) *Tout produit fini d'anneaux semi-artiniens (à gauche) est semi-artinien;*

(4) *Si $A$ est semi-artinien à gauche, tout anneau de fractions $A[S^{-1}]$ (voir* [7], chap. V, p. 415) *est semi-artinien.*

*Démonstration.* — (1) Si $A$ est intègre et semi-artinien, soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal à gauche minimal. On a $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, il existe donc un idempotent $e \in A$ tel que $\mathfrak{a} = Ae$. Vu que $e$ est diviseur de zéro, on a donc $e = 1$, donc $A$ est un corps.

Les affirmations (2), (3) et (4) sont immédiates.

*Remarque.* — Un produit infini d'anneau semi-artiniens n'est pas forcément semi-artinien; exemple : un produit infini de corps.

PROPOSITION 3.2. — *Soit $A$ un anneau unitaire quelconque. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *$A$ est semi-artinien à gauche;*

(2) *Tout $A$-module $M$ non nul à gauche est une extension essentielle de son socle $s_0 M$ (le socle étant la somme des sous-modules simples de $M$);*

(3) (*a*) *$\mathfrak{R}(A)$ est T-nilpotent à droite;*
(*b*) *$A/\mathfrak{R}(A)$ est semi-artinien à gauche.*

*Démonstration.* — Il est clair que (1) $\Leftrightarrow$ (2). Prouvons que (1) $\Rightarrow$ (3). Pour démontrer (*a*), nous allons procéder par récurrence transfinie d'après un procédé de H. BASS [1]. Soient $\mathfrak{R}_0 = 0$ et $\mathfrak{R}_{\alpha+1}$ tel que $\mathfrak{R}_{\alpha+1}/\mathfrak{R}_\alpha$ soit le socle de $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_\alpha$ et tel que, si $\alpha$ est un ordinal limite, $\mathfrak{R}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{R}_\beta$. $A$ étant semi-artinien, il existe $\alpha_0$ tel que $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\alpha_0}$. Si $a \in \mathfrak{R}$, définissons $h(a)$ comme étant le plus petit ordinal $\alpha$ tel que $a \in \mathfrak{R}_\alpha$. On observe que $h(a)$ n'est pas un ordinal limite, car si $a \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{R}_\beta$, alors $a \in \mathfrak{R}_\beta$ pour $\beta < \alpha$.

Donc, pour tout $a \neq 0$, on peut écrire $h(a) = \beta + 1$. Il en résulte que $\mathfrak{R}.\mathfrak{R}_{\beta+1} \subset \mathfrak{R}_\beta$ et donc, pour tout $b \in \mathfrak{R}$, on a $h(ba) < h(a)$. Soit alors la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ d'éléments de $\mathfrak{R}$ telle que $a_n a_{n-1} \ldots a_1 \neq 0$

pour tout $n$, alors la suite d'ordinaux $\{h(a_n a_{n-1} \dots a_1)\}$ est infinie et strictement décroissante, ce qui est impossible. De plus, il est clair que (*b*) est une conséquence de la proposition 3.1.

Prouvons que (3) $\Rightarrow$ (1). Soit $M$ un $A$-module non nul tel que $\mathfrak{R}N \neq 0$ pour tout $N \subset M$, $N \neq 0$. Vu que $\mathfrak{R}M \neq 0$, il existe $a_1 \in \mathfrak{R}$ tel que $a_1 M \neq 0$. Soit $M_1 = A a_1 M$ sous-module non nul de $M$, étant donné que $\mathfrak{R}M_1 \neq 0$, il existe $a'_2 \in \mathfrak{R}$ tel que $a'_2 A a_1 M \neq 0$, d'où un $a_2 \in \mathfrak{R}$ tel que $a_2 a_1 M \neq 0$. En continuant le procédé, on trouve donc une suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tel que $a_n a_{n-1} \dots a_1 M \neq 0$ pour tout $n$, ce qui est absurde, car $\mathfrak{R}$ est $T$-nilpotent à droite. Donc, pour tout $A$-module $M$, il existe $N \subset M$, $N \neq 0$ tel que $\mathfrak{R}N = 0$, donc $N$ est un $A/\mathfrak{R}$-module à gauche, et, par suite, contient un sous-module simple, il en est donc de même pour $M$.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* A *un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) A *est semi-artinien;*

(2) (*a*) $\mathfrak{R}(A)$ *est* T*-nilpotent,*
(*b*) $A/\mathfrak{R}(A)$ *est semi-artinien et régulier au sens de von Neumann;*

(3) *A est un* l. c.*-anneau et remplit la condition* (*H*)*;*

(4) *Tout idéal premier est maximal et, pour tout A-module M non nul,* $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.

*Démonstration.* — En vue de la démonstration, on va rappeler les lemmes suivants :

LEMME 1. — *Si A est semi-artinien commutatif, tout idéal premier est maximal.*

Soit $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier; comme $A/\mathfrak{p}$ est semi-artinien intègre, c'est un corps, et par suite $\mathfrak{p}$ est maximal.

LEMME 2 (BOURBAKI [3], chap. 2, p. 173, exercice 16). — *Si A est commutatif et réduit et tel que tout idéal premier soit maximal, alors A est régulier au sens de von Neumann.*

En tenant compte de ces lemmes et de la proposition 3.2, il est clair que (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) = (3). Il est clair que $A$ est un l. c.-anneau et la condition (H) résulte du théorème 1.2 de [9].

(3) $\Rightarrow$ (2). En vue du théorème précédemment cité, $\mathfrak{R}$ est $T$-nilpotent, $A/\mathfrak{R}$ est régulier au sens de von Neumann et est un l. c.-anneau. Au paragraphe 4, théorème 4.1, nous prouverons que un l. c.-anneau régulier est semi-artinien.

(1) $\Leftarrow$ (4). Soit $M \neq 0$, il existe $S \subset M$, $S \neq 0$, et simple, soit alors $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\, x$, où $x \in S$, alors $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.

La réciproque est évidente.

*Remarque* 1. — Si $A$ est semi-artinien et commutatif, alors il vérifie la condition (H). Le problème qui se pose est de savoir si un anneau semi-artinien à gauche vérifie la condition (H). Nous résoudrons partiellement ce problème au paragraphe 5.

*Remarque* 2. — L'affirmation (2) du théorème précédent nous a été communiquée par Guy RENAULT.

COROLLAIRE 3.1. — *Soit A un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est semi-artinien et noethérien;*

(2) *A est noethérien et vérifie la condition (H);*

(3) *A est artinien.*

L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) résulte du théorème précédent du fait qu'un anneau noethérien est un l. c.-anneau.

L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) est évidente.

COROLLAIRE 3.2. — *Soit A un anneau semi-artinien. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *M est un A-module noethérien;*

(2) *M est un A-module artinien;*

(3) *M est de longueur finie.*

*Démonstration.*

(1) $\Rightarrow$ (3). Soit $M_0 = s_0 M$ le socle de $M$,

$$M_1/M_0 = s_0(M/M_0), \ldots, M_n/M_{n-1} = s_0(M/M_{n-1}), \ldots$$

$M$ étant noethérien, il existe $n$ tel que $M_n = M$ et chaque $M_1, \ldots, M_n$ est de longueur finie.

(2) $\Rightarrow$ (3). Soient $M_0 \subset M$ un sous-module propre maximal (qui existe en vertu du théorème 3.1), $M_1 \subset M_0$ un sous-module propre maximal de $M_0, \ldots, M_n \subset M_{n-1}$ un sous-module propre maximal de $M_{n-1}$. Vu que $M$ est artinien, il existe $n$ tel que $M_n = 0$.

COROLLAIRE 3.3. — *Soit A semi-artinien. Soient M un A-module et $a \in A$. L'homothétie de rapport a dans M est un monomorphisme si, et seulement si, a n'appartient à aucun idéal de* $\mathrm{Ass}(M)$.

*Démonstration.* — Si $a$ appartient à un idéal premier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, on a $p = \mathrm{Ann}\, x$ avec $x \in M$, $x \neq 0$; d'où $ax = 0$, et l'homothétie de

rapport $a$ n'est pas injective. Réciproquement, si $ax = 0$ pour un $x \in M$ tel que $x \neq 0$, on a $Ax \neq \{0\}$, d'où $\mathrm{Ass}(Ax) \neq \emptyset$ (en vertu du théorème 3.1).

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(Ax)$; on a évidemment $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ si $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(bx)$, $b \in A$, d'où $a \in \mathfrak{p}$ puisque $abx = 0$. De ce corollaire, résulte le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.4. — *L'ensemble des diviseurs de zéro dans un anneau semi-artinien est réunion des* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$.

Dans [10], H. STORRER dit qu'un anneau commutatif $A$ est *saturé* si toute extension épimorphe de A est égale à $A$. Il dit que $A$ est *fortement saturé* si toute image homomorphe de $A$ est saturée, c'est-à-dire si tout épimorphisme de source $A$ est surjectif.

En tenant compte des résultats de [10], on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.5. — *Si A est un anneau, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est semi-artinien;*

(2) (*a*) $\mathfrak{R}(A)$ *est T-nilpotent,*
(*b*) *A est un* l. c.*-anneau fortement saturé.*

*Démonstration.*

(1) $\Rightarrow$ (2) est une conséquence immédiate de la proposition 2.3 de [10] et du théorème 3.1.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit $N$ l'idéal des éléments nilpotents de $A$, alors $A/N$ est un l. c.-anneau fortement saturé et, en vertu de la proposition 2.6 de [10], $A/N$ est régulier au sens de von Neumann. Donc $N = \mathfrak{R}$, et il résulte du théorème 3.1 que $A$ est semi-artinien.

En particulier, si $A$ est semi-artinien, $A$ est saturé, donc, en vertu du corollaire 2.5 de [10], tout $a \in A$ non diviseur de zéro est inversible et tenant compte du corollaire 3.4, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.6. — *Soit A un anneau semi-artinien, alors, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p} \subset A$, *on a*

$$\mathfrak{p} \subset \bigcup_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(A)} \mathfrak{q}.$$

*En particulier, si A est semi-artinien et tel que* $\mathrm{Spec}(A)$ *soit fini, alors tout idéal premier est associé.*

COROLLAIRE 3.7. — *Soit A semi-artinien tel que* $\mathrm{Spec}(A)$ *soit fini. Alors, tout A-module simple est isomorphe à un idéal minimal de A.*

*Démonstration.* — Soit $S$ un $A$-module simple, donc $S = A/\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est maximal dans $A$. Spec$(A)$ étant fini, alors $\mathfrak{m}$ est associé, si $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}\, x$ où $x \in A$, alors $Ax$ est minimal et isomorphe à S.

*Exemple.* — Dans [1], H. Bass dit qu'un anneau $A$ est parfait à gauche si tout $A$-module à gauche admet un recouvrement projectif. En tenant compte du théorème P de [1], il résulte que $A$ est parfait à gauche si, et seulement si, $A$ est semi-artinien à droite et s'il n'existe qu'un nombre fini d'idempotents orthogonaux de $A$. Si $A$ est parfait et commutatif, nous sommes dans les conditions du corollaire 3.7.

Corollaire 3.8. — *Soit $A$ un anneau (commutatif). Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *$A$ est parfait;*

(2) *$A$ est semi-artinien et* Spec$A$ *est fini.*

*Démonstration.*

(1) $\Rightarrow$ (2) est évident, car $A/\mathfrak{R}$ est semi-simple ([1], théorème P).

(2) $\Rightarrow$ (1). Si Spec$(A)$ est fini, Spec$(A/\mathfrak{R})$ l'est aussi. D'après le corollaire 3.7, tout module simple est isomorphe à un idéal minimal; $A/\mathfrak{R}$ est régulier au sens de von Neumann (théorème 3.1), donc tout idéal minimal de $A/\mathfrak{R}$ est projectif, c'est-à-dire tout $A/\mathfrak{R}$-module simple est projectif, donc $A/\mathfrak{R}$ est semi-simple.

## 4. Anneaux semi-artiniens et réguliers au sens de von Neumann.

Dans ce paragraphe, tous les anneaux sont unitaires et commutatifs. Rappelons que l'anneau $A$ est dit *régulier au sens de von Neumann* si, quelque soit $x \in A$, il existe $a \in A$ tel que $x = xax = x^2 a$.

Théorème 4.1. — *Soit $A$ un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *$A$ est un* l. c.*-anneau régulier;*

(2) *$A$ est semi-artinien et régulier;*

(3) *$A$ est semi-artinien et réduit;*

(4) *Tout idéal de $A$ est une intersection réduite d'idéaux maximaux;*

(5) *Tout sous-module d'un $A$-module est une intersection réduite de sous-modules maximaux.*

On se sert du lemme suivant :

Lemme 4.1. — *Si $A$ est régulier (commutatif), alors :*

(1) *Tout idéal irréductible de $A$ est maximal;*

(2) *Tout sous-module irréductible d'un $A$-module est maximal.*

*Démonstration.*

1° Soit $B = A/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal irréductible, $B$ est régulier, donc, pour tout $x \in B$, $Bx$ est sommande directe de $B$, mais $B$ étant un $B$-module co-irréductible, on a $B = Bx$ quel que soit $x \in B$, donc $B$ est un corps et par suite $\mathfrak{a}$ est maximal.

2° Supposons d'abord que $M$ soit co-irréductible et soit $x \in M$, alors $Ax = A/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est irréductible, donc $Ax$ est simple pour tout $x \in M$. $M$ étant co-irréductible, alors $M = Ax$ et par suite $M$ est simple.

Soient maintenant $M$ quelconque et $N \subset M$ un sous-module irréductible de $M$; il est clair que $M/N$ est simple, donc $N$ est maximal.

Les implications $(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4)$ du théorème sont donc maintenant claires.

Prouvons que $(4) \Rightarrow (3)$. Il est clair que $A$ est réduite; soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal; d'après (4), on a $\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{m}_\alpha$ intersection réduite d'idéaux maximaux et, dans le $A$-module $A/\mathfrak{a}$, on a $0 = \bigcap_{\alpha \in} \overline{\mathfrak{m}}_\alpha$ (intersection réduite) et $\overline{\mathfrak{m}}_\alpha$ maximal dans $A/\mathfrak{a}$. Soit $\alpha_0 \in I$ et $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha \in I - \{\alpha_0\}} \overline{\mathfrak{m}}_\alpha$ où $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} \neq 0$ et $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} \cap \overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} = 0$. Donc $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} \subset A/\mathfrak{m}_{\alpha_0}$, donc $A/\mathfrak{a}$ contient un $A$-module simple.

COROLLAIRE 4.1. — *Soient $A$ un anneau semi-artinien et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal tel que $\mathfrak{a}$ soit égal à sa racine; alors $\mathfrak{a}$ est une intersection réduite d'idéaux maximaux.*

Il suffit en effet d'observer que $A/\mathfrak{a}$ est semi-artinien et réduit.

COROLLAIRE 4.2. — *Soit $A$ semi-artinien régulier; alors tout $A$-module $M$ est un extension essentielle d'une somme directe $P \oplus Q$ où $P$ est $A$-module simple et projectif et $Q$ une somme directe des modules simples et injectifs.*

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.2, $M$ est extension essentielle de son socle $s_0 M$. D'après un résultat classique de Kaplansky, tout module simple sur un anneau régulier commutatif est injectif. Soient alors $P$ la somme des modules projectifs et simples de $s_0 M$, et $Q$ la somme des modules simples injectifs et non projectif. On observe qu'un module simple est projectif si, et seulement si, il est isomorphe à un idéal minimal de $A$.

COROLLAIRE 4.3. — *Soit $A$ semi-artinien et régulier alors tout $A$-module $P$ projectif est extension essentielle d'une somme directe d'idéaux minimaux.*

En effet, si $S$ est un module simple de $s_0 P$, étant injectif, c'est une sommande directe, donc $S$ est projectif et, par suite, est isomorphe à un idéal minimal.

COROLLAIRE 4.4. — *Si $A$ est semi-artinien et régulier, alors tout $A$-module noethérien est semi-simple et injectif.*

*Exemples d'anneaux semi-artiniens réguliers au sens de von Neumann qui ne sont pas noethériens.* — Soit $B$ un anneau réduit (commutatif ou pas) ayant des idéaux minimaux à gauche et soit $\mathfrak{b}$ l'un d'entre-eux. On a $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}$ ($B$ étant réduit). Il existe un idempotent $e \in \mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b} = Be$. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de $B$, somme directe d'idéaux à gauche minimaux ($\mathfrak{a}$ est bilatère), et soit $A$ le plus petit sous-anneau de $B$ contenant $\mathfrak{a}$ et l'élément unité de $B$.

Si $\mathfrak{b}$ est minimal dans $B$, il est minimal dans $A$. En effet (*cf.* BOURBAKI [2], § 5, exercices), $\mathfrak{b} = Be$ est minimal si, et seulement si, $eBe$ est un corps et, de même, $\mathfrak{b} = Ae$ est minimal dans $A$, car $eAe = eBe$ est un corps.

Tout élément de $A$ est de la forme $n.1 + x$, où $x \in \mathfrak{a}$ et $n$ un entier. Si $B$ est de caractéristique $p$ non nulle, alors $A/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{F}_p$, et $A$ est semi-artinien.

*Cas particulier.* — Soient $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ le corps des entiers modulo $p$ ($p$ nombre premier) et $B = \prod_{i \in I} \mathbf{F}_p$ (card $I$ = infini). Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal $\sum_{i \in I} \mathbf{F}_p$, et considérons dans $B$ l'anneau $A$ contenant $\mathfrak{a}$ et l'élément unité de $B$, alors $A$ est semi-artinien régulier au sens de von Neumann, mais n'est pas noethérien.

## 5. Élévation d'un module.

Soient $A$ un anneau unitaire quelconque et $M$ un $A$-module à gauche. Soit $M_0 = s_0 M$ le socle de $M$. Si $\alpha$ est un ordinal, $M_{\alpha+1}$ est défini tel que $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ soit le socle de $M/M_\alpha$. Si $\alpha$ est un ordinal limite, alors $M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$.

DÉFINITION. — Soit $M$ un $A$-module à gauche, on dira que *l'élévation* de $M$ est *définie* s'il existe un ordinal $\alpha$ tel que $M = M_\alpha$. Le plus petit ordinal possédant cette propriété sera appelé *l'élévation* de $M$ et sera noté $e(M)$.

*Remarque.* — Si $M$ est un $A$-module de type fini, son élévation n'est pas un ordinal limite. De la définition précédente, il résulte clairement la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — *Soit une suite exacte de A-modules*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

(1) *L'élévation de M est définie si, et seulement si, les élévations de M' et M'' sont définies.*

(2) (*a*) $e(M') \leq e(M)$,
(*b*) $e(M'') \leq e(M)$,
(*c*) $e(M) \leq e(M') + e(M'')$.

DÉFINITION. — Si $A$ est un anneau semi-artinien à gauche, on définit l'élévation de l'anneau $A$ comme étant l'élévation du $A$-module $A_A$, par suite l'élévation de $A$ n'est pas un ordinal limite.

PROPOSITION 5.2. — *Soit A un anneau semi-artinien à gauche. Les affirmations suivantes sont équivalentes*

(1) $e(A) \leq \alpha$;

(2) *Pour tout A-module à gauche M,* $e(M) \leq \alpha$.

Il est trivial que (2) $\Rightarrow$ (1) et (1) $\Rightarrow$ (2) car $e(A) = e(A^{(J)})$ où $J$ est un ensemble d'indices.

PROPOSITION 5.3. — *Soit A semi-artinien à gauche tel que*

$$e(A) = n \qquad (n, \textit{ nombre naturel}).$$

*Alors tout A-module à gauche M contient un sous-module propre maximal* [i. e. *vérifie la condition* (*H*)].

*Démonstration.* — On a la suite $0 \subset M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$. Cependant $M/M_{n-1} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_p \oplus \ldots$, où $S_i$ sont des modules simples, il existe donc $M'$ tel que, par exemple, l'on ait $M/M' \cong S_1$, donc $M'$ est maximal dans $M$.

*Remarque.* — Si $A$ est semi-artinien à gauche, la condition (*H*) n'est pas forcément remplies. Par exemple, soit $A$ parfait à droite et non parfait à gauche (*voir* [1], p. 476, exemple), il est semi-artinien à gauche. Si $A$ vérifiait la condition (*H*), alors, d'après le théorème 1.5 [9], $\mathfrak{R}(A)$ serait $T$-nilpotent à gauche, mais $A/\mathfrak{R}$ est semi-simple (étant parfait à droite), donc $A$ serait parfait à gauche.

PROPOSITION 5.4. — *Soient A un anneau quelconque, Q un A-module injectif tel que* $e(Q) \leq \aleph_0$. *Soient* $B = \mathrm{Hom}_A(Q, Q)$ *et* $\mathfrak{R}$ *le radical de Jacobson de B. Alors :*

(1) $\mathfrak{R}$ *est l'ensemble de morphismes* $f : Q \to Q$ *tels que* $\mathrm{Ker} f \supset s_0 Q$;

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^n = 0$;

(3) *$B/\mathfrak{R}$ est un produit d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels sur certains corps.*

*Démonstration.* — 1° Elle résulte d'un cas classique plus général qui affirme que si $Q$ est un $A$-module injectif, le radical de Jacobson de $B$ est l'ensemble des morphismes tels que $\mathrm{Ker} f$ soit essentiel.

2° Soit $Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_n \subset \ldots$ tel que $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ et $Q_{n+1}/Q_n$ semi-simple.

Soit $\mathfrak{R}^{(n)}$ l'ensemble des morphismes $f: Q \to Q$ tels que $\mathrm{Ker} f \supset Q_{n-1}$. Si $f \in \mathfrak{R}^{(n)}$, il est clair que $f(Q_{m+n})$ soit contenu dans $Q_m$, cela entraîne que $R^{(m)}.R^{(n)}$ est contenu dans $R^{(m+n)}$.

En particulier, $\mathfrak{R}^n$ est contenu dans $R^{(n)}$. D'autre part, les morphismes canoniques $Q^n \subset Q$ et $Q \to Q/Q_n$ engendrent les suites exactes :

$$0 \to \mathrm{Hom}(Q/Q_n, Q) \xrightarrow{i_n} \mathrm{Hom}(Q, Q) \xrightarrow{p_n} \mathrm{Hom}(Q_n, Q) \to 0.$$

On observe que $\mathfrak{R}^{(n+1)}$ n'est autre que $\mathrm{Im}(i_n)$. Les applications $p_n$ définissent donc un isomorphisme $B/\mathfrak{R}^{(n+1)} \cong \mathrm{Hom}(Q_n, Q)$. Mais la formule

$$B = \mathrm{Hom}(Q, Q) = \mathrm{Hom}\Big(\varinjlim Q_n, Q\Big) = \varprojlim \mathrm{Hom}(Q_n, Q) = \varprojlim A/\mathfrak{R}^{(n+1)}$$

montre que $B$ est un anneau séparé et complet pour la filtration définie par les idéaux $\mathfrak{R}^{(n)}$ et par la suite

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^{(n)} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^{n} = 0.$$

3° On voit facilement que $B/\mathfrak{R} = \mathrm{Hom}_A(Q_0, Q_0)$, où $Q_0$ est le socle de $Q$, semi-simple et, par suite,

$$\mathrm{Hom}_A(Q_0, Q_0) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{V_i}(V_i, V_i),$$

$V_i$, espaces vectoriels,

COROLLAIRE 5.1. — *Soient $A$ un anneau quelconque et $Q$ un injectif tel que $e(Q) = n$ et soit $B = \mathrm{Hom}_A(Q, Q)$. Si $\mathfrak{R}$ est le radical de Jacobson de $B$, alors $\mathfrak{R}^n = 0$.*

COROLLAIRE 5.2. — *Soit $A$ un anneau semi-artinien d'élévation finie. Si $Q$ est un injectif, somme finie d'injectifs indécomposables* (i. e. *de longueur au sens de Goldie*), *alors l'anneau $B = \mathrm{Hom}_A(Q, Q)$ est semi-primaire.*

(Un anneau est dit semi-primaire si son radical de Jacobson $\mathfrak{R}$ est tel que $\mathfrak{R}^n = 0$ pour un certain $n$ et si $A/\mathfrak{R}$ est semi-simple.)

*Démonstration.* — Si $e(A) = n$, alors $e(Q) \leq n$ et donc $\mathfrak{R}^n = 0$. D'autre part, $B/\mathfrak{R}$ est semi-simple, car le socle $Q_0$ de $Q$ contient un nombre fini de modules simples.

Ce corollaire généralise un résultat donné dans [9], théorème 3.1.

*Exemples d'anneaux semi-artiniens d'élévation finie :*

1° Tout anneau artinien est d'élévation finie.

2° Soit l'anneau $B = \prod_{i \in I} \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ où Card $I$ est infini. Notons $\mathfrak{o}$ l'idéal de $B$ égal à $\sum_{i \in I} \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ et soit $A$ le plus petit sous-anneau de $B$ contenant $\mathfrak{a}$ et l'élément unité de $B$. Il est clair que $A$ est semi-artinien d'élévation $n$.

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] Bass (Hyman). — Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 95, 1960, p. 466-494.

[2] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre.* Chap. 8 : Modules et anneaux semi-simples. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1261; *Bourbaki*, 23).

[3] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative.* Chap. 1 et 2. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290; *Bourbaki*, 27).

[4] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative.* Chap. 3 et 4. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1293; *Bourbaki*, 28).

[5] Fort (Jacques). — Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1966, série A, p. 1239-1242.

[6] Fort (Jacques). — Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, *Math. Z.*, t. 103, 1968, p. 363-388.

[7] Gabriel (Pierre). — Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 323-448 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1961).

[8] Năstăsescu (C.) et Popescu (N.). — Sur la structure des objets de certaines catégories abéliennes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1966, Série A, p. 1295-1297.

[9] Renault (Guy). — Sur les anneaux A, tels que tout A-module à gauche non nul contient un sous-module maximal, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, Série A, p. 622-624.

[10] Störrer (Hans H.). — Sur les épimorphismes dans la catégorie des anneaux commutatifs, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, Série A, p. 263-265.


(Manuscrit reçu le 10 juin 1968.)


Constantin Năstăsescu,
Institut de Mathématiques
de l'Académie de la R. S. R.,
rue M. Eminescu, 47,
Bucuresti 9 (Roumanie).

Nicolae Popescu,
Institut de Mathématiques
de l'Académie de la R. S. R.,
rue M. Eminescu, 47,
Bucuresti 9 (Roumanie).