BULLETIN DE LA S. M. F.

M.-P. MALLIAVIN

Condition (a_q) de Samuel et q-torsion

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 193-196

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__193_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 193 à 196.

CONDITION (a_q) DE SAMUEL ET q-TORSION

PAR

MARIE-PAULE MALLIAVIN.

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs, noethériens, et possèdent un élément unité; tous les modules sont unitaires et de type fini.

Si M est un A-module, on notera prof (M) sa profondeur (ou codimension homologique), dhM sa dimension homologique. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, on notera $ht(\mathfrak{p})$ sa hauteur et prof$(\mathfrak{p})$ sa profondeur (ou grade), i. e. la longueur d'une A-suite maximale formée d'éléments de $\mathfrak{p}$.

PROPOSITION 1. — *Soient A un anneau, M un A-module. On suppose que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, de profondeur ≤ 1, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est régulier et que, si $a \in A$, n'est pas diviseur de zéro dans A, il n'est pas diviseur de zéro dans M. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) *Le module M est réflexif;*

(ii) *On a* $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P(A)} M_\mathfrak{p}$ [où $P(A)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de A de profondeur 1 et où M et les $M_\mathfrak{p}$ sont considérés comme plongés dans le S-module semi-simple $S \otimes_A M$, en notant par S l'anneau total des fractions de A];

(iii) *Toute A-suite à deux éléments est une M-suite.*

Sous les hypothèses précédentes, l'anneau A est normal (critère de normalité de Serre), et l'application canonique $M \to S \otimes_A M$ est injective. La démonstration est la même que dans le cas d'un anneau intègre [4].

On a aussi (*cf.* prop. 6 de [4]) :

PROPOSITION 2. — *Si A est un anneau local, M un A-module et q un entier ≥ 0, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i)$_q$ *On a* prof$(M_\mathfrak{p}) \geq$ Inf$(q,$ prof $(\mathfrak{p}))$, *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A;*

(ii)$_q$ *Toute A-suite de longueur $\leq q$ est une M-suite.*

Nous désignerons sous le nom de *condition* (a_q) chacune des conditions (i)$_q$ et (ii)$_q$.

Un module M est un $r^{\text{ième}}$ *module de syzygies*, s'il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_{r-1}$$

dans laquelle les P_i sont projectifs (*cf.* § 8 de [1]); en fait, nous appelons ici $r^{\text{ième}}$ module de syzygies, ce que H. Bass désigne sous le nom de $(r-1)^{\text{ième}}$ module de syzygies.

Si l'anneau de base A est local, si q est un entier ≥ 1 et si M est un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies, alors M vérifie la condition (a_q); on procède par récurrence sur q en remarquant que si, dans une suite exacte :

$$0 \to M \to F \to N \to 0,$$

le module F est libre et le module N vérifie (a_{q-1}), alors M vérifie (a_q).

En imposant à l'anneau A des conditions supplémentaires, la remarque précédente admet une réciproque :

Proposition 3. — *Soient M un module sur un anneau local de Macaulay A et q un entier ≥ 1. On suppose que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A dont la profondeur est $\leq q-1$, le localisé $A_\mathfrak{p}$ est un anneau régulier. Alors, s'il vérifie la condition (a_q), le module M est un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies.*

Démonstration. — Pour $q \geq 1$, la condition imposée à A entraîne que c'est un anneau réduit; soit S son anneau total des fractions. Si M vérifie (a_1), l'application canonique $M \to S \otimes_A M$ est injective. Puisque $S \otimes_A M$ est un module semi-simple sur l'anneau semi-simple S, il est projectif, donc facteur direct d'un S-module libre. Une base convenable de ce dernier engendre un A-module libre dans lequel M est plongé. Supposons $q \geq 2$, et la proposition démontrée pour $q-1$; d'après la proposition 1, le module M est réflexif. Considérons une suite exacte :

$$0 \to U \to F_0 \to M^* \to 0, \tag{1}$$

dans laquelle F_0 est libre et M^* désigne le dual de M. On en déduit la suite exacte :

$$0 \to M \to F_0^* \to U^* \to \operatorname{Ext}^1_A(M^*, A) \to 0. \tag{2}$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Si $\operatorname{prof}(\mathfrak{p}) \leq q-1$, alors, d'après l'hypothèse faite sur A, on a : $\operatorname{prof}(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p})$; puisque M vérifie (a_1), on a $\operatorname{prof}(M_\mathfrak{p}) \geq ht(\mathfrak{p})$; donc, nécessairement, $\operatorname{prof}(M_\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p})$; et, puisque $A_\mathfrak{p}$ est régulier, $dh_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ est nul, et $M_\mathfrak{p}$ est libre. Par suite, $M_\mathfrak{p}^*$ est libre; d'où, en localisant en $\mathfrak{p}$ la suite (1), $U_\mathfrak{p}$ est libre. Donc $U_\mathfrak{p}^*$ est libre, et $\operatorname{Ext}^1_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}^*, A_\mathfrak{p}) = 0$. Dans la suite exacte :

$$0 \to M \to L_0 \to V \to 0, \tag{3}$$

où $L_0 = F_0^*$ et où $V = \operatorname{Im}(F_0^* \to U^*)$, on a que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de profondeur $\leq q-1$, $V_\mathfrak{p} = U_\mathfrak{p}^*$ est un module libre; donc, pour

un tel idéal, l'inégalité $\operatorname{prof}(V_{\mathfrak{p}}) \geqq \inf(q-1, \operatorname{prof}(\mathfrak{p}))$ est vérifiée. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de A de profondeur $\geqq q$, et supposons que $\operatorname{prof}(V_{\mathfrak{q}}) < \inf(q-1, \operatorname{prof}(\mathfrak{q})) = q-1$; de la suite exacte (3) localisée en $\mathfrak{q}$, il résulte, puisque $\operatorname{prof}(V_{\mathfrak{q}}) < \operatorname{prof}(L_{\mathfrak{q}})$, l'égalité :

$$\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{q}}) = 1 + \operatorname{prof}(V_{\mathfrak{q}}) < q,$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur M. Par conséquent, on a toujours $\operatorname{prof}(V_{\mathfrak{q}}) \geqq \inf(q-1, \operatorname{prof}(\mathfrak{q}))$, et le module V vérifie la condition (a_{q-1}); d'après l'hypothèse de récurrence, V est un $(q-1)^{\text{ième}}$ module de syzygies et, d'après la suite (3), M est un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies.

Soient M un A-module, et $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ une suite exacte où les F_i sont des modules projectifs; on démontre que le conoyau de la flèche $F_0^* \to F_1^*$ ne dépend que de M, et on le note $D(M)$; M. AUSLANDER (*cf.* [5]) appelle *i-torsion de M*, le module $\operatorname{Ext}_A^i(D(M), A)$. Dans l'étude, faite dans [5], de l'annulation de la i-torsion d'un module, on démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 4. — *Si q est un entier $\geqq 1$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La k-torsion de M est nulle pour $1 \leqq k \leqq q$;*

(ii) *Il existe une suite exacte :*

$$0 \to M \to F_0 \to F_1 \to \ldots \to F_{q-1},$$

dans laquelle les F_i sont libres, telle que la suite :

$$F_{q-1}^* \to \ldots \to F_1^* \to F_0^* \to M^* \to 0$$

soit exacte.

Si les conditions équivalentes de la proposition 4 sont vérifiées, on dit que M est *sans q-torsion*. Alors, M est évidemment un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies. Dans le cas où l'anneau de base est un anneau de Gorenstein, la remarque précédente admet une réciproque. On utilisera le résultat suivant (théor. 8-2 de [1]).

THÉORÈME. — *Soit A un anneau de Gorenstein. Si r est un entier $\geqq 2$, un A-module M est un $r^{\text{ième}}$ module de syzygies si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

1° *Le module M est réflexif;*

2° *$r-1$ est au plus égal au plus petit entier $s \geqq 1$ tel que $\operatorname{Ext}_A^s(M^*, A) \neq 0$.*

PROPOSITION 5. — *Soient A un anneau de Gorenstein, M un A-module et q un entier $\geqq 1$. Si M est un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies, alors M est sans q-torsion.*

Preuve. — Un premier module de syzygies est sans 1-torsion et ceci sans hypothèse sur A. Si q est $\geqq 2$, le module M est, d'après le théorème,

réflexif, et l'on a $\mathrm{Ext}^i_A(M^*, A) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, q-2$. Donc $\mathrm{Ext}^i_A(D(M), A) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, q$.

Si X est une variété sur un corps k, on notera $\mathrm{Diff}(k, X)$ le faisceau des k-différentielles de X.

PROPOSITION 6. — *Soient X une variété sur un corps parfait k, x un point de X. On suppose que localement en x, $\mathcal{O}_X$ est une intersection complétée. Soit q un entier $\geqq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *Localement en x, la variété X est régulière en codimension $\leqq q$;*

2° *Localement en x, le faisceau $\mathrm{Diff}(k, X)$ est sans q-torsion;*

3° *Le $(\mathcal{O}_X)_x$-module $(\mathrm{Diff}(k, X))_x$ vérifie la condition (a_q).*

Démonstration. — Soit $R = (\mathcal{O}_X)_x$; alors R est un anneau local réduit et un localisé d'une k-algèbre de type fini. On identifie $(\mathrm{Diff}(k, X))_x$ au R-module des différentielles de R sur k, soit $\mathrm{Diff}(k, R)$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R, alors $R_\mathfrak{p}$ est régulier si et seulement si le $R_\mathfrak{p}$-module $\mathrm{Diff}(k, R_\mathfrak{p}) = (\mathrm{Diff}(k, R))_\mathfrak{p}$ est libre (critère jacobien de simplicité, applicable, puisque k est parfait). De plus, R est une intersection complète (i. e. un quotient d'un anneau régulier par une suite régulière); par conséquent, la dimension homologique de $\mathrm{Diff}(k, R)$ sur R est $\leqq 1$, et l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de R en lesquels $R_\mathfrak{p}$ n'est pas régulier est le support du module $D(\mathrm{Diff}(k, R))$ (*cf.* [3]). Puisque $dh_R(\mathrm{Diff}(k, R)) \leqq 1$, on a ici :

$$D(\mathrm{Diff}(k, R)) = \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Diff}(k, R), R).$$

La proposition en résulte.

Si, dans la proposition précédente, on prend $q \geqq 3$, alors l'anneau $(\mathcal{O}_X)_x$ est factoriel [2] donc, localement en x, toute sous-k-variété de X de codimension 1 est une intersection complète.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BASS (Hyman). — On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.*, t. 82, 1963, p. 8-28.

[2] GIRAUD (Jean). — Groupe de Picard, anneaux factoriels, *Séminaire Bourbaki*, 15e année, 1962-1963, n° 248, 13 pages.

[3] LIPMAN (Joseph). — Free derivation modules on algebraic varieties, *Amer. J. of Math.*, t. 87, 1965, p. 874-898.

[4] SAMUEL (Pierre). — Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 237-249.

[5] Séminaire SAMUEL, 1966-1967. Algèbre commutative : *Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative.* — Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

(Manuscrit reçu le 24 février 1968.)

Mme Marie-Paule MALLIAVIN,
Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences de Caen,
252, rue de Rivoli,
75-Paris, 1er.