BULLETIN DE LA S. M. F.

A. RAUCH

Sur les directions de divergence des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 246-252

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__246_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES DIRECTIONS DE DIVERGENCE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. RAUCH.

1. Appelons direction de divergence ou de convergence de l'ordre apparent λ d'une fonction entière $f(z)$ une direction d'argument θ telle que l'intégrale $\int^{\infty} \frac{\overleftarrow{\log}\,|f(re^{i\theta})|}{r^{\lambda+1}}\,dr$ diverge ou converge respectivement.

M. Valiron (1) définit comme suit l'ordre apparent de $f(z)$ dans une direction D : l'ordre apparent de $f(z)$ dans la direction D est égal à

$$\overline{\lim_{B=0}} \frac{\overleftarrow{\log}\,\overleftarrow{\log}\,M(r, B)}{\log r},$$

où $M(r, B)$ désigne le maximum de $f(z)$ pour $|z| = r$ et où z appartient à un angle B de bissectrice D. Il démontre le théorème suivant (1) :

Les côtés D *des angles formés par les directions pour lesquelles l'ordre apparent est plus grand que* λ *sont tels que,* $r_n(x, A)$ *étant la suite des zéros de* $f(z) - x$ *situés dans l'angle* A *de bissectrice* D, *la série*

$$\sum \frac{1}{r_n(x, A)^{\delta}}$$

diverge quel que soit $\delta < \lambda$ *et pour tout* x *sauf un au plus.*

Cela nous a conduit à la proposition suivante :

1. *Les cotés* D *des angles formés par les directions de divergence de l'ordre apparent* λ *sont tels que*

$$\sum \frac{1}{r_n(x, A)^{\lambda}}$$

(1) *Sur les directions de Borel des fonctions entières* (*Annali di Matematica*, 4e série, t. 9, 1931, p. 273-285). Voir aussi, *Comptes rendus*, t. 194, 1932, p. 1306, théorème II; et t. 196, 1933, p. 1458.

diverge quel que soit l'angle A *de bissectrice* D *et pour tout* x *sauf un au plus.*

Supposons que

$$\int^{\infty} \frac{\overline{\log} f(re^{i\theta'})\,|\,dr}{r^{\lambda+1}}$$

converge et que

$$\int^{\infty} \frac{\overline{\log}\,|f(re^{i\theta''})\,|\,dr}{r^{\lambda+1}} \qquad (\theta''-\theta'=\alpha)$$

diverge. Divisons l'angle α en quadrilatères par les cercles

$$z=(1+\alpha)^n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Soit $C(n)$ le cercle concentrique au plus petit cercle contenant le quadrilatère

$$(1+\alpha)^n \leqq |z| \leqq (1+\alpha)^{n+1}$$

et de rayon double. Soit $R(n)$ son rayon. On a

$$R(n)=\text{const.}\,\alpha(1+\alpha)^n,$$

soit $N(n)$ le nombre des zéros de $F(F-1)$, où

$$F=\frac{f-a}{b-a},$$

a et b étant des constantes. Par conséquent

$$I'=\int^{\infty} \frac{\overline{\log}\,|F(re^{i\theta'})\,|\,dr}{r^{\lambda+1}}$$

converge et

$$I''=\int^{\infty} \frac{\overline{\log}\,|F(re^{i\theta''})\,|\,dr}{r^{\lambda+1}}$$

diverge.

Appliquons avec M. Milloux (1) le théorème de Boutroux-Cartan (2) : P_1, P_2, P_3, ..., P_p étant p points distincts ou non d'un

---

(1) *Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta Math.*, t. 52, 1928, p. 189-255).

(2) *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires, lacunaires et leurs applications* (thèse 1928).

plan et h un nombre quelconque positif, on a

$$MP_1 MP_2 \dots MP_p > h^p,$$

pour tout point M, sauf peut être pour des points qui peuvent être enfermés dans des cercles en un nombre au plus égal à p dont la somme des rayons est $2eh$.

Nous prenons comme points P les zéros de $F(F-1)$ du cercle $C(n)$ et $2eh = \frac{R(n)}{100}$. Appelons $B(n)$ la région du cercle $C(n)$ extérieure aux cercles de Cartan; d'après le choix de h on voit que sur la demi-droite d'argument θ' se trouve un ensemble de points de $B(n)$ de mesure const. $R(n) = \text{const.}\ \alpha(1+\alpha)^n$ de sorte que si $|F(z)|$ atteint en z'_n le minimum de ses valeurs pour

$$(1+\alpha)^n \leq |z| \leq (1+\alpha)^{n+1}, \qquad \arg z = \theta', \qquad z \text{ dans } B(n),$$

on a

$$\int^{\infty} \frac{\overset{-}{\log}|F(re^{i\theta'})|\,dr}{r^{\lambda+1}}$$

$$\geq \sum \int_{(1+\alpha)^n}^{(1+\alpha)^{n+1}} \frac{\overset{-}{\log}|F(re^{i\theta'})|\,dr}{r^{\lambda+1}}$$

$$\sum \int_{B(n)} \frac{\overset{+}{\log}|F(re^{i\theta'})|\,dr}{r^{\lambda+1}} > \text{const.} \sum \frac{\alpha \overset{+}{\log}|F(z'_n)|}{|z'_n|^{\lambda}},$$

de sorte que

$$\sum \alpha \frac{\overset{+}{\log}|F(z'_n)|}{|z'_n|^{\lambda}} \tag{1}$$

converge.

De même, on voit que si $|F(z)|$ atteint en x''_n le maximum de ses valeurs pour

$$(1+\alpha)^n \leq |x| \leq (1+\alpha)^{n+1}, \qquad \arg x = \theta'',$$

$$\int_{1+\alpha^n}^{(1+\alpha^n)^{n+1}} \frac{\overset{-}{\log}|F(re^{i\theta''})\,dr}{r^{\lambda+1}} \leq \text{const.} \frac{\alpha \overset{+}{\log}|F(x''_n)|}{|x''_n|^{\lambda}},$$

de sorte que

$$\sum \frac{\alpha \overset{+}{\log}|F(x''_n)|}{|x''_n|^{\lambda}}$$

diverge. Mais x''_n n'est pas forcément un point de $B(n)$. Or en

tenant compte de la valeur de h, on voit que dans le cercle de centre x_n'' et de rayon $\frac{R(n)}{90}$ se trouve au moins une circonférence concentrique faisant partie de $B(n)$. Si $|F(z)|$ atteint au point z_n'' de cette dernière le maximum de ses valeurs sur ce cercle, on a

$$|F(z_n'')| \geqq |F(x_n'')|.$$

Par conséquent

$$\sum \frac{\alpha \overset{+}{\log} |F(z_n'')|}{|z_n''|^{\lambda}} \tag{2}$$

diverge. Nous pouvons ensuite tracer une courbe $L(n)$ allant du point z_n' au point z_n'' en évitant les cercles de Cartan, qui a pour longueur const. $R(n)$. En chaque point $M(z_n)$ de la courbe $L(n)$ on a

$$N(|z - z_n| = \rho ; f = a) = \log \frac{\rho^p}{MP_1 MP_2 \dots MP_p} < \log \left(\frac{\rho}{h}\right)^p = p \log \frac{\rho}{h}$$

$$= \text{const. } p \log \frac{200 e \rho}{R(n)} < \text{const. } N(n) \log \frac{200 e \rho}{R(n)},$$

où le cercle $|z - z_n| = \rho$ est intérieur à $C(n)$ et où $P_1, P_2, \dots, P_p$ sont les points du cercle $|z - z_n| = \rho$ en lesquels $f(z) = a$ ou b. Nous pouvons toujours supposer $\frac{\rho}{R(n)} = \text{const.}$, de sorte que

$$N(|z - z_n| = \rho ; \quad f = a) + N(|z - z_n| = \rho ; \quad f = b) < \text{const. } N(n).$$

Or d'après une inégalité fondamentale de M. Valiron, on a

$$T\left(|z - z_n| = \frac{\rho}{\mu}, F\right)$$

$$< \text{const.} \left[N(|z - z_n| = \rho ; F = 0) \right.$$

$$+ N(|z - z_n| = \rho ; F = 1) + \log \frac{1}{1 - \frac{1}{\mu}}$$

$$\left. + \overset{-}{\log} |F(z_n)| + \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho |F'(z_n)|} + \text{const.} \right].$$

On en déduit

$$\log M\left(|z - z_n| = \frac{\rho}{2\mu} ; F\right) \leqq 3\, T\left(|z - z_n| = \frac{\rho}{\mu} ; F\right)$$

$$< \text{const.} \left[N(n) + \overset{+}{\log} |F(z_n)| + \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho |F'(z_n)|} + \text{const.} \right].$$

En supposant maintenant les constantes ρ, μ choisies de façon que le cercle $|z - z_n| = \frac{\rho}{2\mu}$ contienne le point z''_n, on obtient

$$(3)\quad \overset{-}{\log}|F(z''_n)| \leqq \log M\left(|z - z_n| = \tfrac{\rho}{2\mu};\ F\right)$$
$$\leqq \text{const.}\left[N(n) + \overset{+}{\log}|F(z_n)| + \overset{-}{\log}\frac{1}{\rho|F'(z_n)|} - \text{const.}\right].$$

Si l'on a en tout point de la courbe $L(n)$

$$\rho|F'(z)| < 1,$$

on en déduit

$$\overset{-}{\log}|F(z''_n)| < \overset{+}{\log}|F(z'_n)| + \text{const.}$$

L'ensemble correspondant des termes de la série (2) a donc une somme finie, car la série (1) converge. En supprimant ces termes dans (1) et (2), il nous reste la série convergente

$$(1')\qquad \sum{}' \alpha \frac{\overset{-}{\log}|F(z'_n)|}{|z'_n|^\lambda}$$

et la série divergente

$$(2')\qquad \sum{}' \alpha \frac{\overset{-}{\log}|F(z''_n)|}{|z''_n|^\lambda}.$$

Sur chaque courbe $L(n)$ restante se trouve au moins un point z_n en lequel on a

$$\rho|F'(z_n)| > 1.$$

Pour chacun de ces n nous prenons le premier de ces points z_n rencontré à partir de z'_n, de sorte que

$$\overset{+}{\log}|F(z_n)| < \overset{+}{\log}|F(z'_n)| + \text{const.}$$

L'inégalité (3) devient ainsi

$$\overset{+}{\log}|F(z''_n)| < \text{const.}\left[N(n) + \overset{+}{\log}|F(z'_n)| - \text{const.}\right],$$

d'où

$$(4)\quad \frac{\overset{+}{\log}|F(z''_n)|}{|z''_n|^\lambda} < \text{const.}\frac{N(n)}{(1+\alpha)^{\lambda n}} - \text{const.}\frac{\overset{+}{\log}|F(z'_n)|}{|z'_n|^\lambda} + \frac{\text{const.}}{(1-\alpha)^{\lambda n}}.$$

Comme α est une constante on peut la supprimer dans (1') et (2')

sans changer les caractères des séries de sorte que, d'après (4),

$$\sum \frac{N(n)}{(1+\alpha)^{\lambda n}} \tag{5}$$

diverge. On en déduit :

II. *Si deux directions faisant entre elles un petit angle* α *sont respectivement de convergence et de divergence de l'ordre* λ, *la série*

$$\sum \frac{1}{r_n(x, A)^{\lambda}}$$

relative aux modules des racines de $f(z) - x$ *situées dans un angle* A *de mesure* 3α *et admettant même bissectrice que les deux directions, diverge pour toute valeur de* x *sauf une au plus.*

Supposons nos hypothèses vérifiées quel que soit α même si α tend vers zéro d'une façon quelconque; on remplacera α par une fonction $\alpha(n)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, mais pas trop vite de façon que sa suppression dans (1′) et (2′) n'altère pas le caractère des nouvelles séries. Nous avons ainsi une série (5) divergente correspondante à un angle tendant vers zéro, ce qui démontre le théorème I.

En appliquant ensuite les résultats de ma thèse (1) on voit que sur les directions D du théorème I se trouve une suite infinie de centres de cercles de remplissage d'ordre λ de *divergence* pour les zéros de $f(z) - P(z)$, où $P(z)$ est une constante quelconque sauf une au plus ou une fonction méromorphe quelconque de la classe de *convergence* de l'ordre λ sauf deux au plus.

2. Revenons au cas où α est constant. Joignons z'_n et z''_n par un segment de droite $\Gamma(n)$. On a, en supposant que $f'(z)$ atteint au point x_n de $\Gamma(n)$ le maximum de ses valeurs prises sur $\Gamma(n)$,

$$|f(z''_n) - f(z'_n)| = \left| \int_{\Gamma(n)} f'(z)\, dz \right| \leq |z''_n - z'_n|\, |f'(x_n)|$$
$$= \text{const.}\ \alpha(1+\alpha)^n\, |f'(x_n)|,$$

(1) ***Extension de théorèmes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes*** (*Journ. de Math.*, t. 12, 1933, p. 109-171).

d'où

$$\log^{-}|f(z_n'')| \leq \log^{-}|f(z_n')| + \log^{+}|f'(x_n)| + n\log(1+\alpha) + \text{const.},$$

ou encore

$$\frac{\log^{-}|f(z_n'')|}{|z_n''|^{\lambda}} \leq \text{const.}\,\frac{\log^{+}|f(z_n')|}{|z_n'|^{\lambda}} + \text{const.}\,\frac{\log^{+}|f'(x_n)|}{|x_n|^{\lambda}} + \frac{\text{const.}\,n\alpha}{(1+\alpha)^{\lambda_n}} + \frac{\text{const.}}{(1+\alpha)^{\lambda n}}.$$

Or le premier membre est terme général d'une série divergente tandis que le premier et les deux derniers termes du second membre sont termes généraux de séries convergentes, de sorte que

$$\sum \frac{\log^{+}|f'(x_n)|}{|x_n|^{\lambda}} \tag{6}$$

diverge. On voit qu'il en est encore ainsi si $\alpha = \alpha(n)$ tend vers zéro comme plus haut. On en déduit que l'ordre apparent de $f'(z)$ dans les directions (D) du théorème I est au moins λ. Nous retrouverons ainsi la première partie d'un théorème de M. Valiron (¹).

(¹) Déjà cité.