BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ CHARRUEAU

Sur un problème concernant l'équilibre relatif de masses liquides en rotation

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 159-181

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__159_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT L'ÉQUILIBRE RELATIF DE MASSES LIQUIDES EN ROTATION;

PAR M. ANDRÉ CHARRUEAU.

1. **Énoncé du problème.** — Nous nous proposons de traiter une question de physique mathématique que *Globa-Mikhaïlenko* a abordée dans sa thèse de doctorat d'État publiée, en 1920, dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* et dont un compte rendu, rédigé par *Appell*, figure au *Bulletin des sciences mathématiques* (2e série, t. XLV, 1921, p. 10-12). Cette question concerne les surfaces d'équilibre relatif de révolution, voisines du cylindre à section droite circulaire, d'une masse liquide homogène, sans pesanteur, en rotation uniforme autour de son axe de révolution, limitée par deux disques plans circulaires égaux tournant avec elle et soumise seulement à la tension superficielle. L'axe de rotation et de révolution est la droite joignant les centres des deux disques, lesquels sont perpendiculaires à cet axe et distants de h (l'unité de longueur est prise égale au rayon des disques). Le volume donné, constant, de la masse liquide est πh et la pression dans le milieu environnant est supposée uniforme. Globa-Mikhaïlenko a consacré à l'étude de ce problème les vingt-trois premières pages de sa thèse; mais, pour le second des deux cas considérés par lui, les résultats sont inexacts en ce qui concerne les vitesses dites de bifurcation (pour chacune desquelles une suite de figures d'équilibre, de révolution, non cylindriques, vient se confondre avec le cylindre). De plus, la méthode suivie par cet auteur ne lui a pas permis de déterminer avec précision ces surfaces voisines du cylindre, ni de calculer les vitesses correspondantes. On y parvient par un procédé tout différent, en partant de l'équation différentielle générale du méridien des figures d'équilibre relatif, de révolution, d'une masse en rotation, à tension superficielle, sans pesanteur, placée dans un milieu à pression uniforme, et en opérant d'une façon un peu analogue à celle que

nous avons adoptée, pour l'étude des anneaux de Plateau, dans notre thèse (Paris, juin 1928). Le tome IV, fascicule I, 2e édition, du *Traité* de *Mécanique rationnelle* d'Appell renferme une analyse d'une partie de ce travail (dans les pages 295 à 328).

Rappelons que, si l'axe de révolution et de rotation est pris pour axe $y'y$, cette équation différentielle *hyperelliptique* du méridien (*voir* § 39 de notre thèse) est déduite de

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho} = 4k^2x^2 + 2A. \tag{1}$$

et s'écrit

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{k^2x^4 + Ax^2 + B}{\sqrt{x^2 - (k^2x^4 + Ax^2 + B)^2}}; \tag{2}$$

τ est le rayon de courbure du méridien et ρ, le second rayon de courbure principal de la surface, chacun d'eux compté positivement quand, le parcourant de la surface vers le centre de courbure, on pénètre dans le liquide en rotation, au départ de la surface, et négativement dans le cas contraire; k^2, A et B sont des constantes et

$$k^2 = \frac{\omega^2 \delta}{8f}, \tag{3}$$

δ, ω et f étant la densité du liquide en rotation, la vitesse angulaire de rotation et la valeur de la tension superficielle.

Rappelons aussi que Plateau a constitué un cylindre d'huile, immobile, dans un liquide alcoolique *de même densité*, à l'aide de deux disques circulaires parallèles, de même rayon, et tous deux perpendiculaires à la droite joignant leurs centres (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXIII. *Recherches sur les figures d'équilibre*, par Plateau, § 45 et 46). Au sujet de cette expérience, on pourra consulter aussi les *Traités sur la Capillarité* de Poincaré (p. 95 et 101) et de M. Bouasse (1924, p. 119). Supposons, à présent, que ces disques, maintenus à une distance invariable, et la masse d'huile attenante tournent à une vitesse *uniforme* autour de l'axe des disques, le liquide alcoolique étant supposé en équilibre absolu. On démontre aisément que les équations (1) et (2), établies pour le cas d'un liquide en rotation sans pesanteur, placé dans un milieu à pression uniforme, continuent à s'appliquer ici et quelle que soit, d'ailleurs, la direction de l'axe de rotation par rapport à la verticale. Le cylindre est une figure

d'équilibre relatif, quel que soit ω, car, pour toute valeur de k^2, il satisfait à (1), si l'on donne à la constante A, la valeur $\frac{1}{2} - 2k^2$, le rayon des disques étant pris pour unité de longueur. Existe-t-il des surfaces d'équilibre relatif, de révolution, non cylindriques, voisines de ce cylindre, se confondant avec lui pour certaines valeurs de la vitesse et passant, comme lui, par les bords circulaires des disques et dont chacune d'elles et les disques renferment un volume égal à la masse cylindrique? Aucune condition n'est imposée à l'angle de la surface et du plan des disques, le long de l'arête des disques (POINCARÉ, *Capillarité*, p. 101 et 102).

Telle est la question que Globa-Mikhaïlenko s'était posée.

Nous allons chercher à la résoudre à l'aide des équations (1) et (2).

2. **Remarques sur l'équation** (2). — On l'établit en partant de (1) et en se servant de

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho} = \pm \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right).$$

Par raison de symétrie, *nous n'aurons à considérer l'ensemble des courbes d'équation* (2) *que pour* $x \geqq 0$.

Soient a et a' deux racines positives, inégales, consécutives du dénominateur de (2), entre lesquelles le polynome sous le radical est positif. Si, partant d'un point quelconque, d'abscisse a, on fait varier x de a à a', en prenant un certain signe dans (2), puis si x varie de a' à a, avec le signe opposé dans (2), et ainsi de suite, on obtient une courbe périodique comprise entre deux droites limites parallèles à $y'y$. On en obtiendrait de même, dans l'intervalle considéré, une infinité d'autres, identiques à la première, à des translations près, parallèles à $y'y$. Dans certains cas, ces courbes périodiques se réduisent à des courbes fermées.

Appelons *sommets* d'une courbe d'équation (2) les points de cette courbe situés sur les droites limites; elle y est tangente à ces droites, *sauf pour* $B = 0$, où elle est perpendiculaire à $y'y$ qui correspond alors à la racine $x = 0$ du dénominateur de (2).

Les trois remarques suivantes, applicables pour x *positif,* $k \neq 0$, k, A *et* B *finis* sont faciles à vérifier :

1° Si l'on appelle demi-normale positive à une courbe celle qui

fait un angle aigu avec $y'y$, une courbe satisfaisant à une équation (2) prise avec le signe *plus* est figure d'équilibre pour le liquide en rotation placé, en chaque point, du côté de la demi-normale positive; et inversement, dans le cas du signe *moins* devant (2).

2° En tout sommet, d'abscisse positive non nulle, d'une courbe d'équation (2), $k^2x^4 + Ax^2 + B$ est $\neq 0$ et le liquide en rotation est à placer du côté de $y'y$ si, en ce sommet

$$k^2x^4 + Ax^2 + B > 0,$$

et du côté opposé à $y'y$, si, en ce sommet

$$k^2x^4 + Ax^2 + B < 0.$$

3° Les racines en x^2 réelles de l'équation

$$x^2 - (k^2x^4 + Ax^2 + B)^2 = 0$$

sont ≥ 0.

Si cette équation a ses quatre racines réelles, considérons, toujours du côté des x positifs, les deux intervalles où le dénominateur de (2) est réel; les courbes d'équation (2) situées dans l'intervalle le plus éloigné de $y'y$ (lequel n'est jamais d'amplitude nulle) conviennent pour le liquide en rotation placé du côté de $y'y$ auprès des sommets de ces courbes les plus éloignés de $y'y$; et celles de l'autre intervalle conviennent pour ce liquide placé du côté opposé à $y'y$, auprès de leurs sommets les plus éloignés dudit axe.

Dans le cas de deux racines réelles distinctes, les courbes de l'intervalle unique conviennent pour le liquide en rotation placé du côté de $y'y$, auprès de leurs sommets les plus éloignés de cet axe.

3. **Conditions spéciales imposées au méridien dans le problème actuel.** — *Vous laissons de côté le cas d'une cavité*, de volume constant, comprise entre les deux disques et d'abord cylindrique, existant dans un liquide en rotation, cas qu'on étudierait d'une *manière analogue* à celle qui va être exposée.

Chaque *demi-méridien*, c'est-à-dire la partie située d'un même côté de $y'y$ (celui des x positifs, par exemple), est supposé d'un seul tenant et assez voisin de la génératrice du cylindre pour n'avoir pas de point sur $y'y$. Il ne rencontre les disques qu'en leurs

bords. Pour des raisons d'ordre physique, nous ne considérons ici que des méridiens sans point singulier; bien entendu, cette dernière condition, *à elle seule*, n'exclut en rien les arcs, sans point singulier, de courbes qui renferment des singularités lorsqu'on les considère en entier. De plus, le méridien a tous ses points à distance finie. Enfin, la condition du volume (volume de la masse liquide égal à celui du cylindre) s'oppose à ce que le demi-méridien ait tous ses points situés d'un même côté de la droite, parallèle à $y'y$, joignant les bords des disques.

On peut montrer qu'il appartient à une seule courbe périodique satisfaisant à une équation (2); il ne peut pas renfermer d'élément rectiligne parallèle à $y'y$, à moins d'être une ligne droite de bout en bout.

De l'équation différentielle (2), on peut déduire immédiatement les formes générales des courbes intégrales, que B soit différent de zéro ou nul [dans ce dernier cas, (2) est elliptique et son intégration est possible]. On voit facilement, compte tenu des conditions à remplir, que le demi-méridien ne peut provenir que d'une courbe d'équation (2), où B est $\neq 0$, comprise dans un intervalle de x limité par deux racines *simples*, positives, de $x^2 - (k^2 x^4 + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B})^2 = 0$, dans lequel ce polynome est partout positif et n'est nul qu'aux extrémités de l'intervalle et pour lequel, $k^2 x^4 + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}$, différent de zéro en ces deux extrémités, est positif en ces deux points.

Enfin, la condition du volume exige que le demi-méridien comprenne, *au moins*, deux sommets.

Et, en tous les sommets, le liquide en rotation est placé du côté de $y'y$.

4. Calculs préliminaires. — Pour $x = a$ et pour $x = a'$, $k^2 x^4 + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}$ est positif et $\frac{dy}{dx}$ est infini; donc

$$a - (k^2 a^4 + \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}) = 0, \tag{4}$$

$$a' - (k^2 a'^4 + \mathrm{A}a'^2 + \mathrm{B}) = 0. \tag{5}$$

Ceci est vrai que a soit plus grand ou plus petit que a'. On en tire

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}(a + a') = 1 - k^2 (a + a')(a^2 + a'^2), \tag{6}$$

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}(a + a') = aa' + k^2 (a + a') a^2 a'^2. \tag{7}$$

On peut écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\,\Phi}{\sqrt{x^2(a+a')^2-\Phi^2}} = \frac{\pm\,\Phi}{\sqrt{(a-x)(x-a')}\sqrt{D_1 D_2}}, \tag{8}$$

avec

$$\begin{cases} \Phi = k^2(a-a')x^4 - A_1x^2 + B_1, \\ D_1 = k^4(a+a')^2x^4 - A'x^2 + B', \\ D_2 = (a+x)(a'+x), \\ A' = k^2(a+a')(A_1+1), \\ B' = \dfrac{B_1^2}{a^2a'^2} = [1+k^2(a-a')aa']^2. \end{cases} \tag{9}$$

Comme nous étudions des figures voisines du cylindre de rayon 1, le rayon des disques étant pris pour unité de longueur, posons

$$a = 1+\varepsilon', \qquad a' = 1-\varepsilon'',$$

où ε' et ε'' sont petits et, d'après la condition du volume invariable, tous deux positifs ou tous deux négatifs. Cette notation est choisie pour éviter l'emploi de ε, utilisée, avec un sens différent, dans la thèse de Globa-Mikhaïlenko. Ayant désigné nos disques par les lettres A et B, convenons de représenter par a', le rayon correspondant au sommet le plus voisin du disque A et par a, celui qui correspond au sommet suivant (voir *fig.* 1 à 4).

Quels que soient ε' et ε'', si $k=0$ et *pour* ε' *et* ε'' *assez petits*, si $k\neq 0$, D_1 est positif, quel que soit x, et $x^2(a+a')^2-\Phi^2=0$ n'a pas de racine réelle autre que les racines simples $\pm a$ et $\pm a'$; car, pour $k=0$, $D_1=+1$; et, pour $k\neq 0$, le discriminant du trinome D_1 du second degré en x^2, est égal à $-128k^6$, pour

$$a = a' = 1.$$

Posons

$$\frac{x-a'}{a-a'} = t. \tag{10}$$

Plus loin, nous ferons le second changement de variables

$$t = \sin^2\varphi.$$

Il serait donc possible de supprimer l'emploi de t. Mais, pour certains calculs et raisonnements, notamment au paragraphe 7 ci-après, il est un peu plus commode de ne rencontrer que $t=\sin^2\varphi$ dans les coefficients des séries en ε', ε'' et γ que nous obtiendrons plus

loin, à l'exclusion des lignes trigonométriques, autres que $\sin\varphi$, de φ et de ses multiples. Quand x varie de a' à a, t varie de 0 à 1. On a

$$x = a' + (a - a')t,$$
$$dx = (a - a')\,dt = (\varepsilon' + \varepsilon'')\,dt,$$
$$x = 1 + \varepsilon' t - \varepsilon''(1 - t). \tag{11}$$

Posons encore

$$k^2 = k_0^2 + \gamma,$$

où k_0^2 est une constante positive encore indéterminée et γ, une quantité positive ou négative.

A_1, B_1, A', B' sont des polynomes en ε', ε'' et γ. Φ et D_1 sont des polynomes en ε', ε'', γ et t. D_2 est un polynome en ε', ε'' et t.

On trouve, en n'écrivant que les termes de degré inférieur ou égal à 1, en ε', ε'' et γ,

$$\Phi = 2 + \varepsilon'(1 + 2t) - \varepsilon''[1 + 2(1 - t)]\ldots, \tag{12}$$
$$D_1 D_2 = 4\theta(1 + U),$$

avec

$$\theta = 1 + 8k_0^2,$$

et

$$4\theta U = 32\gamma + 2\varepsilon'[1 + 24k_0^2 + 32(1 + 16k_0^2)t]$$
$$- 2\varepsilon''[1 + 24k_0^2 + 32(1 + 16k_0^2)(1 - t)]\ldots.$$

Tous les termes non écrits dans Φ et dans $4\theta U$ renferment ε' ou ε'' en facteur. U est un polynome en ε', ε'', γ et t; nous y conservons en évidence, sans les développer, les puissances de $(1 - t)$ que (11) introduit dans D_1 et D_2; nous n'avons écrit ci-dessus, pour $4\theta U$, que les termes du premier degré en ε', ε'' et γ. Soit $4\theta U_1$, le polynome obtenu en changeant dans l'expression complète de $4\theta U$, écrite ci-dessus en partie, tous les signes — en des signes +, et en remplaçant ε', ε'' et γ par leurs valeurs absolues. Supposons ε', ε'' et γ inférieurs, en valeur absolue, à des nombres positifs η', η'' et η''' assez petits pour que $U_1 < 1$, pour $t = 1$, $|\varepsilon'| = \eta'$, $|\varepsilon''| = \eta''$ et $|\gamma| = \eta'''$. Alors, dans le développement absolument convergent de $(1 + U)^{-\frac{1}{2}}$, en série entière en U, qu'on obtient par la formule du binome, remplaçons U par le polynome qu'il représente; nous pourrons ordonner les termes suivant leur degré en ε', ε'' et γ, puisque la série dont nous modifions l'ordre des

termes est absolument convergente, quel que soit t ($0 \leqq t \leqq 1$). Notons que la condition imposée plus haut à ε', ε'' et γ n'est évidemment pas la plus large qu'on puisse indiquer pour la validité de ce qui précède, mais elle est simple et suffit ici.

On obtient ainsi $\frac{1}{\sqrt{D_1 D_2}}$ sous forme de série entière ordonnée en ε', ε'' et γ, et, après multiplication par Φ, puis par $x^2 - 1$, on a

$$\frac{\Phi}{\sqrt{D_1 D_2}} = \frac{1}{4\theta^{\frac{3}{2}}}\{4\theta - 16\gamma + \varepsilon'(1 - 8k_0^2 + 2t) - \varepsilon''[1 - 8k_0^2 + 2(1-t)]\ldots\}, \tag{13}$$

et

$$\frac{\Phi(x^2-1)}{\sqrt{D_1 D_2}} = \frac{2}{\sqrt{\theta}}[\varepsilon' t - \varepsilon''(1-t)\ldots]. \tag{14}$$

Les coefficients de ε', ε'' et γ et de leurs produits et puissances sont des polynomes en t. Il n'y a pas de terme du premier degré en γ dans (14), car tous les termes de $x^2 - 1$ renferment ε' ou ε'' en facteur.

Posons

$$\frac{\Phi}{\sqrt{D_1 D_2}\sqrt{t(1-t)}} = \Psi(t),$$

où Φ, D_1 et D_2 sont exprimés en fonction de t.

On voit que

$$\frac{\Phi\, dx}{\sqrt{x^2(a+a')^2 - \Phi^2}} = \pm\, \Psi(t)\, dt, \tag{15}$$

où Φ est exprimé en fonction de x et où le signe $+$ est à prendre quand ε' et ε'' sont positifs ($a > a'$) et le signe $-$ dans le cas contraire. Ce double signe provient de ce que, avant simplification, le numérateur renferme le facteur $a - a' = \varepsilon' + \varepsilon''$, provenant de dx, et le dénominateur renferme le facteur $\sqrt{(a-a')^2}$ provenant de $\sqrt{(a-x)(x-a')}$.

3. **Cas à considérer.** — ε' et ε'' étant petits, il est facile de voir que Φ reste positif et voisin de 2, quel que soit k^2, quand t varie de 0 à 1; à ce sujet, rappelons que tous les termes de $\Phi - 2$, *écrits ou non* dans (12), renferment ε' ou ε'' en facteur. y croît donc continuellement quand x décroît, le long d'un *élément* CD

de courbe correspondant au signe — dans (8) (*fig.* 1 à 4); et notre courbe ondulée ressemble à une sinusoïde. Soient h, la distance invariable entre les disques, et λ, la distance entre les plans des parallèles passant par deux sommets consécutifs de la courbe méridienne; λ est *finie*, car sa valeur, déduite de (8), est finie, d'après la remarque précédant immédiatement (10).

Les quatre types de demi-méridiens à considérer sont indiqués par les quatre *schémas suivants*, *tracés pour* $n = 1$, n ayant le sens indiqué par les figures (voir *fig.* 1 à 4).

Fig. 1.

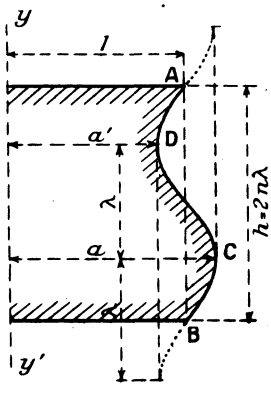


Fig. 2.

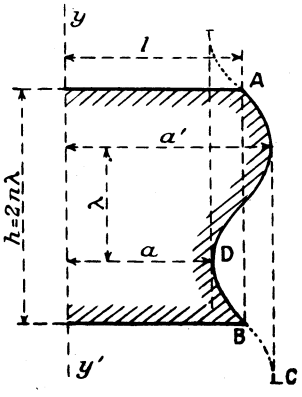


Fig. 3.

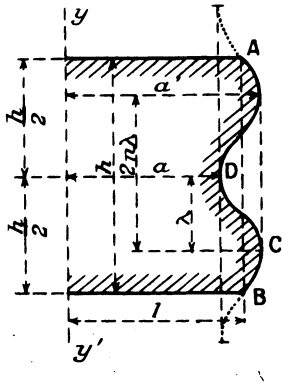
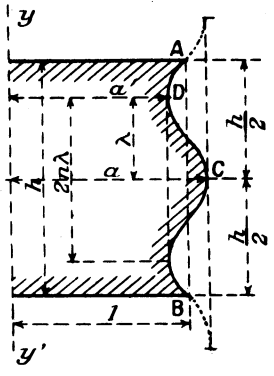


Fig. 4.



n représente un nombre entier, positif, fini, nécessairement égal ou supérieur à 1, pour que la condition du volume soit satisfaite (volume renfermé égal à celui que limitent les disques et le cylindre de génératrice AB).

Pour les figures 3 et 4, la masse liquide est symétrique par rapport au plan parallèle aux disques et passant par le milieu de la hauteur h.

Nous verrons que les figures 1 et 2 correspondent à un même cas, que nous appellerons le *premier* cas et les figures 3 et 4, à un seul autre, que nous appellerons le *deuxième cas*.

6. **Étude du premier cas.** — Que ε' et ε'' soient tous deux positifs ($a' < a$, *fig.* 1) ou tous deux négatifs ($a' > a$, *fig.* 2), la condition $h = 2n\lambda$ s'écrit

$$2n\int_0^1 \Psi(t)\,dt - h = 0. \tag{16}$$

Et la condition du volume, compte tenu de la précédente, s'écrit

$$\int_0^1 \Psi(t)(x^2-1)\,dt = 0, \tag{17}$$

où x est la fonction (11) de t.

Dans les conditions précédemment définies (§ 4), pour des valeurs numériques assez petites données à ε', ε'' et γ, les séries (13) et (14) sont des séries de polynomes en t, uniformément convergentes dans tout l'intervalle $0 \leq t \leq 1$; en effet, pour t quelconque compris dans cet intervalle, leurs termes sont inférieurs, en valeur absolue, à ceux des séries correspondantes, convergentes, à termes constants positifs, qu'on obtient en employant U_1 (dans lequel on fait $t = 1$, $|\varepsilon'| = \eta_1'$, $|\varepsilon''| = \eta_1''$, $|\gamma| = \eta_1'''$) au lieu de U, dans le développement absolument convergent de $(1+U)^{-\frac{1}{2}}$, où l'on prend la valeur absolue des coefficients, et en substituant à Φ et à x^2-1 des expressions qui en sont déduites comme U_1 l'est de U et où l'on fait $t = 1$, $|\varepsilon'| = \eta'$, $|\varepsilon''| = \eta_1''$, $|\gamma| = \eta_1'''$.

Posons

$$t = \sin^2\varphi \qquad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

et remarquons que

$$\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = 2\,d\varphi.$$

Les séries (13) et (14) deviennent des séries uniformément convergentes de fonctions continues de φ. On pourra donc les intégrer

terme à terme par rapport à φ. On n'a à effectuer que des intégrations élémentaires portant sur des puissances paires de $\sin\varphi$. Et les séries entières en ε', ε'' et γ ainsi obtenues seront absolument et uniformément convergentes et continues dans le domaine $-\eta' \leqq \varepsilon' \leqq \eta'$; $-\eta'' \leqq \varepsilon'' \leqq \eta''$; $-\eta''' \leqq \gamma \leqq \eta'''$. Nos deux équations (16) et (17) s'écrivent ainsi

$$2(1+8k_0^2) - 8\gamma + (1-4k_0^2)\varepsilon' - (1-4k_0^2)\varepsilon'' \ldots = \frac{h(1+8k_0^2)^{\frac{3}{2}}}{n\pi}, \tag{18}$$

$$\varepsilon' - \varepsilon'' \ldots = 0, \tag{19}$$

où tous les termes du premier degré en ε', ε'' et γ sont écrits.

Les équations (16) et (17) et, par suite, (18) et (19), sont établies pour $\varepsilon' + \varepsilon'' \neq 0$, comme l'exige la définition (10) de t.

S'il y a bifurcation pour une valeur, k_0, de k, en partant du cylindre et vers une suite de figures du premier cas correspondant à un nombre entier n donné, ε' et ε'' tendent vers zéro, pour cette suite de figures, quand γ tend vers zéro.

Donc, pour une valeur k_0 de *bifurcation*, (18), en particulier, doit être satisfaite pour des valeurs de ε', ε'' et γ tendant vers zéro; et comme son premier membre est une fonction continue de ε', ε'' et γ, dans le domaine indiqué précédemment, et égale à $2(1+8k_0^2)$ pour $\varepsilon' = \varepsilon'' = \gamma = 0$, il faut que

$$2 = \frac{h\sqrt{1+8k_0^2}}{n\pi};$$

d'où

$$1 + 8k_0^2 = \frac{4n^2\pi^2}{h^2}. \tag{20}$$

Pour que (20) ait une solution, pour une valeur n donnée, il faut que $2n\pi \geqq h$. A toute valeur n ne correspond qu'une valeur de k_0^2. Ayant satisfait à (20), remarquons que le déterminant des coefficients de γ et de ε'', dans (18) et (19), est égal à 8, donc différent de zéro. Par suite (Goursat, *Analyse*, I, 1917, p. 480), (18) et (19) admettent un seul système de solutions, γ et ε'', tendant vers zéro avec ε' et ces solutions peuvent être développées en séries entières en ε'.

L'existence de ce système unique de solutions étant démontrée et ayant remarqué que la série γ ne renferme pas de terme du premier degré en ε' et que le coefficient de ε', dans la série donnant ε'',

est égal à 1, cherchons à satisfaire à (18) et à (19) par des développements de la forme

$$\varepsilon'' = \varepsilon' + m\varepsilon'^2 + m'\varepsilon'^3 + \dots, \tag{21}$$

$$\gamma = p\varepsilon'^2 + q\varepsilon'^3 + \dots. \tag{22}$$

Pour la commodité des calculs effectifs, adoptons la méthode suivante. Supposons que nous ayons remplacé ε'' et γ, par les séries (21) et (22), dans A_1, B_1, A', B', x, Φ, D_1 et D_2. Les séries à intégrer par rapport à φ, en vertu des deux équations du problème sont obtenues ainsi sous la forme de séries entières en ε', dont les coefficients sont des polynomes en $\sin^2\varphi$. On peut montrer que ces séries sont uniformément convergentes pour ε' assez petit et, par suite, peuvent être intégrées terme à terme par rapport à φ. Après les intégrations, nous avons (16) et (17) sous la forme de séries entières convergentes en ε' qui doivent être nulles quel que soit ε'. Pratiquement, les coefficients de ε'^2 dans (16) et (17) peuvent être calculés assez facilement.

Égalé à zéro, le coefficient de ε'^2, dans (17), donne

$$m = \frac{1 + 4k_0^2}{1 - 8k_0^2} = \frac{1}{2} + \frac{k^2}{8n^2\pi^2}. \tag{23}$$

Et le coefficient de ε'^2 dans (16), égalé à son tour à zéro, donne, compte tenu de (23),

$$p = -\frac{3}{16}\,\frac{1 + 8k_0^2 + 32k_0^4 + 128k_0^6}{1 + 8k_0^2}; \tag{24}$$

m est donc toujours positif, et p toujours négatif.

Mais, il est clair qu'un demi-méridien du genre de la figure 1, correspondant à des valeurs de a, a', ε', ε'' et γ égales à a_1, a'_1, $\varepsilon'_1 > 0$, $\varepsilon''_1 > 0$ et γ_1, supposé retourné bout pour bout, entre les disques A et B laissés à leurs places, de manière à constituer un demi-méridien du genre de la figure 2, convient pour la même valeur γ_1, les paramètres a, a', ε' et ε'' ayant alors les valeurs a_2, a'_2, $\varepsilon'_2 < 0$ et $\varepsilon''_2 < 0$, avec

$$a_1 = a'_2, \qquad a'_1 = a_2, \qquad \varepsilon'_1 = -\varepsilon''_2 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon''_1 = -\varepsilon'_2. \tag{25}$$

On déduit de ce qui précède, compte tenu de (25), que

$$m' = m^2, \qquad q = mp.$$

Donc m' et q sont également connus.

Ceci résulte, en somme, de ce que le premier membre de chacune des équations (18) et (19) est symétrique par rapport à ε' et à $(-\varepsilon'')$.

On remarque aussi que les courbes représentatives de a et de a', en fonction de k^2, sont confondues en une seule, dont la tangente au point $(k_0^2, 1)$ est parallèle à l'axe des a, a', d'après (22).

On voit encore, d'après (21), que $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon' + \varepsilon''}$ est égale à $\frac{1}{2}$, pour $\varepsilon' = 0$ et est continue encore pour $\varepsilon' = 0$. On en déduirait aisément que, pour φ donné, l'intégrale donnant chacune des déterminations de y comptée à partir du disque B est une fonction continue de ε', de même que x donnée par (11). Cette intégrale est facile à calculer sous forme de série entière en ε', ε'' et γ, à l'aide de (8), (15) et (13).

Les distances aux disques des sommets voisins tendent toutes deux vers $\frac{h}{4n}$ quand ε', ε'' et γ tendent vers zéro.

Ainsi donc, pour n donné, il existe un nombre k_0, défini par (20) et une vitesse correspondante ω_0, de *bifurcation*, que (3) détermine pour laquelle s'amorce, à partir du cylindre, une suite de figures d'équilibre de révolution, non cylindriques.

Si l'on négligeait dans (13), les termes en ε', ε'' et γ, de degré égal ou supérieur à 1, on verrait aisément que les demi-méridiens sont des *sinusoïdes*, à cette approximation, laquelle est bien dépassée dans les résultats qui précèdent.

Que ε' soit positif (méridien du genre de la figure 1 *avec creux près du disque* A) *ou que ε' soit négatif (méridien du genre de la figure* 2 *avec renflement près du disque* A), *la vitesse*, d'après (22) et (24), *devra commencer par décroître à partir de la vitesse de bifurcation, pour que des figures voisines du cylindre soient obtenues.*

Il s'ensuit qu'une vitesse de bifurcation du premier cas ne peut pas être nulle, pour qu'il y ait effectivement bifurcation.

7. **Étude du deuxième cas.** — Les deux équations sont :

$$2n\int_0^1 \Psi(t)\,dt - 2\int_0^{\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'+\varepsilon''}} \Psi(t)\,dt - h = 0, \tag{26}$$

$$2n\int_0^1 \Psi(t)(x^2-1)\,dt + 2\int_0^{\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'+\varepsilon''}} \Psi(t)(x^2-1)\,dt = 0, \tag{27}$$

où x est la fonction de t définie par (11).

Ces équations sont écrites pour $\varepsilon' + \varepsilon'' \neq 0$.

S'il y a bifurcation à partir du cylindre, pour une valeur k_0, de k, les deux équations (26) et (27) devront être satisfaites, pour $k = k_0$, par des valeurs de ε' et de ε'' tendant vers zéro quand γ tend vers zéro.

Nous voyons que si, dans le premier cas, les limites des intégrales figurant dans (16) et (17) restent *fixes*, quelle que soit la figure considérée, celles des secondes intégrales de (26) et de (27) du deuxième cas *dépendent du rapport* $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$.

Posons

$$t = \sin^2\varphi,$$

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon' + \varepsilon''} = \sin^2\alpha, \tag{28}$$

avec

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Remarquons que, dans (14), les termes non écrits, qui sont de degré au moins égal à 2, en ε', ε'' et γ, renferment tous ε' ou ε'' en facteur, car, d'après (11), tous les termes de $x^2 - 1$ renferment ε' ou ε''.

Comme (13) et (14) sont des séries uniformément convergentes de fonctions continues de φ, on peut effectuer terme à terme, sur (13) et (14), les intégrations indiquées par (26) et (27); car ceci revient à les intégrer par rapport à φ, au facteur 2 près, puisque $\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = 2\,d\varphi$.

Compte tenu de (14), l'équation (27) s'écrit après division par $\frac{2}{\sqrt{0}}$ et après quelques intégrations faciles,

$$\varepsilon'(n\pi + 2\alpha - \sin 2\alpha) - \varepsilon''(n\pi + 2\alpha + \sin 2\alpha)\ldots = 0, \tag{29}$$

où les termes non écrits sont de degré au moins égal à 2, en ε', ε'', γ et renferment tous ε' ou ε'' en facteur.

Divisons (29) par $\varepsilon' + \varepsilon'' \neq 0$; remplaçons $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon' + \varepsilon''}$ par $\cos^2\alpha$ et $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon' + \varepsilon''}$ par $\sin^2\alpha$; nous obtenons une nouvelle série entière en ε', ε'' et γ, dont les coefficients sont des fonctions continues de α (angle qui dépend de ε' et de ε''); dans cette série, qui doit être

nulle quelque petits que soient ε', ε'' et γ, avec $\varepsilon' + \varepsilon'' \neq 0$, la somme des termes renfermant ε', ε'' et γ tend vers zéro quand ε', ε'' et γ tendent ensemble vers zéro, ainsi qu'il est facile de s'en assurer; il faut donc que le terme ne contenant ni ε', ni ε'', ni γ en facteur et qui est égal à

$$(n\pi + 2\alpha)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha, \tag{30}$$

tende vers zéro quand ε', ε'' et γ le font simultanément.

Comme (30) ne s'annule, pour α compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, que pour une seule valeur α_0, il faut que α tende vers cette racine α_0, que détermine l'équation transcendante

$$(n\pi + 2\alpha_0) - \operatorname{tang} 2\alpha_0 = 0. \tag{31}$$

En posant

$$\alpha_1 = n\pi + 2\alpha_0,$$

l'équation s'écrit sous la forme *classique*

$$\alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_1 = 0. \tag{32}$$

Comme on a, ici, $\alpha_1 > \pi$, la racine $\alpha_1 = 0$ de (32) ne convient pas.

Si l'on se reporte, par exemple, au *Traité d'Algèbre* de Bertrand et Garcet, 1908, p. 293, on a les résultats ci-dessous :

$n =$	1	2	...,	10	....
$2\alpha_0 =$	$77°27'12''$,	$82°37'28''$,	...,	$88°15'45''$,	...;

$2\alpha_0$ croît avec n et deviendrait égal à $\frac{\pi}{2}$ si n était infini. Naturellement, α_0 et les autres angles sont à regarder comme exprimés en radians dans les formules.

De (26) et de (13), on déduit de même, puisque (26) doit être satisfaite quelque petits que soient ε', ε'' et γ, que

$$\frac{2(n\pi + 2\alpha_0)}{\sqrt{0}} = h,$$

c'est-à-dire

$$1 + 8k_0^2 = \frac{4(n\pi + 2\alpha_0)^2}{h^2} = \frac{4\operatorname{tang}^2 2\alpha_0}{h^2}. \tag{33}$$

Puisque $2\alpha_0$ est déjà connu, (33) nous donne k_0^2; et, pour

toute valeur de n, il existe une valeur correspondante de k_0^2 si $h \leqq 2 \operatorname{tang} 2\alpha_0$, et il n'y en a pas si $h > 2 \operatorname{tang} 2\alpha_0$.

Posons maintenant

$$\alpha = \alpha_0 + \beta, \tag{34}$$

β tendant vers zéro quand ε', ε'' et γ tendent ensemble vers zéro.

Les deux séries (13) et (14) étant de la forme

$$\Sigma \varepsilon'^p \varepsilon''^q \gamma^r P_{pqr}(\sin^2 \varphi),$$

les deux équations (26) et (27), compte tenu de (33), prennent la forme

$$\Sigma \varepsilon'^p \varepsilon''^q \gamma^r \left[4n \int_0^{\pi} P_{pqr}(\sin^2 \varphi)\, d\varphi + 4 \int_0^{\alpha_0+\beta} P_{pqr}(\sin^2 \varphi)\, d\varphi \right] = 0, \tag{35}$$

avec $p + q + r \geqq 1$; les termes sont ordonnés suivant les degrés croissants de $\varepsilon'^p \varepsilon''^q \gamma^r$; $P_{pqr}(\sin^2 \varphi)$ est un polynome en $\sin^2 \varphi$, où ε', ε'' et γ ne figurent pas, et dont le degré en $\sin^2 \varphi$ est au plus égal à $p + q$, car $t = \sin^2 \varphi$ ne s'introduit dans les formules par la valeur (11) de x, qu'accompagné de ε' ou de ε''.

Procédons aux intégrations par rapport à φ, qui sont élémentaires ; et, lorsqu'elles sont faites, remplaçons, dans les intégrales, $\sin(\alpha_0 + \beta)$ et $\cos(\alpha_0 + \beta)$ par leurs séries entières en β ; on peut ainsi obtenir (26) et (27), sous la forme de séries entières en ε', ε'', β et γ, dont la convergence absolue peut être établie pour d'assez petites valeurs des variables ; à cet effet, on peut s'aider de la remarque déjà indiquée sur le degré de $P_{pqr}(\sin^2 \varphi)$ et tenir compte du fait évident que le quotient de

$$\operatorname{sh} \varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots + \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

par $\sin \varphi$, reste fini pour $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$; d'où l'on déduit qu'une réduction convenable des intervalles de variation de ε' et de ε'', lorsqu'on remplace $\sin \varphi$ par $\operatorname{sh} \varphi$, conserve la convergence de séries analogues aux séries (35), mais obtenues en prenant $\alpha_0 + |\beta|$ pour limite supérieure de la seconde intégrale et en employant U_1 (au lieu de U) et les fonctions analogues relatives à Φ et à $x^2 - 1$ et la série, de somme égale à $(1 - U_1)^{-\frac{1}{2}}$, des valeurs absolues des termes

de $(1+U_1)^{-\frac{1}{2}}$; on peut en tirer les conséquences utiles et achever la démonstration assez facilement.

Après avoir effectué les intégrations, on parvient donc, pour les deux séries (35), à deux séries entières ordonnées en ε', ε'', β et γ et absolument convergentes.

Dans ces séries, remplaçons ε' par $(\varepsilon'+\varepsilon'')\cos^2(\alpha_0+\beta)$, ε'' par $(\varepsilon'+\varepsilon'')\sin^2(\alpha_0+\beta)$, en substituant, dans ces expressions de ε' et de ε'', à $\sin(\alpha_0+\beta)$ et à $\cos(\alpha_0+\beta)$, leurs séries entières en β; on obtient finalement, pour (26) et (27), des séries entières en $\varepsilon'+\varepsilon''$, β et γ et l'on peut démontrer qu'elles sont absolument convergentes pour $\varepsilon'+\varepsilon''$, β et γ assez petits; on peut, par suite, les ordonner suivant les degrés totaux croissants en $\varepsilon'+\varepsilon''$, β et γ.

L'équation (26) avec les seuls termes écrits dans (13) donne

$$(36)\quad (1-8k_0^2)(\varepsilon'+\varepsilon'')\sin 2\alpha_0 - 8(1+8k_0^2)\beta - 16\gamma\tang 2\alpha_0 \ldots = 0.$$

Pour ce qui concerne (27), nous allons étendre (14) jusqu'aux termes du second ordre en ε', ε'' et γ. On trouve pour (27), tous calculs faits, après certaines simplifications et après division, en particulier, par le facteur commun $\varepsilon'+\varepsilon''$:

$$(37)\qquad (1-4k_0^2)(\varepsilon'+\varepsilon'')\sin 2\alpha_0 - 8(1+8k_0^2)\beta \ldots = 0.$$

Il n'y a pas de terme du premier degré en γ, dans (37).

Le déterminant des coefficients de β et de γ, dans (36) et (37), étant différent de zéro, on peut tirer γ et β en séries entières en $\varepsilon'+\varepsilon''$, s'annulant pour $\varepsilon'+\varepsilon''=0$, et il n'y a qu'un seul système de solutions.

On trouve

$$(38)\qquad \beta = \frac{\varepsilon'+\varepsilon''}{8}\,\frac{1+4k_0^2}{1-8k_0^2}\sin 2\alpha_0 \ldots,$$

et

$$(39)\qquad \gamma = \frac{\varepsilon'+\varepsilon''}{8}(1-2k_0^2)\cos 2\alpha_0 \ldots,$$

avec, d'après (28), (33), (34) et (38) :

$$(40)\qquad \varepsilon' = (\varepsilon'+\varepsilon'')\cos^2\alpha_0 - \frac{(\varepsilon'+\varepsilon'')^2}{64}(4\sin^2 2\alpha_0 + h^2\cos^2 2\alpha_0)\ldots,$$

$$(41)\qquad \varepsilon'' = (\varepsilon'+\varepsilon'')\sin^2\alpha_0 + \frac{(\varepsilon'+\varepsilon'')^2}{64}(4\sin^2 2\alpha_0 + h^2\cos^2 2\alpha_0)\ldots.$$

Rappelons que $2\alpha_0$ est compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

Les *vitesses de bifurcation* sont définies par (33) et (3).

D'après (39), *si* $1-2k_0^2>0$, *il faut commencer par faire décroître la vitesse à partir de la vitesse de bifurcation, pour obtenir des méridiens du genre de la figure* 3 ($\varepsilon'+\varepsilon''<0$, *renflements près des disques*) *et il faut la faire croître, pour obtenir des méridiens du genre de la figure* 4 ($\varepsilon'+\varepsilon''>0$, *creux près des disques*). *Ces résultats sont intervertis si* $1-2k_0^2<0$.

Le cas de $1-2k_0^2=0$ exigerait un développement de γ jusqu'aux termes du second ordre, au moins; nous ne nous étendrons pas davantage sur ce point, car c'est un cas très particulier qui, pour h donné, s'il se présente, ne peut le faire que pour une seule vitesse de bifurcation.

Nous savons d'après (33) que, pour n donné, $1-2k_0^2$ ne dépend que de la distance h, entre les deux disques.

Notons que λ, qui était constant dans le premier cas, est ici variable avec la vitesse. Lorsque ε', ε'' et γ tendent vers zéro, λ tend vers $\frac{\pi h}{2(n\pi+2\alpha_0)}=\frac{\pi h}{2\tang 2\alpha_0}$ et la distance d'un disque au sommet voisin tend vers $\frac{\alpha_0 h}{n\pi+2\alpha_0}=\frac{\alpha_0 h}{\tang 2\alpha_0}$.

Comme pour le premier cas, remarquons que si l'on négligeait dans (13) les termes en ε', ε'' et γ de degré égal ou supérieur à 1, le demi-méridien serait une *sinusoïde*, à cette approximation, qui est bien dépassée dans ce qui précède.

Signalons également que si, pour n donné, $h=2\tang 2\alpha_0$, on a $k_0=0$; la vitesse de bifurcation correspondante est nulle; on devra donc avoir $\gamma>0$ et, d'après (39), il n'y aura, auprès du cylindre, pour cette vitesse de bifurcation, que des figures présentant des creux près des disques.

8. **Ordre des vitesses de bifurcation.** — Dans le premier cas, pour les diverses valeurs entières positives $n\geq 1$, désignons les valeurs correspondantes de $\theta=1+8k_0^2$ par

$$\theta_1,\quad \theta_2,\quad \ldots,\quad \theta_n,\quad \ldots,$$

et les valeurs correspondantes des vitesses de bifurcation par

$$\Omega_1,\quad \Omega_2,\quad \ldots,\quad \Omega_n,\quad \ldots.$$

Dans le deuxième cas, désignons respectivement les quantités analogues par

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots \quad \theta_n, \quad \ldots,$$

et

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n, \quad \ldots$$

De (20) et de (33) on déduit immédiatement que

$$\Theta_1 < \theta_1 < \Theta_2 < \theta_2 < \ldots < \Theta_n < \theta_n < \Theta_{n+1} \quad \ldots$$

et, par suite, que

$$(42) \qquad \Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2 < \omega_2 < \ldots < \Omega_n < \omega_n < \Omega_{n+1} \quad \ldots$$

Étant donné que $2\alpha_0 \to \frac{\pi}{2}$, quand $n \to \infty$, on voit que

$$\frac{\sqrt{\Theta_n} - \sqrt{\Theta_{n+1}}}{2} = \sqrt{\theta_n} \to 0, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Jamais, quel que soit h, une vitesse ω n'est égale à une vitesse de l'autre suite, pour une même masse fluide cylindrique donnée de hauteur h.

La particularité signalée par Globa-Mikhaïlenko dans sa thèse et rappelée par Appell, dans le compte rendu précité de ce travail, à savoir que deux séries de figures, l'une du premier cas, l'autre du second, peuvent prendre naissance pour une même vitesse de bifurcation, n'existe donc pas en réalité.

9. **Étude de la stabilité des figures d'équilibre.** — Les méridiens d'équilibre correspondant à une valeur donnée n, pour l'un quelconque des deux cas, sont des parties de courbes d'une famille dépendant d'un seul paramètre, a, par exemple (car les trois paramètres a, a' et k^2 sont liés par les deux équations du problème).

Le *moment d'inertie* de la masse liquide, par rapport à l'axe de rotation et *l'aire de sa surface libre* sont des fonctions $J(a)$ et $\Omega(a)$ de a; le volume renfermé est constant et égal à πh, notre unité de longueur étant toujours égale au rayon des disques.

L'étude de la stabilité de ces figures de révolution, non cylindriques, va être faite, en ne considérant, comme surfaces déformées possibles, infiniment voisines, que des figures de révolution de la même famille et de même axe de révolution, c'est-à-dire corres-

pondant au même cas et au même nombre n de notre étude, renfermant le même volume et passant toujours par les bords des disques ; la surface de contact du liquide en rotation avec les disques est constante.

Posons

$$U = \frac{\omega^2}{2} J - f\Omega. \tag{43}$$

A chaque famille de courbes correspond une fonction U. La variation première

$$\delta U = \frac{\omega^2}{2} \delta J - f \delta \Omega,$$

représente le travail de la force centrifuge et de la tension superficielle dans une déformation infiniment petite.

Pour une déformation infiniment petite conservant le volume, le travail de la pesanteur et le travail de la pression extérieure sont nuls séparément, dans le cas théorique d'une masse sans pesanteur, placée dans un milieu à pression uniforme. Dans le cas d'une masse pesante, placée dans un liquide pesant *de même densité*, la somme de ces deux travaux est toujours nulle. Dans les deux cas, toute déformation provenant du passage d'une figure de paramètre a à une figure de paramètre $a + da$, donne pour ces deux travaux une variation nulle, quel que soit $\dot{a}$. Il s'ensuit que $U(\omega, a)$ est bien telle que sa variation première par rapport à a représente le travail de toutes les forces qui s'exercent sur la masse, pour les déformations considérées.

En appliquant le théorème du travail virtuel, en prenant, comme surface déformée, une figure infiniment voisine de la même famille, on voit que

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ}{da} - f \frac{d\Omega}{da} = 0. \tag{44}$$

Nous admettrons que l'équilibre est stable si U est maximum et instable dans le cas contraire.

Nous dirons donc que l'équilibre est stable si, pour les valeurs ω, a, de la position d'équilibre considérée, le coefficient de stabilité $\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}$ est inférieur à zéro et que l'équilibre est instable si, pour ces valeurs, le coefficient de stabilité est positif.

On peut montrer que, dans les deux cas de notre étude, J et Ω sont développables en séries entières en ε′, pour ε′ assez petit, et constater que les termes constants J(o) et Ω(o) sont égaux, naturellement, au moment d'inertie et à l'aire du cylindre circulaire droit; on obtient, par dérivations, sous formes de séries entières en ε′, les fonctions

$$J'(a) = \frac{dJ}{da} = \frac{dJ}{d\varepsilon'} = J'(\varepsilon'), \qquad J''(a) = J''(\varepsilon'), \qquad \ldots,$$

et

$$\Omega'(a) = \frac{d\Omega}{da} = \frac{d\Omega}{d\varepsilon'} = \Omega'(\varepsilon'), \qquad \Omega''(a) = \Omega''(\varepsilon'), \qquad \ldots.$$

On a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = \frac{\omega^2}{2}\frac{d^2 J}{d\varepsilon'^2} - f\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon'^2}. \tag{45}$$

Remarquons que $J(\varepsilon') - J(o)$, qui s'annule pour $\varepsilon' = o$, est supérieur à zéro quel que soit le signe de ε′, puisqu'une partie du fluide qui était comprise dans le cylindre de rayon 1 est passée à l'extérieur pour constituer la masse correspondant à ε′. Donc $J(\varepsilon') - J(o)$ commence par un terme en ε′ de degré pair, ayant un coefficient positif et $J'(\varepsilon')$, par un terme de degré impair, affecté d'un coefficient positif. Et le développement de $J(\varepsilon')$ en série entière en ε′ montre, en effet, dans les deux cas de notre problème, que $J(\varepsilon') - J(o)$ commence par un terme positif en ε'^2.

Supposons, d'abord, $\varepsilon' \neq o$.

Dans un certain intervalle de $|\varepsilon'|$, d'origine zéro, on a

$$J'(\varepsilon') \neq o \qquad \text{pour} \quad \varepsilon' \neq o,$$

et, par suite, on peut écrire

$$\frac{\partial U}{\partial a} = J'(a)\left[\frac{\omega^2}{2} - f\frac{\Omega'(a)}{J'(a)}\right]. \tag{46}$$

Le deuxième facteur est alors nul d'après (44). Donc le coefficient de stabilité est égal à

$$-J'(a) f \frac{d\left[\frac{\Omega'(a)}{J'(a)}\right]}{da},$$

c'est-à-dire à

$$-\frac{4f}{\delta}\frac{d\gamma}{d\varepsilon'}\frac{dJ}{d\varepsilon'}. \tag{47}$$

On voit tout de suite que *le coefficient de stabilité est nul aux points de bifurcation;* car d'après (45), où ω, $\frac{d^2 J}{d\varepsilon'^2}$ et $\frac{d^2\bar{\Omega}}{d\varepsilon'^2}$ sont des fonctions continues de ε', même pour $\varepsilon' = 0$, ce coefficient de stabilité est une fonction continue de ε', même pour $\varepsilon' = 0$, et qui tend vers zéro quand $\varepsilon' \to 0$, d'après (47), où $\frac{dJ}{d\varepsilon'}$ tend vers zéro.

Pour les figures du premier cas, d'après (22) et (24), $\frac{d\gamma}{d\varepsilon'}$ est du signe de $-\varepsilon'$, pour ε' assez petit.

$\frac{dJ}{d\varepsilon'}$ est du signe de ε'.

Donc le coefficient de stabilité est positif, que ε' soit positif ou négatif.

Donc les figures du premier cas sont *instables* pour toutes les valeurs de n.

Passons au second cas. D'après (39) et (40), on a

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon'} = \frac{(1 - 2k_0^2)\cos 2\alpha_0}{8\cos^2\alpha_0},$$

en se limitant au terme indépendant de sa série entière en ε'.

$\frac{dJ}{d\varepsilon'}$ est toujours du signe de ε'.

On voit donc que, pour ε' assez petit, le coefficient de stabilité a le signe de $(2k_0^2 - 1)\varepsilon'$.

Si $1 - 2k_0^2 < 0$, on a *instabilité* pour $\varepsilon' > 0$ (*fig.* 4), et *stabilité* pour $\varepsilon' < 0$ (*fig.* 3).

Si $1 - 2k_0^2 > 0$, c'est *l'inverse*.

Le cas de $1 - 2k_0^2 = 0$ exigerait un développement de γ jusqu'aux termes d'ordre supérieur, mais n'est que très exceptionnel, comme il a été dit au paragraphe 7.

Rappelons que la *stabilité* rencontrée dans ce qui précède est toute relative; elle ne concerne que les déformations définies au début de ce paragraphe, avant (43).

Pour terminer, disons un mot du cylindre qui, lui, est figure d'équilibre, quel que soit ω, et rappelons encore que notre unité de longueur est égale au rayon du cylindre.

Pour $h < 2\pi$, on sait que le cylindre est figure stable d'équilibre absolu. Si on le compare aux figures correspondant à la première vitesse de bifurcation (premier cas, avec $n = 1$), on voit,

après avoir développé le moment d'inertie J et la surface Ω de ces figures, en séries entières en ε', jusqu'aux termes en ε'^2, que le cylindre reste figure *stable* d'équilibre relatif, jusqu'à cette première vitesse de bifurcation, puis est *instable* pour une vitesse plus grande.

Pour $h \geq 2\pi$, Plateau a montré, par un calcul, et vérifié expérimentalement que le cylindre est une figure instable d'équilibre absolu. Plateau prend pour demi-méridien déformé une sinusoïde. Faisons de même, ici, et considérons une déformation transformant la génératrice du cylindre en une onde entière unique de sinusoïde, et conservant le volume de la masse liquide et le rayon des bases; cette déformation est définie par un seul paramètre (nul pour le cylindre); soient Ω et J, l'aire de la surface et le moment d'inertie, pour la figure déformée; on verrait que $\Omega - 2\pi h < 0$ (Poincaré, *Capillarité*, p. 99). D'autre part, J est supérieur au moment d'inertie au cylindre; il s'ensuit que, pour cette déformation, U croît; le calcul montre que le terme de U renfermant le paramètre au premier degré est nul, ce qui est en accord avec le théorème du travail virtuel, et que le terme du second ordre est, en effet, positif, pour $\omega > 0$ (même pour $h = 2\pi$).

Et, par suite, pour $h \geq 2\pi$, le cylindre est, pour toute vitesse, une figure *instable* d'équilibre relatif.