ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES BOURION

L'indicatrice de croissance d'une fonction sous-harmonique de n variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 65 (1948), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

L'INDICATRICE DE CROISSANCE D'UNE FONCTION SOUS-HARMONIQUE DE n VARIABLES

PAR M. GEORGES BOURION.

Dans une étude antérieure (1), j'ai essayé d'analyser la théorie classique de l'indicatrice de croissance (2) en y séparant les éléments géométriques de ceux qui ressortissent à la théorie des fonctions. Je me propose ici de reprendre cette analyse, sous une forme aussi élémentaire que possible, dans un espace euclidien quelconque (3).

I. — Recouvrements de l'espace par des demi-espaces ouverts.

1. Remarquons tout d'abord que si une droite D est recouverte par une famille *finie* (F) de demi-droites ouvertes Q, D peut être recouverte par *deux* demi-droites de (F). Nous pouvons toujours nous ramener au cas où (F) est *minimale*; nous entendons par là que la suppression d'un élément quelconque

(1) G. BOURION, *Sur l'indicatrice de croissance d'une fonction sous-harmonique dans un angle* (*Bull. des Sc. Math.*, 2e série, t. LXXI, 1947, p. 17). — *Erratum :* au paragraphe II, n° 5, supprimer : $\alpha < \varphi < \beta$; (on peut prendre pour φ une détermination quelconque de l'angle polaire de F).

(2) G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* [*Math. Zeitschr.* 29, 1929, p. 549-640 (*voir* p. 581 à 597)].

(3) Le présent travail est indépendant du précédent, sauf pour une démonstration particulière (II.3).

de (F) donne une famille qui ne couvre plus D. Soit alors $Q_0 \in (F)$; l'extrémité D_0 de Q_0, n'appartenant pas à Q_0, appartient à une autre demi-droite Q_1 de (F); si Q_1 avait même direction que Q_0, on aurait $Q_0 \sqsubset Q_1$ et Q_0 serait inutile, contrairement à l'hypothèse; Q_1 a donc la direction opposée à celle de Q_0, et la réunion de Q_0 et Q_1 couvre D.

Ce résultat s'étend à un espace de dimension quelconque sous la forme suivante : *Si l'espace* E^m, *de dimension m, est couvert par une famille finie* (F) *de demi-espaces ouverts* Q (1), E^m *peut être couvert par une famille extraite de* (F) *et comprenant* $m+1$ *au plus des demi-espaces* Q.

Nous pouvons supposer le lemme établi pour les espaces de dimension inférieure à m. Nous pouvons d'autre part supposer la famille (F) minimale : la suppression d'un élément quelconque donne alors une famille qui ne couvre plus E^m. Soit $Q_0 \in (F)$. Il se peut tout d'abord que le bord D_0 de Q_0 soit entièrement recouvert par un même demi-espace Q_1 de (F); le bord D_1 de Q_1 est alors parallèle à D_0; les normales à D_0 et D_1, orientées respectivement vers l'intérieur de Q_0 et de Q_1, sont de directions opposées (sans quoi $Q_0 \sqsubset Q_1$, et Q_0 serait inutile); la réunion de Q_0 et Q_1 couvre donc E^m.

Écartons ce cas particulier : D_0 est alors un espace de dimension $m-1$, couvert par la famille finie (F') des demi-espaces ouverts $(m-1)$ — dimensionnels $Q.D_0$ correspondants à ceux des demi-espaces Q de (F) dont le bord D n'est pas parallèle à D_0 (2). Par l'hypothèse de récurrence, on peut extraire de (F') une famille de m éléments au plus couvrant D_0 : soit

$$D_0 \sqsubset Q_1.D_0 + Q_2.D_0 + \ldots + Q_k.D_0, \qquad k \leq m;$$

la réunion des demi-espaces ouverts $Q_1, \ldots, Q_k$ couvre D_0 et par suite l'un au moins des deux demi-espaces séparés par D_0 (3); ce ne peut être Q_0, (F) étant supposée minimale; c'est donc le demi-espace complémentaire, et les demi-espaces $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$, dont le nombre $k+1$ ne surpasse pas $m+1$, couvrent E^m.

2. Considérons maintenant une famille infinie (F) de demi-espaces ouverts Q telle que tout point de E^m appartienne à un élément au moins de (F); supposons que l'on puisse extraire de (F) une famille finie (f) couvrant E^m sauf peut-être un ensemble borné B; B borné étant de plus nécessairement fermé peut, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, être couvert par une famille finie (f')

(1) Nous emploierons le mot « espace » au sens d'espace euclidien; un demi-espace ouvert Q de E^m est l'une des composantes du complémentaire d'un $(m-1)$-plan D (le *bord* de Q), ou encore l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une même inégalité linéaire avec exclusion de l'égalité.

(2) A.B désigne l'ensemble des points communs aux ensembles A et B.

(3) L'ensemble complémentaire de $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k$, c'est-à-dire la partie commune des demi-espaces fermés complémentaires de $Q_1, \ldots, Q_k$, est convexe; il ne peut donc avoir de points à la fois dans les deux demi-espaces de bord D_0, puisqu'il n'a pas de points dans D_0.

extraite de (F). E^m couvert par une famille finie $(f)+(f')$ extraite de (F) peut, d'après le lemme précédent, être couvert par une famille d'au plus $m+1$ demi-espaces Q pris dans (F).

Ce raisonnement est applicable, en particulier, si à toute direction (1) dans E^m correspond au moins un demi-espace $Q \in (F)$ tel que la normale au bord de Q, orientée vers l'intérieur de Q, ait la direction donnée; en effet, si les m droites $Ox_1, \ldots, Ox_m$ sont deux à deux perpendiculaires et si Q_i' et Q_i'' sont deux demi-espaces de (F) tels que les normales intérieures correspondantes soient respectivement parallèles aux deux directions de Ox_i, on peut former la famille (f) avec $Q_1', Q_1'', \ldots, Q_m', Q_m''$.

En nous plaçant dans l'hypothèse précédente, considérons une famille finie (Φ) extraite de (F), couvrant E^m, et supposons cette famille minimale. Désignons par $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$ les demi-espaces de (Φ), par d_i la normale au bord de Q_i orientée vers l'intérieur de Q_i. Une direction d de E^m ne peut être à angle obtus avec tous les d_i : un point suffisamment éloigné dans une telle direction serait en effet extérieur à tous les Q_i. Supposons maintenant qu'une direction d ne fasse d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, \ldots, d_k$; nous partagerons ces dernières en deux classes, (I) comprenant les directions normales à d et (II) les directions qui forment un angle obtus avec d. Par un point A pris arbitrairement dans E^m, menons une demi-droite Az de direction d; un point suffisamment éloigné sur Az ne peut appartenir à aucun demi-espace de classe (II) et appartient par suite à un Q_i de classe (I); ce dernier contient également A, puisque Az est parallèle au bord de Q_i. A étant un point arbitraire de E^m, nous voyons que les Q_i de classe (I) suffisent à recouvrir E^m; la classe (II) est donc vide, d'après la propriété minimale postulée pour (Φ). En d'autres termes, une direction de E^m qui ne fait d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, d_1, \ldots, d_k$ est normale à toutes ces directions.

Soient alors $D_0, D_1, \ldots, D_k$ les demi-droites menées par un même point Ω parallèlement à $d_0, d_1, \ldots, d_k$, et M^q la multiplicité linéaire déterminée par ces demi-droites (2). L'enveloppe convexe H de $D_0, D_1, \ldots, D_k$ (3) est certainement contenue dans M^q; si H ne remplit pas M^q, Ω est un point frontière de H; soit, dans l'espace q-dimensionnel M^q, P un $(q-1)$-plan d'appui de H en Ω, et d la direction de la normale menée dans M^q à P et orientée du côté opposé à H; d ne faisant d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, \ldots, d_k$, serait d'après ce qui précède normale à toutes ces directions, et $D_0, \ldots, D_k$ appartiendraient toutes au $(q-1)$-plan P, en contradiction avec la définition de M^q. Ainsi l'enveloppe convexe de $D_0, \ldots, D_k$ n'est autre que la multiplicité linéaire M^q déterminée par ces demi-droites.

---

(1) Le mot « direction » est employé ici et dans la suite au sens de « direction de droites orientées ».

(2) Multiplicité linéaire de plus petite dimension contenant $D_0, D_1, \ldots, D_k$.

(3) Plus petit ensemble convexe contenant $D_0, D_1, \ldots, D_k$.

Il résulte de là que la dimension q de M^q, qui *a priori* ne peut surpasser $k+1$, est au plus égale à k. Si l'on avait $q < k$, on pourrait recouvrir M^q avec une famille (Φ') extraite de (Φ) comportant au plus $q+1$ éléments, d'après le n° 1; (Φ') recouvrirait E^m, parce que la multiplicité qui projette orthogonalement sur M^q un point arbitraire de E^m est parallèle au bord de chacun des Q_i et de dimension moindre; il y aurait contradiction avec la propriété minimale de (Φ).

La dimension de M^q est ainsi égale à k.

II. — Lemme sur les ensembles convexes.

1. Considérons dans l'espace n-dimensionnel E^n un ensemble $\mathfrak{A}$ de directions d; chaque direction sera matérialisée par la demi-droite parallèle issue de l'origine O, et l'on pourra sans inconvénient employer la même notation pour une direction et pour la demi-droite correspondante.

Nous supposerons que $\mathfrak{A}$ satisfait aux deux conditions suivantes :

si $d \in \mathfrak{A}$, on peut indiquer un angle α_d tel que toute direction qui fait avec d un angle inférieur à α_d appartient aussi à $\mathfrak{A}$;

si les directions non opposées d_1 et d_2 appartiennent à $\mathfrak{A}$, toute direction comprise entre d_1 et d_2 ([1]) appartient aussi à $\mathfrak{A}$.

Alors, si $\mathfrak{A}$ contient deux directions opposées, $\mathfrak{A}$ renferme toutes les directions de E^n. Sinon, les points des demi-droites (ouvertes) associées aux directions de $\mathfrak{A}$ forment un ensemble ouvert convexe $\mathfrak{A}$ dont l'origine est un point frontière ([2]).

A chaque direction $d \in \mathfrak{A}$, nous supposerons associé un $(n-1)$-plan Π_d normal à d; Q_d sera le demi-espace ouvert limité par Π_d et tel que la normale à Π_d orientée vers l'intérieur de Q_d ait pour direction d; P_d sera le demi-espace fermé complémentaire de Q_d.

Nous allons établir le lemme suivant :

LEMME GÉOMÉTRIQUE. — *Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble convexe fermé constitué par les points communs à tous les demi-espaces fermés P_d correspondant aux différentes directions d de $\mathfrak{A}$. Pour que $\mathcal{C}$ admette les Π_d comme $(n-1)$-plans d'appui ([3]), il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

CONDITION (C). — *Quels que soient : d'une part, le système de directions linéai-*

([1]) C'est-à-dire telle que la demi-droite correspondante appartienne à l'angle d'ouverture inférieure à deux droits limité par d_1 et d_2.

([2]) Il existe alors au moins un $(n-1)$-plan qui laisse d'un même côté toutes les demi-droites d : le ou les $(n-1)$-plans d'appui de $\mathfrak{A}$ en O possèdent en effet cette propriété.

([3]) On entend par là : $\mathcal{C}$ est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés de bord Π_d; Π_d renferme au moins un point frontière de $\mathcal{C}$.

rement indépendantes (¹) $d_1, d_2, \ldots, d_p$ *appartenant à* $\mathfrak{A}$*; et, d'autre part, la demi-droite d contenue dans l'angle polyèdre qui a pour arêtes les demi-droites* $d_1, d_2, \ldots, d_p$ (²) :

Π_d *n'est pas entièrement recouvert par* $Q_{d_1}, Q_{d_2}, \ldots, Q_{d_p}$.

La condition (C) peut d'ailleurs être remplacée par l'une ou l'autre des conditions équivalentes que voici :

Pour les mêmes choix des d_i *et de d :*

Condition (C'). — *Les demi-espaces fermés* $P_{d_1}, P_{d_2}, \ldots, P_{d_p}$ *recouvrent complètement* Π_d.

Condition (C''). — *L'intersection* (certainement non vide) *de* $\Pi_{d_1}, \Pi_{d_2}, \ldots, \Pi_{d_p}$ *est dans* Q_d *ou sur* Π_d.

L'intersection S des Π_{d_i} est un point si $p = n$, un $(n-p)$-plan normal aux d_i et par suite également à d, si $p < n$. Soit Q' le demi-espace déduit de Q_d par une translation qui amène son bord Π' à passer par S. La réunion des Q_{d_i} recouvre Q' d'après l'hypothèse faite sur les d_i et sur d, mais ne couvre pas S et par suite ne couvre pas Π'. Pour que Π_d soit recouvert, il faut et il suffit qu'il soit intérieur à Q', c'est-à-dire que S soit intérieur au complémentaire de Q_d. Ceci établit l'équivalence des conditions (C) et (C'').

Soit A un point de S. Si M est un point de l'intersection K (non vide) des Q_{d_i}, la demi-droite (ouverte) d'origine A passant par M est contenue dans K. D'autre part, si $\vec{u}_i$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs de directions respectives d_i et d, $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des $\vec{u}_i$ avec des coefficients positifs; les points M de K étant caractérisés par $\overrightarrow{AM}.\vec{u}_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, et ceux de Q' par $\overrightarrow{AM}.\vec{u} > 0$, on voit que $K \sqsubset Q'$. Pour que Π_d soit complètement recouvert par les P_{d_i}, c'est-à-dire pour qu'il ne rencontre pas K, il faut et il suffit que Π_d ne soit pas intérieur à Q'. Les conditions (C') et (C'') sont donc bien équivalentes.

2. La nécessité de la condition (C) est immédiate. Si en effet un choix particulier du système $d_1, d_2, \ldots, d_p$ et de d met en défaut cette condition, tout point de Π_d est contenu dans l'un au moins des Q_{d_i}, et par suite étranger à l'un au moins des P_{d_i}, donc étranger à $\mathcal{C}$; Π_d, qui ne contient aucun point de l'ensemble fermé $\mathcal{C}$, ne peut en être un $(n-1)$-plan d'appui.

3. Supposons maintenant vérifiée la condition (C); envisageons d'abord le cas où $\mathfrak{A}$ renferme deux directions opposées d' et d'', et montrons que les demi-

(¹) On suppose donc que les p demi-droites $d_1, \ldots, d_p$ déterminent une multiplicité linéaire de dimension p.

(²) d appartient à $\mathfrak{A}$ d'après la seconde condition imposée à cet ensemble.

espaces $Q_{d'}$ et $Q_{d''}$ sont sans points communs; pour cela, considérons les directions d appartenant à un même 2-plan K passant par d' et d'', et pour chacune de ces directions la trace Q_d^* de Q_d sur K. Les conclusions de mon travail cité ci-dessus (*voir* en particulier le paragraphe I, n^{os} 4 et 5) s'appliquent et montrent que $Q_{d'}^*$ et $Q_{d''}^*$, donc aussi $Q_{d'}$ et $Q_{d''}$, sont sans points communs.

4. Supposons toujours la condition (C) vérifiée, et supposons de plus que le $(n-1)$-plan Π_δ correspondant à une direction particulière δ, $\delta \in \mathfrak{A}$, ne soit pas un $(n-1)$-plan d'appui de $\mathcal{C}$. Chaque point de Π_δ appartient alors à un demi-espace Q_d, $d \in \mathfrak{A}$, qui d'ailleurs ne peut être ni Q_δ, ni $Q_{\delta'}$ si la direction δ' opposée à δ appartient à $\mathfrak{A}$: Q_δ est en effet sans point commun avec Π_δ par sa définition même, et $Q_{\delta'}$ d'après le numéro précédent.

L'espace $(n-1)$-dimensionnel Π_δ est donc couvert par la famille (F) des demi-espaces $(n-1)$-dimensionnels Q_d^* découpés sur lui par les Q_d, $d \in \mathfrak{A}$, $d \neq \delta$, $d \neq \delta'$: $Q_d^* = \Pi_\delta . Q_d$. Nous pouvons appliquer à cette famille (F) les considérations du paragraphe I, n° 2 : Π_δ peut donc être recouvert par une famille finie (Φ) extraite de (F) et comprenant au plus n éléments; nous supposerons (Φ) minimale et nous désignerons ses éléments par $Q_{d_i}^* = \Pi_\delta . Q_{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \leq n$. Soit D_i la demi-droite obtenue en projetant sur Π_δ la demi-droite d_i, M^{k-1} la multiplicité linéaire déterminée par $D_1, D_2, \ldots, D_k$; rappelons que l'enveloppe convexe de $D_1, D_2, \ldots, D_k$ est identique à M^{k-1}. Si nous prenons d_i' entre δ et d_i, la projection de d_i' sur Π_δ est encore D_i; d'autre part $\Pi_\delta . Q_{d_i'} \supset \Pi_\delta . Q_{d_i}$ (1) ou $Q_{d_i'}^* \supset Q_{d_i}^*$; le système des $Q_{d_i'}^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$ recouvre aussi Π_δ. Nous pouvons donc supposer que les demi-droites d_i forment avec δ des angles aigus. Le point A_i où la droite qui porte d_i perce Π_δ appartient alors à la demi-droite D_i, si Π_δ coupe la demi-droite δ elle-même, à son prolongement si Π_δ coupe δ'; dans l'un ou l'autre cas, la projection Ω de l'origine sur Π_δ est intérieure à l'enveloppe convexe des A_i et il en résulte que δ est intérieure à l'angle polyèdre qui a les d_i pour arêtes; cette conclusion est encore valable si Π_δ passe par O.

L'hypothèse que Π_δ n'est pas un $(n-1)$-plan d'appui de $\mathcal{C}$ nous met ainsi en contradiction avec la condition (C), ce qui achève la démonstration du lemme.

5. *Remarque.* — Dans l'énoncé du lemme, la condition (C) peut être remplacée par la condition suivante, moins restrictive en apparence :

Condition (Γ). — *Quels que soient, d'une part, le système de n directions linéairement indépendantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$ prises dans $\mathfrak{A}$, et d'autre part la demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre qui a pour arêtes les demi-droites $d_1, d_2, \ldots, d_n$:*

Π_d n'est pas entièrement recouvert par $Q_{d_1}, Q_{d_2}, \ldots, Q_{d_n}$.

(1) Conséquence immédiate de la condition (C) appliquée à δ, d_i et à d_i'. *Voir* travail cité I, 4.

La démonstration du lemme avec la condition (Γ) est plus longue, et ce nouvel énoncé ne présente pas d'avantage pour les applications analytiques que nous avons en vue (¹).

III. — Lemmes sur les fonctions sous-harmoniques.

1. Nous aurons besoin de quelques lemmes se rattachant à des propriétés simples de l'équation des fonctions de Legendre.

Considérons une fonction des n variables $x_1, \ldots, x_n$ de la forme particulière

$$F(M) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r^\lambda \varphi(u), \tag{1}$$

où l'on pose

$$r = OM, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \qquad u = \cos\theta = \frac{x_n}{r}, \qquad \theta = (Ox_n, OM).$$

Le calcul du laplacien

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

donne

$$\frac{1}{r^{\lambda-2}} \Delta[r^\lambda \varphi(u)] = (1-u^2)\varphi''(u) - (n-1)u\varphi'(u) + \lambda(\lambda+n-2)\varphi(u). \tag{2}$$

L'équation différentielle

$$(1-u^2)\varphi''(u) - (n-1)u\varphi'(u) + \lambda(\lambda+n-2)\varphi(u) = 0, \tag{3}$$

devient, par le changement de variables $u = 1-v$, $\varphi(u) = \psi(v)$,

$$(2v - v^2)\psi''(v) + (n-1)(1-v)\psi'(v) + \lambda(\lambda+n-2)\psi(v) = 0. \tag{4}$$

La série $\sum_0^\infty a_k v^k$ vérifie formellement l'équation (4) si les coefficients consécutifs sont liés par la relation

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k(k+n-2) - \lambda(\lambda+n-2)}{(2k+n-1)(k+1)}, \tag{5}$$

qui détermine complètement les a_k si l'on prend $a_0 = 1$. Comme $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2}$, cette série converge uniformément sur tout segment $|v| \leq v_0$ avec $v_0 < 2$, donc en particulier sur le segment $0 \leq v \leq 1$, et sa somme $\Psi(v; \lambda)$ y vérifie l'équation (4).

Limitons la variation de λ à un segment $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ avec $\lambda_0 \geq 0$; la condition (5) jointe à $a_0 = 1$ montre qu'un a_k de rang donné est borné supé-

(¹) Il est clair que la condition (C) contient la condition (Γ). D'autre part, si la condition (Γ) est vérifiée, on peut montrer que la distance de l'origine à Π_d est une fonction continue de la direction d; on déduit facilement de là que la condition (Γ) implique la condition (C).

rieurement en module pour ces λ. Nous appliquerons ce résultat aux coefficients dont le rang ne surpasse pas λ_1 et nous utiliserons pour les autres l'inégalité

$$(6) \qquad 0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{1}{2}\,\frac{k(k+n-2)}{(k+1)\left(k+\frac{n-1}{2}\right)} \qquad (k>\lambda).$$

Pour les valeurs considérées de λ et pour $|\rho| \leq \rho_0$, $\rho_0 < 2$, la série $\sum a_k \rho^k$ est donc majorée par une série convergente de constantes. $\Psi(\rho; \lambda)$ est par suite une fonction continue de l'ensemble des deux variables pour $\lambda \geq 0$, $|\rho| < 2$.

Posons alors

$$\Psi(\rho; \lambda) = \Phi(u; \lambda);$$

nous obtenons une solution $\Phi(u; \lambda)$ de l'équation différentielle (3), dépendant du paramètre λ, qui est définie en particulier pour $0 \leq u \leq 1$, $\lambda \geq 0$ et qui est alors une fonction continue de l'ensemble des variables u et λ; cette solution prend pour $u = 1$ la valeur 1 (1).

Notons que, pour $\lambda = 1$, a_2 s'annule d'après (5) ainsi que les coefficients suivants; $\Psi(\rho; 1)$ se réduit à $1 - \rho$, et l'on a

$$\Phi(u; 1) = u \quad (2).$$

2. $\Phi(u; 1)$ étant positif pour $0 < u \leq 1$, la continuité de Φ montre que, sur un segment donné $u_0 \leq u \leq 1$ avec $u_0 > 0$, $\Phi(u; \lambda)$ a une borne inférieure positive pour toute valeur de λ suffisamment voisine de 1.

D'autre part, d'après (2) et la définition de $\Phi(u; \lambda)$,

$$\frac{1}{r^{\mu-2}}\Delta[r^{\mu}\Phi(u; \lambda)] = [\mu(\mu+n-2) - \lambda(\lambda+n-2)]\Phi(u; \lambda);$$

si $0 < \mu < \lambda$ et si $\Phi(u; \lambda) > 0$, cette expression est négative.

Étant donnée une valeur u_0 : $0 < u_0 < 1$, nous pourrons choisir une valeur $\lambda_0 > 1$ telle que $\Phi(u; \lambda_0) \geq h$ pour $u_0 \leq u \leq 1$, avec un h positif. Si nous prenons ensuite μ_0 entre 1 et λ_0, la fonction $f_0(M) = r^{\mu_0}\Phi(u; \lambda_0)$ est surharmonique dans la région définie par $\cos\frac{x_n}{r} \geq u_0$, et le rapport $\frac{f_0(M)}{r^{\mu_0}}$ est borné inférieurement dans cette région par un nombre positif h.

3. Soit $\rho(M)$ harmonique ou sous-harmonique dans un domaine infini $\mathcal{D}$, compris dans un cône $(Ox_n, OM) < \theta_0$ dont le demi-angle au sommet θ_0 est aigu. Supposons :

d'une part, que $\frac{\rho(M)}{r}$ est borné supérieurement dans $\mathcal{D}$ (ou tout au moins dans la partie de $\mathcal{D}$ extérieure à une certaine sphère de centre O); $\rho(M) \leq Ar$;

(1) Il est facile de montrer que $\Phi(u; \lambda)$ est une fonction décroissante de λ pour $0 \leq u \leq 1$. Nous n'aurons pas à utiliser cette propriété.

(2) Ceci exprime simplement que ru, c'est-à-dire x_n, est une fonction harmonique.

d'autre part, qu'il existe un nombre B, et pour chaque point frontière P de $\mathcal{D}$, un voisinage $\mathcal{V}_P$ tel qu'en tout point M de $\mathcal{V}_P$ contenu dans $\mathcal{D}$ la valeur de $v(M)$ ne surpasse pas B.

L'inégalité $v(M) \leq B$ *est alors vérifiée en tout point de* $\mathcal{D}$.

On peut supposer $B = 0$. Prenons $\varepsilon > 0$ et introduisons la fonction $f_0(M)$ du numéro précédent, en prenant $u_0 = \cos\theta_0$. On a sur $\mathcal{D}$ au voisinage d'un point frontière quelconque $v(M) \leq 0 < \varepsilon f_0(M)$; d'autre part, pour les valeurs de r suffisamment grandes, $v(M) \leq Ar \leq \varepsilon h r^{\mu_0}$.

Si l'on considère le domaine borné $\mathcal{D}'$ découpé dans $\mathcal{D}$ par une sphère de rayon suffisamment grand, la fonction surharmonique $\varepsilon f_0(M)$ majore $v(M)$ dans un voisinage de chaque point frontière, donc dans $\mathcal{D}'$ tout entier.

$v(M)$ est ainsi majoré en tout point de $\mathcal{D}$ par $\varepsilon f_0(M)$ quel que soit ε positif. On a donc bien $v(M) \leq 0$ dans $\mathcal{D}$ (1).

4. Gardons les mêmes hypothèses, et supposons de plus qu'il existe un nombre $B' < B$ tel que l'inégalité $v(M) \leq B'$ soit vérifiée sur $\mathcal{D}$ au voisinage de chaque point frontière extérieur à une certaine sphère S. Le lemme précédent, avec B' au lieu de B, s'applique à la fonction $v(M) - \frac{a}{r^{n-2}}$ où le coefficient positif a est pris assez grand pour que $B - \frac{a}{r^{n-2}} < B'$ dans S. Cette remarque nous permet d'énoncer le lemme suivant :

Si la fonction $v(M)$ *est harmonique ou sous-harmonique dans un domaine* $\mathcal{D}$ *contenu dans un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est aigu, si* $v(M)$ *est défini sur la frontière* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{D}$ (2) *et reste sous-harmonique sur* $\mathcal{D} + \mathcal{F}$ *on a*

$$\overline{\lim_{M \in \mathcal{D},\, r \to \infty}} v(M) = \overline{\lim_{P \in \mathcal{F},\, r \to \infty}} v(P). \quad (3)$$

5. Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ soit un angle polyèdre d'arêtes $d_1, d_2, \ldots, d_n$. $v(M)$ vérifiant les hypothèses précédentes, nous supposons que $\frac{v(M)}{r}$ a une

---

(1) Le raisonnement reste valable si l'on remplace l'hypothèse $v(M) \leq Ar$ par la suivante :

$$\lim_{\rho \to \infty} \left[\frac{1}{\rho^{1+\varepsilon}} \text{borne sup}_{M \in \mathcal{D},\, r = \rho} v(M) \right] = 0$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

(2) Cette hypothèse n'est donnée que pour la commodité de l'énoncé; en l'abandonnant, il faudrait poser pour $P \in \mathcal{F}$, $w(P) = \overline{\lim_{M \in \mathcal{D},\, M \to P}} v(M)$ et l'énoncé du lemme deviendrait

$$\overline{\lim_{M \in \mathcal{D},\, r \to \infty}} v(M) = \overline{\lim_{P \in \mathcal{F},\, OP \to \infty}} w(P).$$

(3) La valeur commune des deux membres pouvant être finie ou infinie.

limite supérieure finie a_i quand M s'éloigne indéfiniment sur $d_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Sur la droite support de d_i, orientée dans la direction d_i, nous prenons le point A_i tel que $\overline{OA_i} = a_i$ et nous considérons le $(n-1)$-plan Π_i normal en A_i à d_i; soit F le point de concours de ces hyperplans. Le produit scalaire $\overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM}$ est une fonction harmonique de M, égale sur d_i à $\overline{OA_i}.\overline{OM}$. Le lemme précédent appliqué à $v(M) - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM}$ montre, en opérant par récurrence sur n, que

$$\overline{\lim_{M \in \mathcal{D},\, r \to \infty}} \left[v(M) - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM} \right] \leq 0.$$

La limite supérieure de $\frac{v(M)}{r}$ quand M s'éloigne indéfiniment sur une demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre ne peut donc surpasser $\overline{OL}$, si L désigne la projection de F sur la droite support de d.

IV. — L'indicatrice de croissance.

Considérons dans l'espace euclidien E^n un ensemble ouvert convexe $\mathcal{A}$ ayant la propriété suivante : si le point M, autre que l'origine, appartient à $\mathcal{A}$, la demi-droite ouverte d'origine O passant par M est tout entière contenue dans $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathfrak{A}$ de ces demi-droites a les propriétés postulées au paragraphe précédent. Soit $v(M)$ une fonction définie et sous-harmonique, soit dans $\mathcal{A}$, soit dans la partie de $\mathcal{A}$ extérieure à un certain ensemble $\mathcal{R}$ fermé et borné. Nous supposerons que $\frac{v(M)}{r}$ est bornée supérieurement sur $\mathcal{A}$ ou sur $\mathcal{A} - \mathcal{R}$ (en excluant au besoin une sphère de centre O). A chaque demi-droite $d \in \mathfrak{A}$, dont nous désignerons le vecteur unitaire par $\vec{u}_d$, nous associons le nombre $h_d = \overline{\lim_{M \in d,\, r \to \infty}} \frac{v(M)}{r}$, le demi-espace fermé P_d défini par $\overrightarrow{OM}.\vec{u}_d \leq h_d$ et le bord Π_d de P_d.

$d_1, d_2, \ldots, d_r$ étant un système de demi-droites de $\mathfrak{A}$, linéairement indépendantes, qui définissent une multiplicité linéaire $\mathfrak{M}^p$, nous considérons dans $\mathfrak{M}^p$ une demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre d'arêtes $d_1, d_2, \ldots, d_r$; d appartient nécessairement à $\mathfrak{A}$. Le dernier énoncé du paragraphe précédent peut s'interpréter comme suit : l'intersection de $\Pi_{d_1}, \Pi_{d_2}, \ldots, \Pi_{d_r}$ est dans Q_d ou sur Π_d. Nous reconnaissons la condition (C″) du lemme géométrique.

Par conséquent, *les points communs aux demi-espaces* P_d $(d \in \mathfrak{A})$ *forment un ensemble convexe fermé non vide* $\mathfrak{I}$ *dont les* Π_d *sont les* $(n-1)$ *plans d'appui.* $\mathfrak{I}$ sera encore appelé l'*indicatrice de croissance* de $v(M)$ dans $\mathcal{A}$.