BULLETIN DE LA S. M. F.

A. GAY

Sur l'équation de M. P. Humbert

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 197-209

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__197_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'ÉQUATION DE M. P. HUMBERT;

PAR M. GAY.

Au cours d'une Communication faite à la Société Mathématique de France (séance du 22 mars 1933) M. Liénard, par un simple changement d'axes, a transformé l'équation des potentiels de troisième ordre de M. P. Humbert en la suivante

$$\Delta \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

où Δ désigne le laplacien du plan xOy et il a établi [équation (4) de la note citée] la formule de Green correspondant à cette équation.

A ce sujet je me permets de présenter quelques remarques simples, conséquences immédiates de la théorie des fonctions harmoniques de deux variables.

1. Formule de Green. — Conservant les notations de la Note citée précédemment, nous désignerons par S la surface fermée pour laquelle on veut établir la formule de Green, par C sa courbe de niveau de cote z, en regardant l'axe oz comme vertical, par ds un élément de courbe C et par n une normale intérieure à C dans son plan. Soient $P(a, b, c)$ un point intérieur à S et $P'(a, b, z)$ l'intersection de la verticale de P avec le plan de C; nous supposons z assez voisin de c pour que P' soit intérieur à C. La dérivée $\frac{\partial v(P')}{\partial z}$ est harmonique en a et b et la formule fondamentale des fonctions harmoniques donne l'équation

$$\frac{\partial v(P')}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_C \left| \log r \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{d \log r}{dn} \right| ds, \tag{2}$$

dans laquelle $\frac{d}{dn}$ désigne la dérivée prise suivant la normale intérieure en un point M de C et où $r = P'M$. Dans cette équation (2)

le second membre I est fonction de z par l'intermédiaire des données et de C. Si l'on désigne maintenant par P_1P_2 le segment de verticale de P, limité à S et contenant le point P, en intégrant l'équation (2) par rapport à z, il vient

$$v(P_2) - v(P_1) = \int_{z_1}^{z} I(z)\,dz, \tag{3}$$

et

$$v(P_2) - v(P) = \int_{z}^{z_2} I(z)\,dz, \tag{3'}$$

où z_1 et z_2 sont les cotes des points P_1 et P_2.

Les équations (3) et (3') entraînent immédiatement l'équation (4) de M. Liénard

$$v(P) = \frac{1}{2}\left[v(P_1) + v(P_2)\right] + \frac{1}{2}\left|\int_{z_1}^{z} I(z)\,dz - \int_{z}^{z_2} I(z)\,dz\right|, \tag{4}$$

dans laquelle la surface S n'intervient que par la zone comprise entre les courbes de niveau des points P_1 et P_2.

Remarquons encore que les équations (3), (3') ou (4) subsistent si la verticale de P ne rencontre pas la surface ouverte S; il suffit de fermer S par un ou deux plans horizontaux et de se donner la valeur de v sur ces plans.

Dans les équations précédentes $v(P_1)$ et $v(P)$ sont des fonctions de a et b seulement.

2. Transformations. — Les équations obtenues précédemment appellent quelques remarques. Si l'on désigne par α et β les cosinus directeurs de la normale n à C et par φ l'angle de n avec l'axe Ox, α et β sont fonctions de φ et de z, et l'on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dn}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} + \beta\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \alpha'_z\frac{\partial v}{\partial x} + \beta'_z\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \alpha'_z\frac{\partial v}{\partial x} + \beta'_z\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned} \tag{5}$$

Les plans de cotes z et $z + dz$ coupent la surface S suivant deux courbes C et C'; si l'on projette C' sur le plan de C on obtient une

courbe C'_1 voisine de C et la portion λ de la normale n comprise entre C et C'_1 dépend de la forme de S; on voit aisément que

$$\lambda = -c\,dz,$$

où

$$c = \cot \widehat{N z},$$

N désignant la normale intérieure à S au point M.

Le point M_1 ou n perce C'_1 est lié à M par

$$\delta \overrightarrow{OM} = \lambda\, n, \tag{6}$$

qui entraîne

$$ds_1 = ds\left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right), \tag{7}$$

ρ désignant le rayon de courbure à C ou M.

Si l'on dérive (6) par rapport à s_1, abscisse de M_1 sur C'_1, on obtient, en utilisant (7) et les formules de Frenet, l'accroissement δn, d'où

$$\frac{\partial n}{\partial z} = c'_s\, t, \tag{8}$$

et l'équation (5) s'écrit finalement

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dn}\right) - c'_s \frac{dv}{ds}. \tag{9}$$

Considérons maintenant une intégrale de la forme

$$\mathfrak{J} = \int_C \mathrm{H}(s, z)\, ds$$

qui s'écrit, puisque $ds = \rho\, d\varphi$, sous la forme

$$\mathfrak{J} = \int_0^{2\pi} \mathrm{H}(\varphi, z)\, \rho(\varphi, z)\, d\varphi.$$

C'est une fonction de z et $\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z}$ s'écrit

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\rho + \mathrm{H}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) d\varphi = \int_C \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + \mathrm{H}\frac{\partial}{\partial z}\log\rho\right) ds. \tag{10}$$

Remarquons que ce résultat peut s'obtenir en utilisant l'équa-

tion (7) d'où l'on tire

$$\frac{\partial}{\partial z}(ds) = \frac{c}{\rho}\,ds.$$

En comparant ce résultat au calcul précédent il faut en conclure que c est équivalent à ρ'_z, ce qu'un calcul direct montre facilement.

En utilisant (9) on met l'équation (2) sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_C \left| \log r \,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dn}\right) - \frac{d\log r}{dn}\,\frac{\partial v}{\partial z} - c'_s \log r \,\frac{dv}{ds}\right| ds$$

et, d'après (10), il vient

$$\begin{aligned}(11)\quad 2\pi\frac{\partial v}{\partial z} = {} & \frac{\partial}{\partial z}\int_C \left(\log r\,\frac{dv}{dn} - v\,\frac{d\log r}{dn}\right) ds \\ & - \int_C \frac{dv}{dn}\left(\frac{\partial \log r}{\partial z} + \log r\,\frac{\partial \log \rho}{\partial z}\right) ds \\ & + \int_C v\left(\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{d\log r}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\,\frac{\partial \log \rho}{\partial z}\right) ds - \int_C c'_s \log r\,\frac{dv}{ds}\,ds.\end{aligned}$$

En intégrant (11) par rapport à z, on obtiendra dans (3), (3′) et (4) la valeur de $v(P)$ connaissant seulement les valeurs de v et de $\frac{dv}{dn}$ sur C.

3. **Problème de Dirichlet.** — Si l'on connaît pour C la fonction de Green G(P, M), c'est-à-dire si l'on sait résoudre un cas particulier du problème de Dirichlet pour le contour C, l'équation (2) se simplifie et devient

$$(2')\qquad \frac{\partial v(P')}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{dG}{dn}\,ds.$$

En utilisant (10) on obtient

$$2\pi\,\frac{\partial v(P')}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_C v\,\frac{dG}{dn}\,ds - \int_C v\left|\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{dG}{dn} + \frac{dG}{dn}\,\frac{\partial \log \rho}{\partial z}\right| ds.$$

Mais, d'après (9).

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{dG}{dn} = \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right),$$

car on a ici

$$\frac{dG}{ds} = 0$$

et finalement

$$(2'') \quad 2\pi \frac{\partial v(P')}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_C v \frac{dG}{dn}\, ds - \int_C v \left| \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right) + \frac{dG}{dn}\frac{\partial \log \rho}{dz}\right| ds.$$

Cette équation, intégrée par rapport à z, fera connaître une solution du problème de Dirichlet pour l'équation (1) et relatif à S.

On peut calculer la dérivée $\frac{\partial G}{\partial z}$ qui figure dans (2''). G(P, M) est une fonction du contour C, et quand on passe de C à C', la variation δG est donnée par

$$\delta G = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dG_P^{M'}}{dn}\frac{dG_M^{M'}}{dn}\lambda\, ds_{M'} \quad (^1),$$

d'où

$$(12) \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{-1}{2\pi}\int_C \frac{\partial G_P^{M'}}{dn}\frac{dG_M^{M'}}{dn}\, c\, ds_{M'}.$$

La solution du problème de Dirichlet pour l'équation (1) n'est plus unique; la différence w de deux solutions vérifie (1) et s'annule sur S; elle vérifie donc; avec les notations habituelles :

(1') $\Delta w = f(p)$, p étant le pied de la verticale de P sur xOy, avec $w = 0$ sur S. Cette fonction w n'est pas nulle, elle est donnée par la formule connue

$$(13) \qquad w(P) = \frac{-1}{2\pi}\int_D G(P, M) f(m)\, d\sigma_M$$

dans laquelle f est une fonction arbitraire et où D représente le domaine intérieur à C.

D'une façon générale si l'on considère une fonction de P définie par une intégrale de surface de la forme

$$(14) \qquad K(P) = \int_D H(P, M) f(m)\, d\sigma_M$$

lorsque z varie, la variation de K provient de la variation du contour C du domaine D et de celle de H si H est une fonction du contour et l'on a

$$\delta K(P) = \int_D \delta H(PM) f(m)\, d\sigma_M + \int_C H(P, M) f(m) \lambda\, ds,$$

(1) HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, p. 305.

d'où

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \int_D \frac{\partial H}{\partial z} f(m)\, d\sigma_M - \int_C H\, f(m)\, e\, ds. \tag{14'}$$

Pour la fonction w définie par (13), l'intégrale curviligne qui figure dans (14') est nulle car G(P, M) est la fonction de Green du contour et $\frac{\partial G}{\partial z}$ est définie par (12).

4. Remarques. — Certains calculs peuvent être explicités dans les résultats précédents. On peut calculer par exemple les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial z} \log r \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial z} \frac{d \log r}{dn}$$

qui figurent dans (11). L'équation (6) donne en poussant les développements jusqu'aux infiniment petits du second ordre

$$ds_1 = ds\left(1 - \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\lambda^2}{\rho^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda_s'^2}{2}\right) \tag{15}$$

et pour la variation de n quand on passe de M en M_1

$$\delta n = -\lambda_s'\left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right) t - \frac{\lambda_s'^2}{2} n. \tag{16}$$

On en déduit aisément que

$$(\delta\varphi)^2 = \lambda_s'^2$$

et, en remarquant que φ et λ croissent simultanément,

$$\delta\varphi = \lambda_s' = \frac{\lambda_\varphi'}{\rho}. \tag{17}$$

En projetant le contour PMM$_1$ sur Mt et sur Mn on a

$$\delta(r\sin\psi) = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta(r\cos\psi) + \lambda = 0.$$

où ψ est l'angle de MP avec Mn; on en tire

$$\delta r = -\lambda\cos\psi \tag{17'}$$

et

$$\delta\psi = \frac{\lambda\sin\psi}{r}. \tag{17'}$$

En utilisant (17), (17′) et (17″) on trouve

$$\frac{\partial}{\partial z}\log r = \frac{c}{r}\cos\psi \tag{17‴}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\log r}{dn} = \frac{1}{r}\left(-\frac{c}{r}\cos 2\psi + \frac{c'_z}{\rho}\sin\psi\right).$$

5. **Cas particulier.** — En particulier supposons maintenant que toute courbe de niveau C de la surface S soit un cercle dont le rayon ρ soit une fonction connue de z; l'équation (2′) se réduit alors à l'équation de Poisson

$$\frac{\partial v(\mathrm{P}')}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{C}}\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\cos\psi}{r} - \frac{1}{2\rho}\right)ds \tag{18}$$

où ψ est l'angle de MP avec le rayon du point M.

De (18) il résulte que si $\frac{\partial v}{\partial z}$ est positive ou nulle sur S, $\frac{\partial v}{\partial z}$ est positive en tout point intérieur à S.

Par suite si la fonction harmonique $\frac{\partial v}{\partial z}$ est partout positive elle se réduit à une constante (1) et v a la forme

$$v(\mathrm{P}) = k^2 z + f(p)$$

où k^2 est constante et $f(p)$ une fonction arbitraire de p, projection de P sur $x\mathrm{O}y$.

Dans le cas tout particulier où S est un cylindre de révolution de rayon ρ, dans l'équation (18), seul le terme $\frac{\partial v}{\partial z}$ dépend de z et en intégrant par rapport à z on résout immédiatement le problème de Dirichlet si l'on connaît la valeur de v en tout point d'une section droite du cylindre.

6. **Généralisations.** — Il est évident maintenant que tout ce qui précède peut s'étendre à des équations analogues à l'équation (1).

C'est le cas par exemple de l'équation

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = f.$$

(1) Goursat, Analyse III, p. 184.

où

$$F(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c$$

a, b, c et f étant des fonctions de P, quand on connaît une intégrale particulière de l'équation adjointe de $F(u) = 0$ de la forme

$$\alpha(P, M) = U(M)\log r + V(M)$$

où U et V sont réguliers à l'intérieur de C avec $U(P) = -1$.

Un calcul analogue à celui du n° 2 fera encore connaître $v(P)$ si l'on connaît v et $\frac{dv}{dn}$ en tout point de S.

Si l'intégrale particulière α s'annule sur C, on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation précédente (¹).

On peut étudier de la même manière une équation de la forme

$$\Delta F = 0$$

où F est une fonction de P, de v et de ses dérivées par rapport à z, si l'on sait résoudre l'équation

$$F = f(P)$$

où f représente une fonction connue de P.

7. **Problème de Neumann.** — On peut résoudre l'équation (1) en la prenant sous la forme (1′) du n° 3, qu'on vérifie en posant

$$v(P) = A(P) + K(P) \tag{19}$$

où K(P) est la fonction (14) dans laquelle

$$H(PM) = \frac{1}{2\pi}\log r$$

et où A(P) est une fonction de P qui est harmonique par rapport aux coordonnées de p dans le plan xOy, et qui sera déterminée par les conditions aux limites, la fonction f de K restant arbitraire.

Bornons-nous aux problèmes classiques.

(¹) Goursat, *loc. cit.*, p. 232.

Le problème de Dirichlet (D) pour v, se ramène pour A(P) au problème de Dirichlet sur la courbe de niveau C.

Le problème (n) qui consiste à déterminer v connaissant la valeur de $\frac{dv}{dn}$ en tout point d'une section C quelconque, se ramène pour A(P) au problème de Neumann pour C.

La condition de possibilité

$$\int_C \frac{dv}{dn}\, ds = \int_C \frac{d\mathrm{K}}{dn}\, ds$$

s'écrit, d'après l'expression de K(P, M)

$$\int_C \frac{dv}{dn}\, ds = \int_D f(m)\, d\sigma$$

qui doit être vérifiée quel que soit z.

Le problème de Neumann (N) relatif à S se ramène à un problème aux limites pour la fonction harmonique A(P) car

$$\frac{dv}{d\mathrm{N}} = \sin \widehat{\mathrm{N}z}\, \frac{dv}{dn} + \cos \widehat{\mathrm{N}z}\, \frac{\partial v}{\partial z}$$

et A doit satisfaire en tout point de C a une condition de la forme

$$\frac{d\mathrm{A}}{dn} + c\, \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} = \varphi(\mathrm{M}) \tag{20}$$

où φ est une fonction connue en tout point M de C.

Si l'on prend pour A(P) un potentiel de simple couche

$$\mathrm{A}(\mathrm{P}) = \int_C \mu(s'z) \log r\, ds'$$

dont la densité μ est fonction de s et de z, l'équation (20) prend la forme

$$\pi\mu(sz) - \int_C \mu(s'z)\, \frac{\cos\psi}{r}\, ds' - c\, \frac{\partial}{\partial z} \int_C \mu(s'z) \log r\, ds' = \varphi(sz), \tag{20'}$$

où φ est une fonction connue de s et de z.

En utilisant les équations (10) et ($17'''$) et en rappelant qu'en tout point de C on a

$$c = \frac{\partial \rho}{\partial z}, \tag{21}$$

on met l'équation (20′) sous la forme

$$\pi\mu(s, z) - \int_C K(ss'z)\,\mu(s'z)\,ds' = \Phi(s, z), \tag{22}$$

où

$$K = (1 + cc')\frac{\cos\psi}{r} + \frac{cc'}{\rho}\log r,$$

désignant la valeur de c au point d'abscisse s' de C et où

$$\Phi = \varphi + c\int_C \frac{\partial\mu}{\partial z}\log r\,ds'.$$

L'équation (22) se résoudra par approximations successives soit en prenant pour première approximation $\frac{\varphi}{\pi}$, soit en résolvant d'abord l'équation (22) où l'on remplace Φ par φ; le noyau de l'équation intégrale à résoudre n'a qu'un infini logarithmique. On calculera les valeurs successives de μ en utilisant chaque fois l'équation de transformation (10).

Il restera à ajouter à cette solution particulière l'intégrale générale de l'équation obtenue en faisant $\varphi = 0$ dans l'équation (20′).

8. **Cas singulier.** — Ce qui précède suppose que tout plan horizontal coupe la surface donnée S suivant une courbe de niveau unique; si S se replie on aura à résoudre les trois problèmes précédents dans un domaine D compris entre deux courbes C_1 et C_2 qui s'enveloppent. Les problèmes (D) et (n) sont connus. Pour résoudre le problème (N) on peut considérer la fonction harmonique A(P) comme la somme de deux potentiels $A_1(P)$ et $A_2(P)$ de simple couche de densités respectives $\mu_1(s_1 z)$ étalée sur C_1 et $\mu_2(s_2 z)$ étalée sur C_2 et l'on formera un système de deux équations en μ_1 et μ_2, qu'on pourra résoudre par approximations successives.

Sur une telle surface il y a lieu de considérer en particulier des courbes de niveau singulières le long desquelles le plan tangent à S est horizontal. Pour une courbe singulière C_0, que nous supposerons dans le plan $z = 0$, le problème (N) n'est plus résolu par l'équation (22).

Si le plan $z = 0$ a un contact du premier ordre avec S, il est facile de voir que le rayon de courbure en un point d'une courbe

de niveau C voisine de C_0, est donné par un développement suivant les puissances de $z^{\frac{1}{2}}$; soit

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 z^{\frac{1}{2}} + \rho_2 \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \dots$$

et

$$c = \frac{1}{2}\rho_1 z^{-\frac{1}{2}} + \rho_2 + \dots.$$

Par suite dans (22) le noyau K a un développement de la forme

$$\mathrm{K} = \frac{k_0}{z} + \frac{k_1}{z^{\frac{1}{2}}} + k_2 + k_3 z^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

où $k_0, k_1, \dots$, sont des fonctions connues de s et s'.

Le développement de φ est de même nature où les coefficients $\varphi_0, \varphi_1, \dots$, sont des fonctions connues de s.

Prenons pour la densité $\mu(s\,z)$ un développement de la forme

$$\mu = \mu_1 z^{\frac{1}{2}} + \mu_2 z + \dots. \tag{23}$$

En portant le développement (23) dans l'équation (22) et en égalant les parties principales, on obtient en faisant tendre C vers C_0 l'équation intégrale de première espèce

$$\int_{C_0} \mu_1 \log r\, ds' = -\frac{2\varphi_0}{\rho_1} = -\frac{\rho_1}{2\pi}\int_{C_0} f(m)\log r\, ds'. \tag{24}$$

On obtiendra ensuite des équations pour définir de proche en proche les coefficients $\mu_2, \mu_3, \dots$.

Le potentiel A(P) a au voisinage de C_0 un développement de la forme

$$\mathrm{A}(\mathrm{P}) = z^{\frac{1}{2}} a_1(\mathrm{P}) + z\, a_2(\mathrm{P}) + \dots$$

et, d'après (24), le coefficient $a_1(\mathrm{P})$ est défini par le potentiel de simple couche

$$a_1(\mathrm{P}) = -\frac{\rho_1}{2\pi}\int_{C_0} f(m)\log r\, ds'.$$

Le cas où $z = 0$, a le long de C_0 un contact d'ordre supérieur avec S, se traite de même

9. **Cas de la surface de révolution.** — Pour terminer étudions

le problème (N) dans le cas particulier où la surface S est de révolution autour de Oz; le rayon ρ du parallèle étant une fonction connue de z. Supposons la fonction arbitraire $f(m)$ développée en série de Fourier

$$f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n(\delta)\cos n\theta + b_n(\delta)\sin n\theta \},$$

où δ et θ sont les coordonnées polaires dans le plan xOy et où l'on suppose que la série

$$\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$$

est convergente quel que soit δ.

La fonction

$$K(P) = \frac{1}{2\pi}\int_D f(m)\log r\, d\sigma_M$$

s'écrit sous la forme

$$(25)\qquad K = \sum \frac{-1}{2n}\left\{\left(\frac{A_n}{\delta^n} + A_{-n}\delta^n\right)\cos n\theta + \left(\frac{B_n}{\delta^n} + B_{-n}\delta^n\right)\sin n\theta\right\}$$

en posant

$$A_n = \int_0^{\delta} \delta'^{n+1} a_n(\delta')\, d\delta', \qquad A_{-n} = \int_{\delta}^{\rho} \delta'^{1-n} a_n(\delta')\, d\delta'.$$

et où B_n et B_{-n} sont construits de façon analogue avec $b_n(\delta)$.

Dans $f(m)$ les fonctions a_n et b_n sont supposées bornées, mais pour que $K(P)$ ait un sens lorsque P vient sur Oz, il faut supposer que a_n et b_n sont, pour δ infiniment petit, dès que n est supérieur à 2, d'ordre

$$n' = n - 2.$$

La série K est absolument convergente comme la série Σn^{-2} et en dérivant terme à terme on obtient pour $\frac{dK}{dn}$ sur le cercle C de rayon ρ.

$$(26)\qquad \frac{dK}{dn} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{\rho^{n+1}}\{A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\sin n\theta\}.$$

L'équation (14') donne ensuite

$$(27)\qquad \frac{dK}{dz} = -\frac{\rho'}{2\pi}\int_C f(m)\log r\, ds' = \frac{\rho\rho'}{2}\sum \frac{1}{n}\{a_n(\rho)\cos n\theta + b_n(\rho)\sin n\theta\},$$

où ρ' est la dérivée de ρ par rapport à z.

Pour résoudre l'équation (20′) posons maintenant

$$\mu(z\theta)) = \Sigma \alpha_n(z)\cos n\theta + \beta_n(z)\sin n\theta.$$

Si l'on suppose le second membre de (20′) développé en série de Fourier

$$\varphi(z\theta) = \frac{1}{\sin \overset{\frown}{N}z}\frac{dv}{d\overset{\frown}{N}} = \Sigma \lambda_n(z)\cos n\theta + \mu_n(z)\sin n\theta,$$

où la série

$$\Sigma(\lambda_n^2 + \mu_n^2)$$

est convergente. Le coefficient $\alpha_n(z)$ est défini par l'équation différentielle ordinaire

(28) $$\rho\rho'\alpha_n' + n\alpha_n = k_n,$$

où

$$\pi k_n = \frac{\rho\rho'^2}{2} a_n(\rho) - \frac{n}{2\rho^{n+1}} A_n(\rho) - n\lambda_n,$$

et $\beta_n(z)$ par une équation analogue.

D'après (28) la série $\Sigma(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ est convergente puisqu'il en est ainsi de $\Sigma(\lambda_n^2 + \mu_n^2)$.