BULLETIN DE LA S. M. F.

V. ROMANOVSKY

# Un théorème sur les zéros des matrices non négatives

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 61 (1933), p. 213-219

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__213_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# UN THÉORÈME SUR LES ZÉROS DES MATRICES NON NÉGATIVES;

PAR M. V. ROMANOVSKY

(Tachkent).

1. Soit

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (a_{ih} \geq 0),$$

une matrice non négative carrée. Les racines de l'équation caractéristique

$$A(s) \equiv |sE - A| = 0 \tag{1}$$

de la matrice A, ou, simplement, les racines ou les zéros de A, sont profondément étudiées par G. Frobenius (1) qui, parmi d'autres résultats, a montré que (1) a une racine réelle positive simple, $r$, surpassant en valeur absolue ou égale à toutes les autres racines de (1), pourvu que A soit une matrice indécomposable, c'est-à-dire telle que, par une permutation identique des lignes et des colonnes, elle ne peut être mise sous la forme

$$A = \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix},$$

où P, Q, R, S sont des sous-matrices, P et S étant des matrices carrées, Q et R des matrices rectangulaires (en général) et où l'une au moins des matrices Q, R est nulle.

Le théorème que nous démontrerons plus loin donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que (1) ait des racines du module $r$ de la racine maximale de A (comme est nommé $r$ par G. Frobenius), la matrice A étant supposée indécomposable. Ce

(1) G. FROBENIUS, *Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen* (*Sitzungsberichte der Pr. Akad. der Wissensch.*, 1912, p. 456-477).

théorème me semble être nouveau et assez intéressant et important pour être publié.

2. Supposons donc que A est indécomposable. Alors, évidemment, elle ne peut contenir des lignes ou des colonnes vides, ou, en d'autres termes, toute ligne et toute colonne de A contiendront au moins un élément $a_{ih}$ qui n'est pas nul. Cette condition fait tout de suite voir qu'il y a toujours une suite d'éléments

$$a_{gh_1}, \quad a_{h_1h_2}, \quad \ldots, \quad a_{h_k\,g},$$

qui tous ne sont pas nuls. Nous appelons une telle suite *cycle de l'ordre* $k$ de A et A *matrice cyclique de l'indice* $k$, si tous les cycles de A ont leurs ordres divisibles par $k$.

Évidemment, pour $k \geq 2$, on doit avoir $a_{ii} = 0$ $(i = \overline{1, n})$ et $a_{hi} = 0$ toutes les fois que $a_{ih} \neq 0$ et $k > 2$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant qui fait l'objet de cette note.

*Pour que la matrice non négative et indécomposable* A *ait pour racines toutes les racines de l'équation*

$$s^k - r^k = 0, \tag{2}$$

*où* $r$ *est la racine maximale de* A, *il faut et il suffit que* A *soit une matrice cyclique de l'indice* $k$.

Nous remarquons ici qu'on a toujours $r > 0$ pour les matrices A indécomposables et non négatives, parce que (1) $r$ est contenu entre la plus grande et la plus petite des sommes

$$a_i = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \qquad (h = \overline{1, n})$$

qui sont toutes positives.

3. Démontrons d'abord que la condition énoncée est suffisante.

---

(1) G. Frobenius, *Ueber Matrizen aus positiven Elementen* (*Sitzungsberichte der Pr. Akad. der Wissensch.*, 1908, p. 476).

On remarque que

$$(3) \qquad \Delta(s) = s^n + \sum_{h=1}^{n} s^{n-h}(-1)^h \sum_{\alpha(h)} [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n] a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

où $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n] = +1$ ou $-1$ suivant que la permutation $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ des nombres $1, 2, \ldots, n$ consiste d'un nombre pair ou impair d'inversions et $\sum_{\alpha(h)}$ désigne une somme prise pour toutes les permutations $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ qui laissent fixes $n-h$ des nombres $1, 2, \ldots, n$, ces $n-h$ nombres étant pris dans toutes les combinaisons possibles et les éléments correspondants

$$a_{i_1 i_1}, \quad a_{i_2 i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_{n-h} i_{n-h}}$$

qui entrent dans le produit $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ étant remplacés par l'unité.

Or, la matrice A est cyclique de l'indice $k$, donc, sous le signe $\sum_{\alpha(n)}$ on ne rencontrera que les membres composés des cycles dont les ordres sont divisibles par $k$, d'où l'on conclut que le nombre $h$ est aussi divisible par $k$. On voit de cette manière que $\Delta(s)$ a la forme

$$\Delta(s) = s^n + A_1 s^{n-k} + A_2 s^{n-2k} + \ldots + A_\mu s^{n-\mu k},$$

où $\mu k \leq n$.

Soit maintenant $s_0$ une des racines de (2). On aura

$$\begin{aligned} \Delta(s_0) &= s_0^n [1 + A_1 r^{-k} + A_2 r^{-2k} + \ldots + A_\mu r^{-\mu k} \\ &\quad - \left(\frac{s_0}{r}\right)^n (r^n + A_1 r^{n-k} + \ldots + A_\mu r^{n-\mu k}] \\ &= \Delta(r) = 0. \end{aligned}$$

ce qui prouve que notre condition est suffisante.

**4.** Pour démontrer sa nécessité nous établirons d'abord un lemme simple et très utile dans nombre des cas concernant l'étude des zéros des matrices.

Considérons le système d'équations linéaires homogènes

$$(4) \qquad s x_h = \sum_i x_i a_{ih} \qquad (i, h = \overline{1, n}).$$

LEMME. — *Soient*

$$s = |s|(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$x_h = |x_h|(\cos\theta_h + i\sin\theta_h) \qquad (h = \overline{1, n}).$$

*les valeurs de s et $x_h$ satisfaisant (4). Alors*

$$(5) \qquad |s_i||x_h| = \sum_i |x_i| a_{ih} \cos(\theta_i - \theta_h - \theta) \qquad (i, h = \overline{1, n}).$$

En effet, on a

$$s_i |x_h| \cos(\theta_h + \theta) = \sum_i |x_i| a_{ih} \cos\theta_i,$$

$$s_i |x_h| \sin(\theta_h + \theta) = \sum_i |x_i| a_{ih} \sin\theta_i,$$

d'où, en multipliant la première de ces relations par $\cos(\theta_h + \theta)$ et la seconde par $\sin(\theta_h + \theta)$ et ajoutant les résultats, on obtient (4).

Soit maintenant $s_0$ une des racines primitives de (2) satisfaisant (1), par exemple

$$s_0 = r\left(\cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k}\right),$$

et soit $x_h^0 (h = \overline{1, n})$ la solution correspondante du système (4). Les $x_h^0$ ne sont pas tous nuls et les relations (5) deviendront

$$(6) \qquad r|x_h^0| = \sum_i |x_i^0| a_{ih} \cos\left(\theta_i - \theta_h - \frac{2\pi}{k}\right) \qquad (i, h = \overline{1, n}).$$

On en conclut que

$$(7) \qquad r|x_h^0| \leq \sum_i |x_i^0| a_{ih} \qquad (i, h = \overline{1, n}),$$

si pour tous $a_{ih} \neq 0$ on n'a pas $\cos\left(\theta_i - \theta_h - \frac{2\pi}{k}\right) = 1$.

Nous allons montrer que pour tous $a_{ih} \neq 0$, on doit avoir

$$\cos\left(\theta_i - \theta_h - \frac{2\pi}{k}\right) = 1.$$

En effet, si cela n'avait pas lieu, on obtiendrait les inégalités (7) pour certaines valeurs de $h$ au moins.

Mais, pour $s = r$, comme l'a démontré G. Frobenius (¹), tous les mineurs du déterminant

$$A(s) = |sE - A|$$

sont positifs, puisque A est indécomposable. Donc, le système

$$ry_i = \sum_h a_{ih} \qquad (i, h = \overline{1, n}) \tag{8}$$

a une solution $y_i^0 > 0 \left(i = \overline{1, n}\right)$.

Multiplions les deux membres de (7) par $y_h^0$ et faisons la somme pour $h = \overline{1, n}$ : on aura, en tenant compte de (8),

$$r\sum_h |x_h^0|\, y_h^0 < \sum_i |x_i^0| \sum_h a_{ih} y_h^0 = r\sum_i |x_i^0|\, y_i^0,$$

ce qui est impossible (²).

Donc, on doit avoir $\cos\left(\theta_i - \theta_h - \frac{2\pi}{k}\right) = 1$ chaque fois que $a_{ih} \neq 0$.

Nous avons remarqué plus haut que la matrice A qui est indécomposable doit avoir des cycles tels que

$$a_{gh_1},\quad a_{h_1 h_2},\quad \ldots,\quad a_{h_{m-1} g},$$

où tous les éléments sont différents de zéro. Par conséquent, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\theta_g - \theta_{h_1} - \frac{2\pi}{k}\right) = 1,\\
&\cos\left(\theta_{h_1} - \theta_{h_2} - \frac{2\pi}{k}\right) = 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\cos\left(\theta_{h_{m-1}} - \theta_g - \frac{2\pi}{k}\right) = 1,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\theta_g - \theta_{h_1} - \frac{2\pi}{k} = 2\sigma_1\pi,\\
&\theta_{h_1} - \theta_{h_2} - \frac{2\pi}{k} = 2\sigma_2\pi,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\theta_{h_{m-1}} - \theta_g - \frac{2\pi}{k} = 2\sigma_m\pi,
\end{aligned}$$

---

(¹) G. Frobenius, *loc. cit.*, p. 462.

(²) La conclusion reste la même, $r < r$, si l'on suppose que quelques-unes des inégalités (7) sont remplacées par les égalités.

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ étant des nombres entiers. En ajoutant ces égalités, on obtient l'égalité

$$-m\frac{2\pi}{k} = 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m)\pi,$$

qui montre que $m$ doit être divisible par $k$.

De cette manière nous voyons que les ordres de tous les cycles de A doivent être des multiples de $k$, si A admet comme zéros les racines de l'équation (2), ce qui prouve la nécessité de notre condition.

3. Nous tirerons quelques conséquences immédiates du théorème démontré.

I. Si

$$\Lambda(0) = |A| = 0,$$

la matrice A ne peut être cyclique que d'un indice qui est un diviseur de l'ordre de A. Donc, si l'ordre $n$ de A est un nombre premier, A est ou non cyclique ou cyclique de l'indice $n$. Elle peut être mise, dans le dernier cas, sous la forme

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m-1,m} \\ a_{m1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

II. Pour que la matrice indécomposable A n'ait que la racine $r_1 = \omega r$ du module $r$, il faut et il suffit qu'on puisse la réduire, par une permutation identique des lignes et des colonnes, à la forme

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1,m+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m,m+1} & \ldots & a_{m,n} \\ a_{m+1,1} & \ldots & a_{m+1,m} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,m} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

III. Si A est une matrice indécomposable et cyclique de l'indice $k$, l'équation (1) peut être écrite comme il suit :

$$A(s) = s^{\lambda}(s^k - r^k)(s^k - \Lambda_1 r^k)\ldots(s^k - \Lambda_m r^k) = 0.$$

où

$$r + mk = n, \qquad r \geq 0, \qquad |\lambda_1| = 1, \qquad \ldots, \qquad |\lambda_m| = 1.$$

IV. La matrice non négative $A$ est dite stocastique si

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} = 1 \qquad (i = \overline{1, n}).$$

Si elle est de plus indécomposable et cyclique de l'indice $k$, elle admet comme zéros simples les racines de l'équation

$$s^k - 1 = 0,$$

puisque sa racine maximale est $s_0 = 1$. Inversement, elle est cyclique de l'indice $k$, si, étant indécomposable, elle admet les racines de cette équation comme ses zéros.