BULLETIN DE LA S. M. F.

G. JULIA

Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière $G(x,y) = 0$

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 26-37

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__26_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1926, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE DOMAINE D'EXISTENCE D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE RELATION ENTIÈRE $G(x, y) = 0$;

PAR M. GASTON JULIA.

1. Le but du présent Mémoire est de donner quelques indications sur les bornes du domaine d'existence d'une fonction $y(x)$ définie par une relation irréductible $G(x, y) = 0$, où G est une fonction *entière* des deux variables x et y. Lorsque G est simplement linéaire en x, on sait par le théorème classique de M. Picard que la fonction $y(x)$, alors fonction inverse d'une fonction méromorphe, est définie dans tout le plan x, sauf en deux points au plus : la surface de Riemann R_x, sur laquelle $y(x)$ est uniforme, laisse donc au plus deux points du plan x à découvert et ces deux points sont d'ailleurs des points frontière de R_x. Relativement au cas où G est un polynome en x, dont les coefficients sont des fonctions entières de y, M. Remoundos a montré que la surface de Riemann R_x ne peut laisser à découvert qu'un *nombre fini* de points x, nombre dépendant du degré de G par rapport à x.

Envisageant ici le cas où G est entière à la fois par rapport à x et à y, on verra que l'ensemble E des points x pour lesquels y n'est pas défini, c'est-à-dire pour lesquels l'équation $G(x, y) = 0$, n'admet pas de racine en y, peut être un ensemble infini dénombrable, mais *ne peut certainement pas comporter un continu*. Pour abréger, on appellera points exceptionnels les points x de l'ensemble E.

Ces points, que la surface de Riemann R_x laisse à découvert, sont toujours des points frontière de cette surface, et lorsque x tend vers un de ces points en restant intérieur à R_x, $y(x)$ tend vers l'infini.

Dans le premier paragraphe on montre que E peut contenir une infinité dénombrable de points; dans le deuxième, on établit que $y(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers un point frontière quelconque de R_x, en restant intérieur à R_x. Et à l'aide de cette propriété on établit aisément (troisième paragraphe) que la surface R_x

ne peut laisser à découvert un continu du plan x, d'où suit la propriété de E signalée plus haut. Resterait à voir si cet ensemble E, sans être continu, peut avoir la puissance du continu.

Dans un dernier paragraphe, on donnera quelques indications sur l'ensemble $\mathfrak{E}$ des points x pour lesquels $y(x)$ *n'a qu'un nombre fini de déterminations*. Et l'on montrera sur un exemple que cet ensemble peut être *dénombrable et dense dans tout le plan*.

1. — L'ensemble E peut être un ensemble dénombrable quelconque ayant l'infini pour seul point limite.

2. On va le prouver en construisant une fonction entière $G(x, y)$, qui pour $x = x_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ *se réduira à une fonction entière en y du type exponentiel* $\Phi_i(y) = e^{\varphi_i(y)}$ *où* φ_i *est fonction entière de y*. L'ensemble E des x_i sera un ensemble dénombrable ayant l'infini pour seul point limite, et par ailleurs quelconque. On assujettira en outre $G(x, y)$ à cette autre condition : pour $x = x_0$, $G(x_0, y)$ sera une fonction entière de y, $\Phi_0(y)$, et l'on supposera que $\Phi_0(y)$ *a une infinité de zéros*. De cette façon, il sera clair que l'équation $G(x, y) = 0$ déterminera une fonction $y(x)$, qui aura une infinité de déterminations pour $x = x_0$, et par conséquent, en général, tandis qu'elle n'a aucune valeur finie pour x appartenant à l'ensemble E.

3. Soit $F(x)$ un produit canonique de facteurs primaires admettant pour zéros simples tous les points de E et en outre le point x_0. On pourra supposer que les points de E sont rangés dans un ordre tel que $|x_n|$ croît et devient infini avec n.

La fonction

$$F_i(x) = \frac{1}{F'(x_i)} \frac{F(x)}{x - x_i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

admet les points $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots$, pour zéros simples et en outre

$$F_i(x_i) = 1.$$

Formons la série

$$(1) \qquad G(x, y) = F_0(x)\,\Phi_0(y) + \sum_1^\infty \frac{F_i(x)\,\Phi_i(y)}{A_i},$$

les A_i étant des constantes que l'on va choisir convenablement.

En supposant qu'elle converge uniformément dans le domaine

$$|x| \leqq r, \qquad |y| \leqq R$$

[quels que soient r et R] elle définira une fonction entière $G(x, y)$, qui, pour $x = x_0$, se réduira bien à $\Phi_0(y)$ et pour $x = x_i$ se réduira à $\frac{\Phi_i(y)}{A_i}$, c'est-à-dire à une fonction entière en y, de type exponentiel, jamais nulle; $G(x, y)$ aura les propriétés réclamées.

4. On va choisir les A_i de manière à assurer la convergence de

$$\sum_1^\infty \frac{F_i(x)\,\Phi_i(y)}{A_i}. \tag{2}$$

Désignons par $M(r)$ le maximum du module de $|F(x)|$ sur le cercle $|x| = r$. Il est clair que, r étant donné, on aura pour $i \geqq i_0$, dès que $|x_i|$ sera $> r + \delta$,

$$|F_i(x)| \leqq \frac{M(r)}{|F'(x_i)|\,\delta} \qquad \text{lorsque} \qquad |x| \leqq r.$$

Soit d'autre part $\mu_i(R)$ le maximum du module de

$$\Phi_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, \infty)$$

sur le cercle $|y| = R$.

On va choisir les $|A_i|$ de façon à assurer la convergence de

$$\sum_1^\infty \frac{|F_i(x)|\,|\Phi_i(y)|}{|A_i|} \tag{3}$$

quels que soient x et y.

Donnons-nous r et R, d'ailleurs quelconques positifs, et considérons seulement les termes de (2) pour lesquels $|x_i| \geqq r + \delta$; (3) est alors majorée par la série

$$\sum_1^\infty \frac{M(r)\,\mu_i(R)}{|A_i|\,|F'(x_i)|\,\delta}, \tag{4}$$

si donc (4) converge, quels que soient r et R, on sera sûr que (2) converge uniformément quels que soient r et R.

Il suffit pour cela de choisir les $A_i F'(x_i) = \alpha_i$ de manière que

la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu_i(R)}{|\alpha_i|} \tag{5}$$

converge quel que soit R.

Or, pour un indice i déterminé, $\mu_i(R)$ croît avec R. Choisissons une suite de rayons $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots < R_n < \ldots$ croissant indéfiniment et tendant vers l'infini avec l'indice n. On pourra toujours choisir la suite des nombres α_i de manière que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu_i(R_i)}{|\alpha_i|} \tag{6}$$

soit convergente. Il en résulte que la série (5) est convergente quel que soit R, puisque, à partir d'un certain rang i, on a $R < R_i$ et par suite $\mu_i(R) < \mu_i(R_i)$. Donc la série (4) convergera, par suite (2) convergera uniformément et $G(x, y)$ aura bien les propriétés requises, sous la seule condition que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu_i(R_i)}{|A_i F'(x_i)|} \tag{6}$$

soit convergente. L'ensemble E était d'ailleurs quelconque et la seule condition à laquelle soient assujettis les $|A_i|$ est une condition de croissance.

II. — Allure de $y(x)$ aux points frontière de R_x.

5. Soit x_0 une valeur quelconque de x; $G(x_0, y) = 0$ ne peut avoir que des racines *isolées* $y_1^0, y_2^0, y_n^0, \ldots$ (1) dont le seul point limite est l'∞, et qui d'ailleurs pourraient ne pas exister.

De l'origine comme centre, dans le plan y, décrivons un cercle C de rayon R arbitrairement grand *ne passant par aucun des points* y_n^0. Ce cercle contiendra les points $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$; à l'extérieur de C seront les points $y_{n+1}^0, \ldots$.

L'ensemble des déterminations de $y(x)$, prenant la valeur y_i^0 pour $x = x_0$, constitue une fonction algébroïde de x dans un

(1) Les y_i^0 sont supposées distinctes, chacune pouvant être racine multiple de l'équation $G(x_0, y) = 0$.

certain cercle γ de centre x_0, et qui n'a dans ce cercle qu'un point critique algébrique au plus le point x_0. Lorsque x décrit ce cercle la détermination considérée décrit une petite aire entourant le point y_i^0. On peut trouver un cercle γ_ρ de centre x_0, de rayon ρ, tel que les déterminations de $y(x)$ prenant les valeurs $y_1^0, \ldots, y_n^0$ pour $x = x_0$ décrivent des aires toutes intérieures à C, et extérieures deux à deux, lorsque x décrira γ_ρ; en outre les déterminations de $y(x)$ prenant les valeurs $y_{n+1}^0, \ldots$, pour $x = x_0$, décriront des aires *extérieures* à C.

Que l'on puisse trouver un cercle γ_ρ tel que les déterminations de $y(x)$ égales à $y_1^0, \ldots, y_n^0$ en x_0 décrivent des aires intérieures à C et deux à deux extérieures, cela est évident d'après le théorème général sur les fonctions implicites. En ce qui concerne les déterminations *extérieures à* C, il ne serait impossible de trouver $\gamma\rho$ que si, quelque petit que soit ρ, l'aire décrite par une de ces déterminations *rencontrait* C, ce qui équivaudrait à dire que pour toute valeur ρ_i de ρ on pourrait trouver sur C un point Y_i et dans le cercle $|x - x_0| \leq \rho_i$ un point X_i tels que

$$G(X_i, Y_i) = 0.$$

Lorsque ρ_i tend vers zéro, les points x_i tendent vers x_0; les points Y_i situés sur C ont au moins un point limite Y. Au point (x_0, Y) la fonction $G(x, y)$ est holomorphe. Les points (X_i, Y_i) admettent pour point limite le point $(x_0 Y)$, et l'on sait que $G(X_i, Y_i) = 0$. On aurait donc $G(x_0, Y) = 0$. Par conséquent, le cercle C passerait par une des racines y_i^0 de $G(x_0, y) = 0$ contrairement à l'hypothèse. On conclut de là que, si l'on entoure $y_1^0, \ldots, y_n^0$ de cercles $C_1^0, \ldots, C_n^0$ intérieurs à C et de rayons μ arbitrairement petits, et si l'on choisit ρ assez petit, la fonction $G(x, y)$ ne s'annulera jamais lorsque y décrira l'intérieur et le contour de l'aire Δ intérieure à C et extérieure aux C_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et x l'aire du cercle γ_ρ de centre x_0. Dans le domaine ainsi défini par le point (x, y), on aura $|G(x, y)| > \varepsilon$. Si, pour $x = x_0$, l'équation $G(x, y) = 0$ n'avait pas de racines, ce qu'on vient de dire s'appliquerait au domaine (x, y) défini par l'intérieur du cercle γ_ρ pour x et l'intérieur du cercle C pour y, ce qui revient en somme à dire qu'en ce cas, au voisinage de x_0, toutes les valeurs de $y(x)$ sont en valeur absolue arbitrairement

grandes [$|y(x)| > R$, aussi grand que soit R] pourvu que x soit suffisamment voisin de x_0, c'est-à-dire $|x - x_1| < \rho$, ρ assez petit.

6. Partons maintenant d'un point x_1 de la surface de Riemann R_x, avec la détermination correspondante de $y(x_1)$. Nous choisirons ensuite le rayon R de C supérieur à la valeur absolue de cette détermination de $|y(x_1)|$ et d'ailleurs *arbitrairement grand* et nous pouvons toujours supposer $y(x_1)$ différent des valeurs $y_1^0, \ldots, y_n^0$. ρ et μ pourront dès lors être choisis suffisamment petits pour que la valeur $y(x_1)$ soit intérieure au domaine Δ du n° 5, c'est-à-dire extérieure aux cercles $C_i^0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ et intérieure au cercle C.

Faisons décrire à la variable x un chemin allant, sur R_x, du point x_1 au point x_0, à condition bien entendu que le point x_0 soit un point intérieur ou un point frontière de cette surface. x_0 sera point intérieur à un feuillet de R_x si, en opérant le prolongement analytique de $x(y)$ à partir de x_1 et de la détermination considérée, on peut atteindre x_0 au bout d'un nombre fini d'opérations, le nombre des déterminations obtenues en x_0 par tous les modes possibles de prolongement analytique représentera le nombre des feuillets de R_x sur lesquels x_0 est un point intérieur. x_0 sera point frontière de R_x si, en opérant par prolongement analytique à partir de x_1, on peut atteindre des points arbitrairement voisins de x_0, sans jamais atteindre x_0. Que x_0 soit point intérieur ou point frontière de R_x, on va voir que lorsque x tend vers x_0, $y(x)$ a toujours une limite *déterminée* qui est *soit une des racines de l'équation* $G(x_0, y) = 0$ (alors x_0 est intérieur à R_x, sur un des feuillets), soit l'*infini* (alors x_0 est point frontière de R_x). En effet, partant de x_1 on pourra toujours approcher aussi près qu'on voudra de x_0 en restant sur R_x; la valeur de $y(x)$ partant de $y(x_1)$ décrira un chemin continu dans le plan des y. La valeur initiale $y(x_1)$ appartient au domaine Δ intérieur à C et extérieur aux cercles C_i^0, mais dès que x pénètre dans le cercle γ_ρ, $|x - x_0| < \rho$, le point $y(x)$ correspondant ne pourra plus appartenir à Δ, puisque dans Δ $|G(x, y)| > \varepsilon$. Le chemin décrit par $y(x)$, partant de $y(x_1)$: ou bien aura donc pénétré dans un des cercles C_i^0, dont il ne pourra désormais plus sortir, ou bien franchit la circonférence du cercle C pour ne plus rentrer dans C;

en d'autres termes on aura dès que $|x - x_0| < \rho$, ou bien

$$|y(x) - y_i^0| < \eta_i \qquad (i \text{ ayant une certaine valeur}),$$

ou bien

$$|y(x)| > R.$$

Les nombres η_i et R ayant été choisis arbitrairement (petit et grand) cela montre que, x tendant vers x_0, y *tend vers une des racines* y_i^0 *de* $G(x_0, y) = 0$ *ou vers l'infini.* Dans le premier cas, comme le point (x_0, y_i^0) est, point ordinaire pour $G(x, y)$, il est clair que la détermination finale de $y(x)$ sera algébroïde en x_0 et coïncidera avec l'une des déterminations égales à y_i^0 en x_0. Le point x_0, alors un point intérieur de R_x, sera point simple ou point critique algébrique de $y(x)$.

Dans le deuxième cas x_0 considéré est un point frontière. Il se peut d'ailleurs qu'en suivant un autre chemin pour aller de x_1 à x_0 on ait pu *atteindre* effectivement x_0, parce que x_0 peut être point frontière sur un ou plusieurs feuillets, et point intérieur sur d'autres, c'est ce qui arrivera par exemple si l'équation $G(x_0, y) = 0$ n'a qu'un *nombre fini de racines.* En suivant certains chemins à partir de x_1, on pourra atteindre x_0 avec des déterminations de $y(x)$ égales à ces racines, et en suivant d'autres chemins $y(x)$ tendra vers l'infini quand x tendra vers x_0. Si enfin $G(x_0, y) = 0$ n'a pas de racines et si cependant elle en a pour des points infiniment voisins de façon qu'on puisse s'approcher indéfiniment de x_0 par prolongement analytique, x_0 sera point frontière sur tous les feuillets de R_x. Quel que soit le chemin suivi pour aller de x, en x_0 sur R_x, la détermination de $y(x)$ tendra vers l'infini quand x tendra vers x_0.

7. En définitive, si x décrit un chemin *aboutissant à un point accessible de la frontière de la surface de Riemann* R_x, $y(x)$ *tend toujours vers l'infini.*

On remarquera l'analogie de l'analyse précédente avec celle de M. Iversen (1) pour le cas où $G(x, y)$ *est linéaire en* x [$y(x)$, fonction inverse de fonction méromorphe].

---

(1) F. Iversen, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (*Thèse*, Helsingfors, 1914).

On remarquera en outre que l'analyse précédente repose sur ce double fait :

1° Le chemin que décrit x admet x_0 pour limite et x_0 seulement;

2° $y(x)$ décrit un chemin *continu* qui dès lors s'enferme dans un C_i^0 ou sort de C. On ne peut donc affirmer la conclusion que si x_0 est point *frontière accessible* de R_x de façon qu'il existe sur R_x des chemins continus ayant x_0 pour point limite unique.

Le point $x = \infty$ lui-même est un point frontière de R_x. Sur les chemins de R_x qui aboutissent à $x = \infty$, l'allure de $y(x)$ est moins simple que celle de $y(x)$ au voisinage des points accessibles de la frontière de R_x à distance finie. Ici $y(x)$ peut n'avoir pas de limite déterminée car la ligne $x = \infty$ est une ligne singulière essentielle pour la fonction $G(x, y)$. Mais, si par exemple la surface de Riemann R_y du plan y, sur laquelle est uniforme la fonction $x(y)$ définie par $G(x, y) = 0$, a des points frontière accessibles, chacun de ces points frontière sera la limite atteinte par $y(x)$ quand x tend vers l'infini sur R_x par un chemin convenable; on le verrait de la même façon que précédemment on a vu que $y(x)$ tendait vers l'infini quand x tendait par un chemin continu vers un point frontière accessible de R_x. En ce sens on peut dire que les points frontière accessibles de R_x *sont les valeurs asymptotiques de la fonction* $x(y)$ *quand* y *tend vers l'infini* par des chemins convenables de R_y, et inversement.

III. — La surface R_x ne peut laisser a découvert un continu du plan x.

8. En définitive $y(x)$ est une fonction holomorphe *sur* R_x, et telle que si x tend par un chemin continu (ligne de Jordan ou chemin formé par exemple d'une suite dénombrable de segments de droite) vers un point frontière accessible de R_x, $y(x)$ *tend vers l'infini*. Les zéros de $y(x)$ sur R_x correspondent aux x racines de l'équation

$$G(x, 0) = 0,$$

ce sont des points $x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots$ qui sont en nombre limité ou bien ont pour seul point limite $x = \infty$. La fonction $Y(x) = \frac{1}{y(x)}$ est

uniforme et analytique sur R_x, et sur R_x elle ne peut admettre comme singularité que des pôles aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ci-dessus; de plus sur chacun des chemins de R_x tendant vers un point frontière accessible, elle tend VERS ZÉRO.

Dans ces conditions on peut appliquer le théorème suivant :

« *Si une fonction* $w = f(z)$ *est analytique et uniforme sur une surface de Riemann* R *du plan* z, *qui laisse à découvert un certain continuum de valeurs et si* $f(z)$ *converge vers zéro sur toute ligne de Jordan qui tend vers un point frontière accessible de* R, *alors* $f(z)$ *est identiquement nulle.* »

Ce théorème, énoncé par M. Zoretti dans son Livre *Leçons sur le Prolongement analytique* n'y est pas démontré d'une façon satisfaisante. La question a été reprise par M. W. Gross dans un Mémoire des *Math. Annalen*, t. 78, intitulé *Zur Theorie der Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten* où l'on trouvera énoncées quelques objections qu'on peut faire à la démonstration de M. Zoretti. La démonstration donnée par M. Gross aux nos 2, 3, 4 de son Mémoire ne laisse rien à désirer. Elle s'applique aussitôt à notre fonction $Y(x)$ après les quelques précautions suivantes nécessitées par les pôles de $Y(x)$.

Supposons que R_x laisse à découvert un certain continu $\mathcal{F}$. On a vu que, pour que $y(x)$ fût nul il fallait que x eût l'une des valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots$. Si l'on raisonne dans le plan x comme on a raisonné aux nos 5 et 6 du présent Mémoire dans le plan y, et inversement, on pourra tracer dans le plan x un cercle Γ de centre O, de rayon R arbitrairement grand, ne passant par aucun des x_i^0 et autour des x_i^0 *intérieurs à* Γ, des cercles γ_i^0 de rayon η arbitrairement petits de façon que lorsque $|y|$ restera $< \rho$, ρ étant choisi assez petit, les racines $x(y)$ de $G(x, y) = 0$ restent ou bien intérieures aux cercles γ_i^0 ou extérieures à Γ. C'est-à-dire lorsque x sera extérieur aux γ_i^0 et intérieur à Γ, $y(x)$ définie par $G(x,y) = 0$ devra nécessairement être en valeur absolue $> \rho$. Il suffit alors de considérer la partie de R_x qui se projette dans le domaine Δ intérieur à Γ extérieur aux γ_i^0, η et $\frac{1}{R}$ étant arbitrairement petits, il y aura toujours une partie de $\mathcal{F}$ dans Δ; dans la partie de R_x intérieure à Δ on aura $|y| > \rho$ et par conséquent $|Y(x)| < \frac{1}{\rho}$, il n'y

aura dès lors qu'à appliquer mot pour mot la démonstration du n° 4 du Mémoire de M. Gross pour conclure que $Y(x)$ devrait être identiquement nul. La contradiction à laquelle on arrive démontre bien que l'on ne peut admettre l'existence d'un continu $\mathcal{T}$ en tout point duquel l'équation $G(\xi, y) = 0$ n'aurait pas de racine en y.

9. L'ensemble E des x pour lesquels $y(x)$ n'a pas de valeur finie ne peut être un continu. Remarquons, ce qui est presque évident, que E EST FERMÉ, parce que si en un point x_0, $y(x)$ a une valeur finie, il en sera de même dans un certain cercle de centre x_0. Mais E peut contenir des points isolés [par exemple pour

$$G(x, y) = x - e^y = 0,$$

où E compte seulement le point $x = 0$ à distance finie]. E se décompose donc en un *ensemble dénombrable et en un ensemble parfait qui devra être nul ou discontinu*. Le cas d'un ensemble parfait discontinu est-il possible effectivement, ou bien faut-il admettre que E est nécessairement dénombrable, il serait intéressant de le décider.

IV. — SUR L'ENSEMBLE $\mathfrak{E}$ DES POINTS x POUR LESQUELS $y(x)$ N'A QU'UN « NOMBRE FINI » DE DÉTERMINATIONS.

10. L'ensemble $\mathfrak{E}$ de points x, pour lesquels $y(x)$ n'a qu'un *nombre fini* de déterminations peut être d'une nature variée. Un tel point sera évidemment point frontière sur une infinité de feuillets de R_k et point intérieur sur les feuillets en nombre fini qui correspondent aux déterminations finies de $y(x)$. On va examiner une partie intéressante de l'ensemble $\mathfrak{E}$: l'ensemble $\mathfrak{E}'$ des valeurs de x, pour lesquelles la fonction $G(x, y)$, entière en y, *se réduit à un polynome en* y.

On peut toujours développer G suivant les puissances de y

$$G(x, y) = \sum_0^\infty g_n(x)\, y^n,$$

les coefficients $g_n(x)$ sont des fonctions entières de x. Une

valeur ξ de $\mathscr{E}'$ annule tous les g_n à partir d'un certain rang. Elles appartiennent donc à l'ensemble constitué par les zéros de tous les g_n. Cet ensemble est dénombrable. *$\mathscr{E}'$ est dénombrable.* On va voir qu'*il peut être dense dans tout le plan x.*

11. On considérera pour cela *un ensemble dénombrable quelconque*, dense dans tout le plan des x et soient $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ces points dans l'ordre adopté pour l'énumération.

Posons

$$g_0(x) = a_0(x - x_0),$$
$$g_1(x) = a_1(x - x_0)(x - x_1),$$

et, en général,

$$g_i(x) = a_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_i) = a_i \prod_0^i (x - x_i),$$

les a_i étant des constantes convenables.

On peut choisir les a_k de façon que la série

$$\sum_{\infty}^{0} g_k(x)\, y^k$$

converge *uniformément* dans tout domaine

$$|x| \leqq r, \qquad |y| \leqq R,$$

quels que soient r et R, et représente dans ce domaine une fonction entière de x et y.

Il faut et il su(fit pour cela que

$$\lim_{n=\infty} |g_n|^{\frac{1}{n}} = 0, \tag{1}$$

dans tout domaine $|x| \leqq r$.

Désignons par $M_n(r)$ le maximum de $\prod_{k=0}^{n} |x - x_k|$ sur le cercle $|x| = r$; la condition à remplir sera

$$\lim_{n=\infty} A_n^{\frac{1}{n}} [M_n(r)]^{\frac{1}{n}} = 0 \qquad [|a_n| = A_n]. \tag{2}$$

Or, $M_n(r)$, pour n fixe, croît avec r.

Procédant comme au n° 4 on choisira une suite croissante de

rayons r_n tendant vers l'infini avec n, et l'on choisira les A_n de façon que

$$\lim_{n=\infty} A_n^{\frac{1}{n}}[M_n(r_n)]^{\frac{1}{n}} = 0, \tag{3}$$

ce qui pourra toujours être réalisé avec des A_n convergeant assez rapidement *vers zéro*.

On aura alors la relation (2) pour toute valeur finie de r et par suite la relation (1) uniformément dans tout domaine $|x| \leqq r$ d'où l'on conclut la convergence uniforme de

$$G(x, y) = \sum_0^\infty g_k(x) y^k$$

dans tout domaine $|x| \leqq r$, $|y| \leqq R$.

Lorsque x est égal à x_i, $G(x, y)$ se réduit à un polynome de degré $(i-1)$ puisque $G_k(x_i) = 0$ pour $K = i, i+1, \ldots, \infty$. L'ensemble $\mathcal{E}'$, pour la fonction entière $G(x, y)$, se réduit à l'ensemble des x_i. Le nombre des déterminations finies de y pour $x = x_i$ croissant indéfiniment avec i nous prouve que la surface de Riemann R_x de $y(x)$ a bien un nombre *infini de feuillets*, c'est-à-dire que pour les valeurs *générales de* x, $y(x)$ aura une infinité de déterminations.

L'exemple actuel prouve que les projections sur le plan x des points frontière de R_x peuvent remplir tout le plan puisque ceux de ces points frontière qui appartiennent à $\mathcal{E}'$ forment un ensemble dénombrable partout dense. On avait déjà des exemples, dus à MM. Gross, Iversen, de fonctions $y(x)$, inverses de fonctions entières $[G(x, y)$ linéaire en $x]$ pour lesquels *tout point de plan* x est projection d'un point frontière de R_x, c'est-à-dire où toute *valeur* x *est valeur asymptotique de la fonction entière* $x(y)$ *lorsque* y tend vers l'infini sur un chemin convenable (1).

---

(1) W. Gross, *Gine ganze Funktion, für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist* (*Math. Annalen*, t. 79).