ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON JULIA

Développement en série de polynômes ou de fonction rationnelle de la fonction que fournit la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur un cercle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 44 (1927), p. 289-316

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1927_3_44__289_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉVELOPPEMENT

EN SÉRIE DE POLYNOMES OU DE FONCTION RATIONNELLE

DE LA

FONCTION QUI FOURNIT LA REPRÉSENTATION CONFORME

D'UNE AIRE SIMPLEMENT CONNEXE SUR UN CERCLE

PAR M. GASTON JULIA

1. L'aire D dont on fait la représentation conforme sur un cercle, sera supposée simplement connexe, bornée, contenant l'origine et située dans le plan z. Le cercle sera un cercle $|Z| \leq \rho$ de rayon ρ du plan Z, de manière que la fonction de représentation $Z = f(z)$ ait pour $z = 0$ les deux propriétés $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. On sait qu'elle est alors bien définie. Elle possède une propriété de *plus petit maximum* qui la caractérise : Parmi toutes les fonctions $Z = \lambda(z)$, pour lesquelles $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(0) = 1$, holomorphes dans D, il y en a une et une seule pour laquelle le maximum de $|\lambda(z)|$ dans D est le plus petit possible, *c'est justement* $f(z)$ [1]. ρ est alors le maximum de $|f(z)|$ dans D, on l'appelle *le rayon de l'aire* D.

2. Le présent Mémoire est issu de la remarque suivante : Pour un degré donné n, il existe un polynome $\pi_n(z)$ et un seul [pour lequel $\pi_n(0) = 0$, $\pi'_n(0) = 1$], tel que le maximum m_n de $|\pi_n(z)|$ dans D soit le plus petit possible (ceci sera démontré dans la suite). *Ces polynomes ont-ils une limite quand n devient infini, et cette limite est-elle* $f(z)$ *dans* D? C'est à cette question qu'on va ici répondre par l'affir-

(1) *Voir* par exemple G. JULIA, *Sur la représentation conforme des aires simplement connexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 1314).

mative sous des conditions très larges imposées à la *frontière de* D, en particulier lorsque cette frontière est une courbe de Jordan simple fermée. On verra d'ailleurs que ces conditions ne sont pas artificielles et qu'elles sont rendues nécessaires par l'instrument de représentation qui est ici un polynome.

Le Chapitre I est consacré à l'étude des polynomes $\pi_n(z)$ au point de vue de l'existence surtout.

Le Chapitre II traite de la convergence des $\pi_n(z)$.

Dans le Chapitre III on étudie la portée des conditions imposées à la frontière de D. Au Chapitre IV on revient sur diverses propriétés des $\pi_n(z)$ d'ordre géométrique. Au Chapitre V, on étudie la généralisation de la méthode employée à des représentations de $f(z)$ par séries de fractions rationnelles de diverses sortes. On signale enfin au Chapitre VI un nouvel aspect des questions traitées ici, lorsqu'on cherche à représenter D sur le cercle *unité*.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES POLYNOMES $\Pi_n(z)$.

---

3. Envisageons tous les polynomes $P_n(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ de degré $\leq n$, pour lesquels $P_n(0) = 0$, $P'_n(0) = 1$. Dans tout ce qui suit, un polynome ou une fonction holomorphe en O, tels que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ seront dits *normaux en* O. Le maximum M_n de $|P_n(z)|$ dans D est une fonction continue positive et non nulle de $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Lorsque les a_i prennent toutes les valeurs possibles, elle a un *minimum absolu* m_n qui n'est certainement pas nul. En effet, après ce qu'on a dit au n° 1, il est évident que $M_n > \rho$, donc $m_n > \rho$. Mais on peut voir directement que M_n est borné inférieurement. En effet si $|z| = r$ est un cercle C_r intérieur à D, on a

$$P'_n(0) = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{P_n(z)\,dz}{z^2}.$$

Donc $1 < \frac{M_n}{r}$, c'est-à-dire $M_n > r$, puisque sur C_r, on a $|P_n| < M_n$ sans égalité possible. Tous les M_n étant $> r$ on aura $m_n \geqq r$, quel que soit le rayon r de C_r pourvu que C_r soit intérieur à D.

D'autre part, tous les polynomes P_n pour lesquels M_n est borné supérieurement, par exemple $M_n < R$, ont leurs coefficients bornés. En effet on a

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{P_n(z)\, dz}{z^3}.$$

Donc $|a_2| < \frac{R}{r^2}$. De même $|a_3 < \frac{R}{r^3}$, ..., $|a_n| < \frac{R}{r^n}$.

Si donc l'on envisage les polynomes P_n pour lesquels $M_n < R$, leurs coefficients étant bornés, la fonction $M_n(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ sera continue en $(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ dans un domaine *borné*, donc, *elle atteint son minimum absolu* M_n pour au moins un système de valeurs des $a_2, \ldots, a_n$. C'est-à-dire qu'*il existe au moins un polynome*

$$\pi_n(z) = z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n,$$

tel que le maximum de $|\pi_n|$ *dans* D *soit précisément* m_n.

4. Montrons que *ce polynome* $\pi_n(z)$ *est unique*. Pour cela supposons qu'il y ait un deuxième polynome normal en O

$$Q_n(z) = z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_n z^n,$$

pour lequel Max $|Q_n|$ dans D soit m_n.

Envisageons alors le polynome $\lambda \pi_n + \mu Q_n = R_n$, λ et μ étant des nombres positifs dont la somme $\lambda + \mu = 1$. On aura évidemment

$$R_n = \lambda \pi_n + \mu \theta_n = z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n.$$

D'autre part, on a, dans D,

$$\text{Max}\,|R_n| \leqq \lambda\, \text{Max}\,|\pi_n| + \mu\, \text{Max}\,|Q_n| = m_n,$$

puisque, en tout point de D,

$$|R_n| \leqq \lambda\,|\pi_n| + \mu\,|Q_n|.$$

De plus, l'inégalité $\text{Max}|R_n| \leqq m_n$ ne peut être une égalité que si en

tout point où $|\tau_n|$ atteint son maximum, $|Q_n|$ atteint aussi son maximum, et cela de telle manière que $\tau_n = Q_n$. Pour que l'on puisse avoir $\mathrm{Max}|R_n|$ dans $D = m_n$ il est donc nécessaire que τ_n et Q_n soient égaux en tout point où $|\tau_n|$ est maximum. Or ces points *sont certainement différents de zéro*. De plus, si Q_n n'est pas identique à τ_n ces points satisferont à $Q_n - \tau_n = 0$, ou encore à

$$\beta_2 - \alpha_2 + (\beta_3 - \alpha_3)z + \ldots + (\beta_n - \alpha_n)z^{n-2} = 0.$$

Ils sont donc en nombre $n - 2$ au plus.

Nous allons maintenant montrer que l'on aboutit ainsi à une contradiction.

En effet, d'une part, si Q_n et τ_n distincts ne satisfont pas aux conditions précédentes, on aurait $\mathrm{Max}|R_n|$ dans $D < m_n$, ce qui contredit le fait que m_n est le minimum absolu des M_n pour tous les polynomes normaux en O. D'autre part, on va montrer que $|\tau_n|$ atteint son maximum m_n en *n points distincts au moins, d'où il résultera que* Q_n *doit être identique à* τ_n.

5. Supposons donc que $|\tau_n|$ atteigne son maximum m_n en $p \leqq n - 1$ points distincts qui sont évidemment situés sur la frontière de D. Désignons-les par $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ les valeurs

$$\mu_1 = \tau_n(z_1), \qquad \mu_2 = \tau_n(z_2), \qquad \ldots, \qquad \mu_p = \tau_n(z_p), \qquad |\mu_i| = m_n,$$

p étant $\leqq n - 1$, on peut toujours déterminer au moins un polynome $S_n = s_2 z^2 + \ldots + s_n z^n$ dépendant de $n - 1$ coefficients, prenant en tout point z_i la même valeur que τ_n;

$$S_n(z_i) = \tau_n(z_i) = \mu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Envisageons maintenant le polynome de degré $\leqq n$

$$\mathfrak{T}_n(z) = \tau_n(z) - \theta S_n(z) \qquad (\text{où } 0 < \theta < 1).$$

$\mathfrak{T}$ est normal en O.

Montrons qu'il est alors possible de choisir θ de manière que le maximum de $|\mathfrak{T}_n(z)|$ dans D soit $< m_n$.

En effet, on peut entourer chaque z_i d'un cercle de rayon r assez

petit pour que, lorsque z est dans ce cercle, on ait

$$|\pi_n(z)-\pi_n(z_i)|<\varepsilon<\frac{m_n}{2} \qquad \text{et} \qquad |S_n(z)-S_n(z_i)<\varepsilon.$$

Appelons c_i le cercle entourant z_i. Lorsque z reste dans la partie de D intérieure à c_i, $\zeta=\pi_n(z)$ reste dans l'aire Δ commune à un cercle Γ de

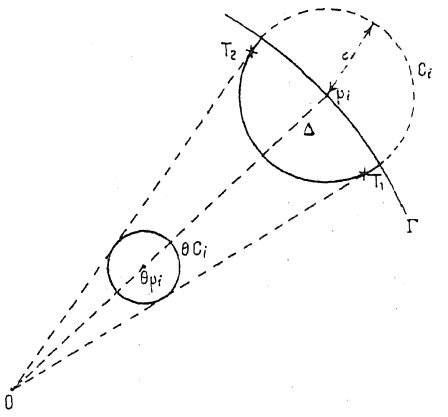

Fig. 1.

centre O de rayon m_n et à un cercle C_i de centre p_i de rayon ε; le point $\zeta_1=S_n(z)$ reste dans le cercle C_i. De O menons à C_i les tangentes OT_1 et OT_2. Si $\varepsilon<\frac{m_n}{2}$, l'angle T_1OT_2 est $<\frac{\pi}{3}$. Il est possible de choisir θ assez petit (1) pour que le cercle θC_i homothétique de C_i dans le rapport θ soit tout entier intérieur au secteur circulaire détaché dans Γ par l'angle T_1OT_2. Cela étant, le point $\theta\zeta_1=\theta S_n(z)$ reste intérieur à θC_i lorsque z est intérieur à c_i. On reconnaît immédiatement que la distance d'un point quelconque de l'aire Δ ou de son contour à un point quelconque du cercle θC_i ou de son contour est inférieure à la distance $O\mu_i=m_n$. Donc, quel que soit z *de* D *intérieur à* c_i, on aura

$$|\mathfrak{R}_n(z)|=|\pi_n(z)-\theta S_n(z)|=|\zeta-\theta\zeta_1|<m_n.$$

Lorsque z sera, dans D, extérieur à tous les cercles c_i, $|\pi_n(z)|$ res-

(1) On pourra prendre par exemple $\theta<\frac{m_n}{m_n+\varepsilon}$.

tera $\leq m'_n < m_n$. D'autre part, dans D, $|S_n(z)|$ reste $\leq \sigma$. Par conséquent, dans la partie de D extérieure aux c_i, on aura

$$|\mathcal{P}_n(z)| \leq m'_n + \theta\sigma.$$

Il suffit alors de choisir θ assez petit pour que $m'_n + \theta\sigma < m_n$, c'est-à-dire $\theta < \frac{m_n - m'_n}{\sigma}$, pour que l'on ait aussi dans la partie de D extérieure aux c_i, $|\mathcal{P}_n(z)| < m_n$.

En résumé, θ *étant pris inférieur au plus petit des deux nombres* $\frac{m_n}{m_n + \varepsilon}$ *et* $\frac{m_n - m'_n}{\sigma}$ *le polynome* $\mathcal{P}_n(z)$ *resterait en module* $< m_n$ *dans* D. $\tau_n(z)$ ne serait donc pas un polynome de degré $\leq n$ normal en O, dont le maximum du module dans D est le plus petit possible. La contradiction à laquelle on arrive montre donc que $|\tau_n(z)|$ *atteint son maximum* m_n *en n points distincts au moins* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ [1]. Par conséquent τ_n est bien unique.

6. Pour chaque degré n il existe ainsi un polynome normal τ_n et un seul pour lequel le maximum m_n de $|\tau_n|$ dans D est inférieur au maximum de $|P_n(z)|$ dans D, P_n étant un polynome quelconque, normal en O, de degré $\geq n$ distinct de τ_n. Il existe donc une suite infinie de polynomes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ et de nombres correspondants $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \ldots \geq m_n \geq \ldots$ qui n'iront jamais en croissant puisque évidemment τ_n peut être considéré comme un polynome de degré $n+1$ pour lequel $a_{n+1} = 0$; par conséquent, si $\tau_n \equiv \tau_{n+1}$ on aura $m_n = m_{n+1}$, mais si $\tau_n \not\equiv \tau_{n+1}$ on aura $m_n > m_{n+1}$. D'autre part, les τ_n étant des fonctions normales en O, on aura nécessairement $m_n > \rho$, si τ_n n'est pas identique à la fonction normale $f(z)$ fournissant la représentation conforme de D sur un cercle $|Z| < \rho$, et $m_n = \rho$ ne pourra se réaliser que si $\tau_n \equiv f(z)$. Il peut assurément arriver qu'un certain nombre de τ_n consécutifs soient identiques, les m_n correspondants étant alors égaux. Si par exemple $\tau_n = \tau_{n+1} = \ldots = \tau_{n+p-1}$ et $\tau_n \not\equiv \tau_{n+p}$, il faudra que $|\tau_n|$ atteigne son maximum m_n en $n+p-1$ points au moins.

---

[1] La démonstration précédente est directement inspirée de celle que donne M. L. Tonelli dans son Mémoire *I polinomi di Tchebichev* (*Annali di Matematica*, 3e série, t. XV).

Laissons de côté la question de savoir si cette condition est suffisante. Il peut même arriver que tous les π_n à partir d'un certain rang p soient identiques. $|\pi_p|$ devra alors être égal à m_p en une *infinité de points* de la frontière de D. Bornons-nous ici, sans rechercher tous les cas où ce phénomène peut se produire, à en donner un exemple. Prenons un polynome normal quelconque

$$P(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p$$

de degré p. L'origine étant racine simple de $P(z) = 0$, il est clair que lorsque $Z = P(z)$ décrira dans le plan Z une aire circulaire de centre O de rayon ρ assez petit, l'une des racines z de $Z = P(z)$ décrira dans le plan z une petite aire simple $\mathcal{D}$ limitée par une courbe analytique fermée $\mathcal{C}$ entourant l'origine. Il est clair que $Z = P(z)$ fournit la représentation conforme de $\mathcal{D}$ sur le cercle $|Z| \leq \rho$. Par conséquent, le maximum M_p de $|P|$ dans $\mathcal{D}$ étant égal au rayon ρ de l'aire $\mathcal{D}$, P sera le polynome π_n relatif à D pour tout $n \geq p$.

7. Les m_n, non croissants, ont certainement une limite inférieure μ, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang p dépendant de ε donné arbitrairement *a priori* on aura

$$\mu \leq m_n < \mu + \varepsilon \qquad (\text{pour } n > p).$$

On va montrer que μ ne peut pas différer du rayon ρ de l'aire D sous des conditions très générales imposées à D.

CHAPITRE II.

CONVERGENCE DES POLYNOMES $\Pi_n(z)$.

---

8. L'aire ou domaine D, simplement connexe, dont on fait la représentation conforme sur $|Z| < \rho$ est un domaine *ouvert*, c'est-à-dire dont tous les points sont *intérieurs*. Un point M appartenant à D est dit

intérieur à D si tous les points d'un certain cercle de centre M appartiennent aussi à D. Les points-frontière de D forment un *ensemble parfait* F : tout point de F est point limite d'une suite de points intérieurs à D. L'ensemble D + F constitué par D et F est *parfait*.

Tout point du plan qui n'appartient pas à D + F est *extérieur à* D. Nous supposerons dans la suite que l'on peut approcher D + F par l'extérieur, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite infinie de domaines simplement connexes $D_1, D_2, \ldots, D_\nu, \ldots$, dont chacun contienne D + F à son intérieur, et qui tendent vers D + F lorsque ν devient infini. Voici d'une façon précise ce que cela veut dire : 1° Tout point M intérieur à D est centre d'un cercle γ_M *dont tous les points sont intérieurs à tous les* D_ν; 2° tout point N extérieur à D est *à partir d'une certaine valeur* ν_0 de ν *extérieur à tous les* D_ν; 3° tout point M_0 de F est intérieur à tous les D_ν mais il est *limite de points* de la *frontière* F_ν *de* D_ν, en sorte qu'il n'existe pas de cercle de centre M_0, dont tous les points soient intérieurs à tous les D_ν, ou même qui soit intérieur à une suite infinie partielle de domaines $D_{\nu_1}, D_{\nu_2}, \ldots, D_{\nu_p}, \ldots$ extraits de la suite des D_ν. Dans tout cercle de centre M_0 de F, de rayon η si petit soit-il, il y a des points-frontière de tous les D_ν pour $\nu > \nu_1$, ν_1 étant un indice qui dépend de η. *La frontière* F_ν *de* D_ν *a donc pour limite* F *et* F *seulement*. Nous discuterons au Chapitre suivant les restrictions que nous apportons aussi au domaine simplement connexe D.

9. Dans les conditions du n° 8, M. Carathéodory a démontré que si l'on fait la représentation conforme de D_ν sur le cercle $|Z| < 1$ à l'aide d'une fonction $Z = F_\nu(z)$ pour laquelle $F_\nu(0) = 0$, $F'_\nu(0) =$ réel et positif, et si l'on fait de même la représentation de D sur $|Z| < 1$ à l'aide de la fonction $Z = F(z)$ [$F(0) = 0$ $F'(0) =$ réel et positif], la fonction $F_\nu(z)$ converge uniformément vers $F(z)$ dans tout domaine Δ intérieur à D. Désignant par ρ_ν le rayon de l'aire D_ν on sait que le développement de $F_\nu(z)$ au voisinage de l'origine est de la forme

$$F_\nu(z) = \frac{z}{\rho_\nu} + \ldots,$$

en sorte que la fonction $f_\nu(z) = \rho_\nu F_\nu(z)$ soit la fonction, normale en O, qui donne la représentation conforme de D_ν sur un cercle $|Z| < \rho_\nu$. On

aura de même

$$F(z)=\frac{z}{\rho}+\dots,$$

avec $f(z)=\rho F(z)$, pour représenter D sur $|Z|<\rho$ par une fonction $f(z)$ normale en O. Les $F_\nu(z)$ convergeant dans tout Δ, uniformément vers $F(z)$, les ρ_ν auront ρ pour limite.

10. Envisageons la fonction $f_\nu(z)$ qui transforme D_ν en $|Z|<\rho_\nu$. Puisque $D+F$ est intérieur à D_ν on pourra, $\frac{f_\nu-z}{z^2}$ étant holomorphe dans D_ν, la développer en série de polynomes uniformément convergente dans tout domaine intérieur à D_ν, c'est-à-dire en particulier dans $D+F$.

Étant donnée une suite de nombres positifs *décroissants et tendant vers zéro*, $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \dots\ \varepsilon_\nu\ \dots$, on pourra donc trouver un polynome $\mathcal{P}_{n-2}$ de degré $n-2$ tel que l'on ait dans $D+F$

$$\left|\frac{f_\nu-z}{z^2}-\mathcal{P}_{n-2}\right|<\varepsilon_\nu \qquad (n \text{ dépendra de } \nu).$$

Puisque $D+F$ est borné on aura aussi dans $D+F$

$$|f_\nu-P_n|<\varepsilon'_\nu$$

en posant

$$P_n=z+z^2\mathcal{P}_{n-2},$$

les ε'_ν étant par exemple égaux aux ε_ν multipliés par R^2, R étant le rayon d'un cercle de centre O contenant $D+F$. [Les ε'_ν tendent vers zéro quand ν devient infini.] P_n est normal en O et de degré n. Le polynome P_n sera tel que dans $D+F$ on ait $|P_n|<|f_\nu|+\varepsilon'_\nu$. Or le maximum de $|f_\nu|$ dans $D+F$ est certainement inférieur (sans égalité) au maximum ρ_ν de $|f_\nu|$ dans D_ν, puisque $D+F$ est intérieur à D_ν. On a donc dans $D+F$

$$\operatorname{Max}|P_n|<\rho_\nu+\varepsilon'_\nu.$$

π_n étant parmi les polynomes de degré n, normaux en O, celui dont le maximum de la valeur absolue dans $D+F$ a la plus petite valeur, on aura aussi

$$m_n=\operatorname{Max}|\pi_n|\leqq\operatorname{Max}|P_n|<\rho_\nu+\varepsilon'_\nu.$$

Et puisque μ est la limite des m_n, $\mu \leqq m_n$ on aura aussi

$$\mu < \rho_\nu + \varepsilon'_\nu,$$

et cette inégalité n'est jamais une égalité. Lorsqu'on fait croître ν vers $+\infty$, les ρ_ν tendent vers ρ, les ε vers zéro. On a donc

$$\mu \leqq \rho.$$

On a vu, d'autre part, au n° 6, que pour tout indice n on a $m_n \geqq \rho$. Par conséquent $\mu = \lim m_n \geqq \rho$. Il en résulte que μ *ne peut différer de* ρ

$$\boxed{\rho = \lim_{n=\infty} m_n}.$$

11. On va montrer maintenant que les π_n convergent vers $f(z)$, uniformément dans tout domaine Δ intérieur à D. Les π_n sont bornés dans D + F. On a en effet, dans D + F, $|\pi_n| \leqq m_n \leqq m_1 = R$, R étant le rayon du plus petit cercle de centre O contenant D + F. On pourra donc toujours trouver une suite infinie d'indices croissants $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ telle que les polynomes $\pi_{n_1}, \pi_{n_2}, \ldots, \pi_{n_p}, \ldots$ convergent uniformément dans tout domaine intérieur à D. Leur limite sera une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans D avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. Dans tout domaine Δ intérieur à D, on aura

$$\operatorname{Max} |\varphi| = \lim_{p=\infty} \operatorname{Max} |\pi_{n_p}|.$$

Or, dans Δ,

$$\operatorname{Max} |\pi_{n_p}| < m_{n_p}$$

sans égalité possible. Donc

$$\operatorname{Max}_\Delta |\varphi| \leqq \lim_{p=\infty} m_{n_p} = \rho.$$

Le maximum de $|\varphi|$ dans tout domaine Δ intérieur à D, étant $\leqq \rho$, il en sera de même du maximum de $|\varphi|$ dans D. Et puisque aucune fonction holomorphe dans D, normale en O, ne peut avoir pour maximum de sa valeur absolue dans D une valeur $< \rho$, on en conclut que le maximum de $|\varphi|$ dans D sera justement ρ. La fonction $f(z)$ étant la seule qui jouisse de cette propriété, on aura donc $\varphi = f$. Il ne peut donc y avoir pour la suite des π_n d'autre fonction limite que $f(z)$. *La*

suite des π_n converge donc vers $f(z)$ uniformément dans tout domaine intérieur à D.

11 *bis*. La convergence de m_n vers ρ étant démontrée, on peut démontrer la convergence des π_n vers $f(z)$ d'une autre manière qui présente l'avantage de donner une limite supérieure de $|\pi_n - f|$, en fonction de $(m_n - \rho)$, dans tout domaine Δ intérieur à D.

Considérons à cet effet la transformation $Z = f(z)$ et son inverse $z = \varphi(Z)$. Lorsque z décrit Δ, Z reste intérieur au cercle $|Z| \leq r < \rho$ (r dépendant évidemment de Δ). La fonction $\pi_n(z) = \pi_n[\varphi(Z)]$ est une fonction $\mathfrak{P}_n(Z)$ holomorphe dans $|Z| < \rho$ et dont le maximum du module dans $|Z| < \rho$ est m_n. On a évidemment

$$\mathfrak{P}_n(Z) = Z + \ldots = Z\,\mathfrak{R}_n(Z), \qquad \mathfrak{R}_n(Z) = 1 + \lambda_1 Z + \lambda_2 Z^2 + \ldots,$$

et il est clair que $\mathfrak{R}_n$, holomorphe dans $|Z| < \rho$, a pour maximum de son module dans ce cercle la quantité $\frac{m_n}{\rho} = 1 + \varepsilon_n$ [$\varepsilon_n > 0$ tendant vers zéro quand n devient infini].

Nous voulons une limite supérieure de

$$|\pi_n(z) - f(z)| = |\mathfrak{P}_n(z) - Z| = |Z|\,|\mathfrak{R}_n(z) - 1|$$

dans $|Z| \leq r < \rho$ sachant que dans $|Z| < \rho$ on a

$$|\mathfrak{R}_n(Z)| \leq 1 + \varepsilon_n.$$

Le point d'affixe $\mathfrak{R}_n(Z)$ est toujours dans un cercle de centre O de rayon $1 + \varepsilon_n$, donc le point d'affixe $[\mathfrak{R}_n(Z) - 1]$ est toujours *à gauche* de la droite d'abscisse ε_n, c'est donc que l'on a

$$\text{partie réelle de } [\mathfrak{R}_n(Z) - 1] \leq \varepsilon_n.$$

La fonction $\mathfrak{S}_n(Z) = \mathfrak{R}_n(Z) - 1$ est nulle à l'origine, holomorphe dans $|Z| < \rho$, et sa partie réelle y est inférieure à ε_n. Il en résulte (*voir* la démonstration de ce lemme au n° 11 *ter*) que dans le cercle $|Z| \leq r < \rho$ on a

$$|\mathfrak{S}_n(Z)| = |\mathfrak{R}_n(Z) - 1| \leq \frac{2r\varepsilon_n}{\rho - r}.$$

Donc, dans ce cercle,

$$|\mathfrak{P}_n(Z) - Z| \leq \frac{2r^2\varepsilon_n}{\rho - r},$$

et, par conséquent, dans Δ,

$$|\pi_n(z)-f(z)|\leq A\varepsilon_n,$$

A étant le nombre $\frac{2r^2}{\rho-r}$ qui ne dépend que de la configuration géométrique respective des domaines Δ et D, et nullement de l'indice n. On a

$$A\varepsilon_n=\frac{A}{\rho}(m_n-\rho),$$

et en posant $\frac{A}{\rho}=B$ on aura, dans Δ,

$$|\pi_n(z)-f(z)|\leq B(m_n-\rho),$$

où B ne dépend que de D et Δ.

On voit, en définitive, que $\pi_n(z)$ converge vers $f(z)$, uniformément dans Δ, et de plus que *la convergence est de l'ordre de* $(m_n-\rho)$.

11 *ter*. Démontrons ici le lemme utilisé précédemment. Soit une fonction $\mathcal{S}(Z)$ holomorphe dans $|Z|<\rho$, nulle en O, est telle que, partie réelle de $\mathcal{S}(Z)\leq\varepsilon$ dans $|Z|<\rho$.

Nous transformons le demi-plan à gauche de l'abscisse ε en un cercle de rayon 1 en posant

$$\mathcal{S}_1(Z)=\frac{\mathcal{S}(Z)}{\mathcal{S}(Z)-2\varepsilon}.$$

On reconnaît alors que dans $|Z|<\rho$, $\mathcal{S}_1(Z)$, holomorphe, nulle à l'origine, *est en module* <1. Le lemme classique de Schwarz prouve dans ces conditions que l'on a, pour $|Z|\leq r<\rho$,

$$|\mathcal{S}_1(z)|\leq\frac{r}{\rho}.$$

Lorsque le point d'affixe $\mathcal{S}_1(Z)$ décrit l'intérieur d'un cercle de centre O de rayon $\frac{r}{\rho}$, le point $\mathcal{S}(Z)$ décrit l'intérieur d'un cercle conjugué aux points O et 2ε, et l'on voit que le maximum de sa distance à l'origine est une quantité λ telle que

$$\frac{\lambda}{\lambda+2\varepsilon}=\frac{r}{\rho},$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{2r\varepsilon}{\rho - r}.$$

On a donc dans $|Z| \leq r < \rho$

$$|\mathfrak{S}(Z)| \leq \frac{2r\varepsilon}{\rho - r},$$

qui est l'inégalité utilisée au n° 11 *bis* pour limiter supérieurement $|\mathfrak{S}_n(Z)|$.

CHAPITRE III.

DOMAINES D AUXQUELS S'APPLIQUE L'APPROXIMATION PRÉCÉDENTE.

---

12. Une première remarque s'impose si l'on veut pouvoir faire l'approximation indéfinie de D par les domaines simplement connexes D_n qui le contiennent, c'est que *la frontière* F *de* D *n'ait pas de*

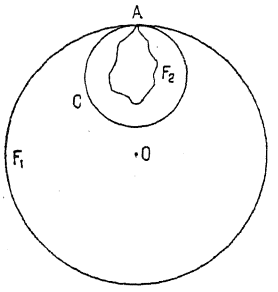

Fig. 2.

point double ou multiple. Un point double ou multiple A de F est en effet tel qu'on peut tracer une courbe de Jordan simple C, aboutissant à A par ses deux extrémités, dont tous les points, hormis A, soient intérieurs à D, telle en outre que la partie du plan intérieure à C contienne des points-frontière de D distincts de A : ces points forment alors nécessairement un continu aboutissant à A que nous appelons par exemple F_2 (voir *fig.* 2). Le reste F_1 de la frontière F de D est un

continu dont tous les points sont extérieurs à C. Il est alors clair que si l'on enlève de F la partie F_2, le domaine du plan limité par F_1 et contenant la courbe C est encore un domaine simplement connexe, contenant D. On peut ainsi enlever de F tous les continus partiels aboutissant par leurs deux extrémités aux points multiples de F sans que le domaine borné du plan contenant D et limité à la portion restante de F (qu'on suppose, bien entendu, être toujours un continu fermé) cesse d'être un domaine simplement connexe. Désignons d'une manière générale par $\mathcal{D}$ *le domaine borné simplement connexe résultant ainsi de* D *après tous ces agrandissements successifs et par* $\mathcal{F}$ *sa frontière. Tous ses points-frontière accessibles seront alors simples* [mais on sait bien que les points-frontière ne sont pas toujours tous accessibles]. Il est bien clair que tout domaine simplement connexe D_1 qui contient à son intérieur D + F contient en particulier à son intérieur $\mathcal{D}$ et sa frontière $\mathcal{F}$, puisque d'une part $\mathcal{F}$ n'est qu'une partie de F et d'autre part $\mathcal{D}$ et D ont une partie commune. $\mathcal{F}$ formera barrière entre F_1 frontière de D_1 et les parties de F n'appartenant pas à $\mathcal{F}$, qu'on a supprimées pour passer de D à $\mathcal{D}$: toute ligne joignant un point α d'une de ces parties de F à un point de F_1 devra rencontrer la frontière $\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}$; α est nécessairement un point intérieur à D. On ne pourra donc, par des domaines *simplement connexes* D_1 contenant D, faire l'approximation de D de toute la frontière F. On pourra tout au plus faire l'approximation de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{F}$, mais les points de $\mathcal{F}$ appartenant aux parties supprimées de la frontière de D ne seront pas points limite de points-frontière des D_1. Pour faire l'approximation indéfinie de tout F il faudrait utiliser des domaines D_1 contenant D + F mais *multiplement connexes*, l'ordre de connexion étant aussi élevé que le nombre des points multiples de F.

En résumé, *on ne peut atteindre par des domaines simplement connexes* D_1 *contenant* D *que des domaines* D *dont la frontière* F *n'a aucun point multiple*. Par exemple le cercle de centre O de rayon un, entaillé par une coupure rectiligne allant du point $z = \frac{1}{2}$ au point $z = 1$ échappe à notre approximation.

13. Il est remarquable en outre que les domaines échappant à notre

approximation par des D_ν plus grands et simplement connexes échappent aussi à l'application même de notre méthode d'approximation de $f(z)$ par des polynomes. Soit en effet A un point double de F et considérons comme dans la figure 2 une courbe de Jordan simple fermée C aboutissant à A et contenant une portion F_2 de F, les points de C, sauf A, étant tous intérieurs à D. Un polynome quelconque envisagé dans D et sur F ne peut atteindre le maximum de sa valeur absolue en un point de F_2 qui serait distinct de A, car tous les points de C étant dans D, la valeur absolue de ce polynome serait alors plus petite sur la courbe C qu'en un certain point intérieur à C et cela est impossible. On peut donc conclure que, dans la détermination des polynomes τ_n faite au Chapitre I, les bouts de frontière supprimés au n° 12 [et dont la suppression aboutit à fournir un *domaine borné* $\mathfrak{D}$, *simplement connexe, contenant* D *et dont la frontière* $\mathfrak{F}$ *n'a plus de points multiples*] n'ont aucune influence sur la détermination des τ_n : *les polynomes* τ_n *de* D *sont identiques aux polynomes* τ_n *de* $\mathfrak{D}$. La restriction imposée au n° 12 n'est donc pas artificielle, elle tient à la nature même de la méthode.

14. Notre méthode s'applique cependant à des domaines très généraux et en particulier à tous ceux qui sont *limités par une courbe de Jordan simple fermée* F. On peut en effet dans ce cas trouver une suite de polynomes $F_1, F_2, \ldots, F_\nu, \ldots$ dont chacun contienne tous les suivants, et ayant pour limite F lorsque ν devient infini. Le domaine borné D_ν limité par F_ν a toutes les propriétés requises pour l'approximation de D + F. Les $\tau_n(z)$ relatifs à une courbe de Jordan F ont donc pour limite la fonction $f(z)$ qui fournit la représentation conforme de F sur un cercle $|Z| < \rho$.

15. Si l'on essaie d'appliquer la méthode à une aire Δ multiplement connexe bornée limitée par une frontière extérieure F et des frontières intérieures $f_1, f_2, \ldots, f_n$, on pourra déterminer les polynomes $\tau_n(z)$ comme au Chapitre I, mais ces polynomes seront identiques à ceux qui conviendraient au domaine limité par la seule frontière F. Leur limite fournira la représentation du *domaine borné limité par* F *seule*. On sait d'ailleurs qu'une suite de polynomes ne peut converger unifor-

mément dans Δ vers une fonction holomorphe sans converger aussi uniformément dans toute l'aire obtenue en adjoignant à Δ les domaines intérieurs à $f_1, f_2, \ldots, f_n$, c'est-à-dire dans l'aire bornée limitée par la frontière F.

CHAPITRE IV.

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES POLYNOMES $\Pi_n(z)$

16. *Dans quel cas la suite des $\pi_n(z)$ ne contient-elle qu'un nombre limité de polynomes?* — Il faut et il suffit pour cela qu'à partir d'un certain rang n_0, tous les polynomes π_n soient identiques. Si l'on suppose, bien entendu, que le domaine D est de ceux auxquels s'applique l'approximation par les D_ν envisagée aux Chapitres II et III, il est alors évident que la fonction $f(z)$ fournissant la représentation conforme de D sur un cercle est *identique à* π_{n_0} et l'on a

$$m_{n_0} = m_n = \rho \quad (\text{pour tout } n \geq n_0).$$

Le domaine D est alors défini par l'équation

$$|\pi_{n_0}(z)| < \rho,$$

et il est clair que *sa frontière* F *est composée d'un nombre fini d'arcs analytiques* et définie par $|\pi_{n_0}(z)| = \rho$. Dans ce cas, il faut évidemment qu'à l'intérieur de D, l'équation

$$\pi_{n_0}(z) = a,$$

a étant un nombre complexe quelconque de module $< \rho$, ait une racine et une seule. Réciproquement $P_{n_0}(z)$ étant un polynome quelconque pour lequel $P_{n_0}(0) = 0$, $P'_{n_0}(0) \neq 0$ pouvant être supposé égal à un, tout domaine D défini par $|P_{n_0}| < \rho$, ρ étant un nombre quelconque suffisamment petit pour que dans D l'équation $P_{n_0} = a$ ait une racine et une seule pour tout a de module $< \rho$, sera un domaine D pour lequel tous les π_n, à partir de l'indice n_0, seront identiques à P_{n_0}. En vertu de ce qui précède, toutes les fois que la frontière F de D comportera autre

chose qu'un nombre fini d'arcs analytiques, on sera sûr, *a priori*, que la suite des $\pi_n(z)$ est illimitée. Envisageant alors un cercle C de centre O complètement intérieur à D, la fonction $f(z)$ étant holomorphe dans C et sur C, et les π_n convergeant uniformément vers $f(z)$ dans C et sur C, le coefficient $a_n^{(p)}$ de z^p dans π_n aura pour limite le coefficient A_p de z^p dans le développement de $f(z)$ en série entière, valable dans C.

17. *Propriété des racines des* $\pi_n(z)$. — La propriété de minimum, par laquelle nous avons défini les $\pi_n(z)$ au Chapitre I, entraîne des restrictions précises du domaine où peuvent se trouver les racines de tous les polynomes. Pour le voir aisément posons $z = \frac{1}{u}$, le domaine D devient un domaine Δ du plan u, simplement connexe pour lequel le point $u = \infty$ est un point *intérieur* et le point $u = 0$ un point extérieur. De même que la frontière F de D était tout entière située entre deux cercles de centre O de rayons r et R, celle Φ de Δ sera située entre deux cercles de centre O de rayons $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{r}$. Un polynome

$$P_n(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

devient

$$P_n\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \ldots + a_n}{u^n},$$

ou encore

$$P_n\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{Q_{n-1}(u)}{u^n}$$

en posant

$$Q_{n-1}(u) = u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \ldots + a_n = (u - u_1)(u - u_2)\ldots(u - u_{n-1}).$$

Les u_i étant liés aux racines $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ distinctes de O, du polynome $P_n(z)$ par les relations

$$z_i = \frac{1}{u_i}.$$

Le maximum de $\left|P_n\left(\frac{1}{u}\right)\right|$ est atteint sur la frontière Φ de Δ. Le polynome π_n donnera naissance à une fonction $\pi_n\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\mathfrak{Q}_{n-1}(u)}{u^n}$ dont le maximum m_n de la valeur absolue sur Φ sera le plus petit possible. Le polynome $\mathfrak{Q}_{n-1}(u)$ devra donc être tel que le maximum de $\left|\frac{\mathfrak{Q}_{n-1}(u)}{u^n}\right|$

sur Φ soit inférieur au maximum de $\left|\frac{Q_{n-1}(u)}{u^n}\right|$ sur Φ, Q_{n-1} étant un polynome différent de $\mathfrak{L}_{n-1}(u)$.

Envisageons une direction δ quelconque du plan u. A cause de la continuité de Φ qui est d'ailleurs un ensemble fermé borné, on peut trouver deux droites δ_1, δ_2 parallèles à δ et deux seulement telles que : 1° Φ soit située tout entière entre δ_1 et δ_2; 2° qu'il y ait au moins un point de Φ sur δ_1 et un au moins sur δ_2; j'appelle δ_1 et δ_2 les droites d'encadrement de Φ parallèles à δ. Considérons un polynome

$$Q_{n-1}(u) = (u - u_1)\dots(u - u_{n-1})$$

dont une racine au moins ne soit pas entre δ_1 et δ_2 (ou sur l'une de ces droites). Soit u_1 cette racine. Considérons le pied u'_1 de la perpendiculaire abaissée de u_1 sur celle des droites δ_1 ou δ_2 qui est la plus voisine de u_1. Pour un point quelconque u compris entre δ_1 et δ_2 ou situé sur l'une de ces droites, on a évidemment $|u - u'_1| < |u - u_1|$ sans égalité possible. Cela est vrai en particulier pour tout point de Φ. Considérons alors le polynome

$$Q'_{n-1}(u) = (u - u'_1)\dots(u - u_{n-1})$$

obtenu en remplaçant u_1 par u'_1 dans Q_{n-1}. En tout point u de Φ_1 on aura

$$|Q'_{n-1}| < |Q_{n-1}|$$

et par suite

$$\left|\frac{Q'_{n-1}}{u^n}\right| < \left|\frac{Q_{n-1}}{u^n}\right|,$$

d'où il résulte que le maximum de $\left|\frac{Q'_{n-1}}{u^n}\right|$ sur Φ est inférieur à celui de $\left|\frac{Q_{n-1}}{u^n}\right|$. Par suite Q_{n-1} ne peut pas correspondre à un polynome $\pi_n(z)$. Et ceci nous fournit une propriété des racines de tout polynome $\mathfrak{L}_{n-1}(u)$ provenant d'un polynome $\pi_n(z)$: ses racines devront toutes être situées entre les deux droites d'encadrement de Φ parallèles à une direction *quelconque* δ du plan, ou sur ces droites (1). Lorsque la direction δ varie de toutes les façons possibles, les droites d'encadrement enve-

(1) L'idée de ces droites d'encadrement m'a été suggérée par un Mémoire de M. Fejér.

loppent *le plus petit domaine convexe* Γ *contenant* Φ. Il en résulte que *les racines de tous les polynomes* $\mathfrak{P}_{n-1}(u)$ *provenant des* $\tau_n(z)$ *devront appartenir au plus petit domaine convexe* Γ *du plan u contenant* Φ *ou à la frontière de ce domaine*. Ce domaine Γ peut être considéré comme balayé par un segment joignant deux points quelconques de Φ lorsque ces points varient indépendamment l'un de l'autre, chacun d'eux décrivant tout Φ. En particulier il est tout entier à l'intérieur du cercle de centre O de rayon $\frac{1}{r}$ qui contient Φ, la frontière de ce domaine Γ pouvant avoir des arcs communs avec la circonférence de ce cercle, lorsque Φ a elle-même des arcs communs avec cette circonférence. Puisque Φ entoure le cercle de rayon $\frac{1}{R}$ de centre O, le domaine Γ contient évidemment ce dernier cercle. Remarquons enfin que Γ est intérieur à tout cercle contenant Φ.

Revenons maintenant au plan z. Au domaine Γ correspond dans le plan z, par la transformation $z = \frac{1}{u}$, un domaine infini $\mathcal{C}$ contenant en particulier tout l'*extérieur* du cercle de centre O de rayon R; seront extérieurs à $\mathcal{C}$ tous les points intérieurs au cercle de centre O de rayon r. De même que Γ était balayé par un segment de droite joignant deux points variables de Φ, le domaine $\mathcal{C}$ sera balayé par un arc de cercle ainsi déterminé : prenons deux points M et N quelconques de F et le cercle passant par ces deux points et par O, envisageons l'arc MN de ce cercle qui ne contient pas O, et faisons varier M et N indépendamment l'un de l'autre, chacun de ces points décrivant tout F, l'arc MN balaiera le domaine $\mathcal{C}$.

Les racines de tous les polynomes $\tau_n(z)$ *doivent appartenir à* $\mathcal{C}$ *ou à sa frontière*. En particulier *elles sont extérieures à tout cercle intérieur au domaine* D.

18. *Propriété des points où* $|\tau_n(z)|$ *atteint son maximum*. — On a vu au n° 5 que $|\tau_n|$ atteint son maximum m_n en *n points distincts au moins* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de la frontière F du domaine D. Le domaine Δ_n décrit par le point $Z = \tau_n(z)$ lorsque z décrit D, est alors intérieur au cercle $|Z| = m_n$ et sa frontière φ_n touche ce cercle en n points au moins transformés de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. S'il arrivait que φ_n ait un arc commun avec le cercle $|Z| = m_n$, la considération de la fonction inverse de $\tau_n(z)$, qui

est analytique, montrerait qu'alors F comprendrait un arc analytique transformé de l'arc de cercle considéré par la fonction inverse de $\pi_n(z)$. φ_n n'a donc certainement aucun arc commun avec $|Z| = m_n$ si F ne comprend aucun arc analytique. Lorsque F est un continuum d'ordre assez général, par exemple si c'est une courbe de Jordan, on sait que F peut n'avoir de tangente en aucun point; on connaît aussi l'existence des *points asymptotes* d'une pareille courbe, c'est-à-dire de points z_0 tels que : lorsque z tend vers z_0 en restant à l'intérieur de D et en décrivant une ligne polygonale dont z_0 est le seul point limite, l'argument de $z - z_0$ croît jusqu'à $+\infty$ ou décroît jusqu'à $-\infty$. Il est remarquable que tout point z_i de F où $|\pi_n|$ devient égal à son maximum m_n ne peut pas être un point asymptote, et plus précisément on peut tracer un arc de courbe analytique γ_i passant par z_i telle que dans un petit cercle c_i de centre z_i, les points de D et de F soient tous dans l'une des deux régions en lesquelles γ_i divise le cercle c_i. En effet en z_i le polynome $Z = \pi_n(z)$ prend la valeur Z_i située sur $|Z| = m_n$. Considérons la fonction algébrique $z = X_n(Z)$ inverse de $Z = \pi_n(z)$, au voisinage de Z_i; elle transforme un arc suffisamment petit de $|Z| = m_n$ entourant Z_i en une courbe analytique γ_i passant par z_i [si z_i était un zéro de $\pi'_n(z)$, Z_i serait un point critique de $X_n(Z)$, et l'on aurait deux arcs analytiques se coupant en z_i sous un angle partie aliquote de π]. Si l'on envisage dans un petit cercle C_i de centre Z_i de rayon R_i la partie de ce petit cercle intérieure à $|Z| < m_n$, il lui correspond dans le plan z une petite aire c'_i limitée d'une part par γ_i et d'autre part par un petit arc de courbe analytique provenant de l'arc $|Z - Z_i| = R_i$ intérieur à $|Z| < m_n$. Cette aire c'_i contient tous les points de D suffisamment voisins de z_i; si l'on envisage maintenant un petit cercle $c_i\,|z - z_i| < r_i$ (r_i assez petit), on voit que la partie de c'_i intérieure à c_i contenant tous les points de D + F intérieurs à c_i sera tout entière dans l'une des deux régions en lesquelles l'arc analytique γ_i partage le cercle c_i. La courbe γ_i (qui, on l'a vu, peut comprendre deux arcs se coupant en z_i sur un certain angle) joue donc au voisinage de z_i pour F le rôle que jouaient les droits d'encadrement du n° 17 : en aucun cas z_i ne peut être un point asymptote.

19. *Influence d'une symétrie de* D *par rapport à une droite passant*

par O. — Par une substitution linéaire $[z\,|\,ze^{i\theta}]$ on peut toujours supposer que l'axe de symétrie de D est l'axe réel. Montrons qu'alors *tous les* $\tau_n(z)$ *ont leurs coefficients réels.*

Soit en effet $\tau_n(z) = z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n$ le polynome τ_n de degré n. Si ses coefficients n'étaient pas tous réels, le polynome $X_n(z)$ défini par

$$X_n(z) = z + \overline{\alpha_2}\, z^2 + \ldots + \overline{\alpha_n}\, z^n,$$

où $\overline{\alpha_i}$ est le nombre complexe conjugué de α_i, serait distinct de τ_n et normal en O. Il est visible que la valeur de X_n au point $\overline{z}$ conjugué de z est un nombre conjugué de $\tau_n(z)$ et qu'on écrit

$$X_n(\overline{z}) = \overline{\tau_n(z)}.$$

Lorsque $\overline{z}$ décrit D, z décrit D et réciproquement. Le maximum du module de $X_n(\overline{z})$ dans D est égal au maximum du module de $\overline{\tau_n(z)}$ ou de $\tau_n(z)$ dans D, c'est donc m_n. Si $X_n(z)$ était distinct de $\tau_n(z)$, il y aurait deux polynomes distincts de degré n dont le maximum du module dans D serait m_n. C'est impossible. Donc *tous les* α_i *sont réels*. Il en résulte que les points de F où $|\tau_n(z)|$ atteint la valeur m_n sont répartis par couples, symétriquement à l'axe réel, exception faite de ceux qui pourraient être réels.

20. *Influence d'une symétrie de* D *par rapport à* O. — Montrons que, dans ce cas, tous les $\tau_n(z)$ sont *impairs*.

Si en effet $\tau_n(z)$ n'était pas impair, considérons $X_n(z) = -\tau_n(-z)$, c'est un polynome de degré n normal en O et distinct de $\tau_n(z)$; on reconnaît immédiatement que le maximum de $|X_n(z)|$ dans D est comme celui de $|\tau_n(z)|$ égal à m_n. Cela étant impossible, il faut que $X_n(z)$ soit identique à $\tau_n(z)$, c'est-à-dire que τ_n soit *impair*.

CHAPITRE V.

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.
REPRÉSENTATION DE $f(x)$ PAR DES SÉRIES DE FRACTIONS RATIONNELLES.

21. La possibilité d'approcher indéfiniment la fonction $f(z)$ par les $\tau_n(z)$ repose, comme on l'a vu, sur deux faits :

1° Les maxima m_n des $|\tau_n|$ dans D tendent vers ρ en décroissant;

2° Toute fonction limite des τ_n, dans D, est identique à $f(z)$ comme possédant la propriété de minimum caractéristique de $f(z)$: ce deuxième fait résulte du premier, soit qu'on raisonne comme nous l'avons fait au n° 11, soit qu'on évalue le maximum de $|\tau_n - f|$ dans Δ, en prenant pour variable $Z = f(z)$ au lieu de z, et montrant que ce maximum est $< B(m_n - \rho)$.

Il en résulte que toute fonction $\varphi_n(z)$ holomorphe dans D, normale en O, dont le maximum de la valeur absolue dans D tend vers ρ, tendra aussi vers $f(z)$ dans D. On peut utiliser cette remarque pour donner plus de souplesse à la méthode exposée précédemment en variant l'expression analytique destinée à tendre vers $f(z)$.

22. Une première façon de procéder consiste à remarquer que τ_n est une fonction holomorphe dans le plan complet (1), *sauf à l'infini* où elle a un pôle d'ordre $\leq n$ et à considérer, plus généralement, des fonctions rationnelles R_n, normales en O, holomorphes dans le plan complet, *sauf en un point a extérieur à* D, où R_n aura un pôle d'ordre $\leq n$. R_n est alors de la forme

$$R_n = a_0 + \frac{a_1}{z-a} + \frac{a_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(z-a)^n},$$

les a_i étant constants avec $R_n(0) = 0$, $R_n'(0) = 1$, ce qui donne deux

(1) Le plan complet est le plan de la variable z complété par le point $z = \infty$.

relations linéaires distinctes entre les a_i, ne laissant subsister dans R_n que $n-1$ paramètres linéaires indépendants, comme dans π_n.

On peut, en raisonnant comme au Chapitre I, démontrer l'*existence d'une* R_n *unique que nous appellerons* $\mathcal{R}_n(z)$, telle que, le maximum de sa valeur absolue dans D étant appelé μ_n, et le maximum dans D de la valeur absolue d'une R_n différente quelconque étant appelée μ'_n, on ait toujours $\mu_n < \mu'_n$; μ_n est la *borne inférieure des maxima* μ'_n *relatifs à toutes les* R_n *considérées*. [Ici il n'est plus nécessaire de supposer D borné, mais simplement que D laisse à découvert une région du plan à laquelle appartient a.] Il est plus rapide de montrer que, pour un changement de la variable z, l'étude du cas présent se déduit de celle des $\pi_n(z)$.

Faisons en effet un changement de variable sur z, qui envoie a à l'infini, qui conserve l'origine, et conserve les propriétés des R_n en O, $R_n(o) = o$, $R'_n(o) = 1$. Nous poserons

$$u = \lambda \frac{z}{z-a}, \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{au}{u-\lambda},$$

λ étant une constante; pour $z = o$ $u = o$; pour $z = a$ $u = \infty$.

Le domaine D décrit par z devient un domaine D_1 décrit par u.

$z = a$ était extérieur à D, donc $u = \infty$ sera extérieur à D_1, c'est-à-dire que D_1 sera *borné*.

Posons

$$R_n\left[\frac{au}{u-\lambda}\right] = P_n[u].$$

La fonction $P_n(u)$ devient un polynome de degré $\leq n$ car

$$\frac{1}{z-a} = \frac{u}{\lambda z} = \frac{1}{a\lambda}(u-\lambda).$$

Donc

$$P_n(u) = a_0 + \frac{a_1}{a\lambda}(u-\lambda) + a_2\left(\frac{u-\lambda}{a\lambda}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{u-\lambda}{a\lambda}\right)^n.$$

On a

$$P_n(o) = R_n(o) = o, \qquad P'_n(o) = R'_n(o)\left(\frac{dz}{du}\right)_0 = \left(\frac{dz}{du}\right)_0,$$

car $R'_n(o) = 1$.

$P_n(u)$ sera normal en O si

$$\left(\frac{dz}{du}\right)_0 = 1.$$

Or

$$\left(\frac{dz}{du}\right)_0 = -\frac{a}{\lambda};$$

on prendra donc $\lambda = -a$, c'est-à-dire $u = \frac{az}{a-z}$, $z = \frac{au}{a+u}$ et l'on aura en $P_n(u) = R_n\left[\frac{au}{a+u}\right]$ des polynomes de degré $\leq n$ normaux en O.

Dès lors, au polynome $\pi_n(u)$ de degré $\leq n$, correspondant au domaine D_1, correspondra la $\mathcal{R}_n(z)$ unique, relative au domaine D, dont on a parlé précédemment, et pour laquelle le maximum de $\mathcal{R}_n(z)$ dans D a la plus petite valeur possible. On aura

$$\mathcal{R}_n(z) = \pi_n\left[\frac{az}{a-z}\right].$$

Les $\pi_n(u)$ ont pour limite, uniformément dans tout domaine Δ, intérieur à $\mathcal{D}$, D_1, la fonction $Z = f_1(u)$, normale en O, qui fait la représentation conforme de D, sur un centre $|Z| = \rho$. Il s'ensuit que *les* $\mathcal{R}_n(z) = \pi_n\left(\frac{az}{a-z}\right)$ *auront pour limite, uniformément dans tout domaine* Δ *intérieur à* D, *la fonction* $Z = f_1\left[\frac{az}{a-z}\right] = f(z)$, *normale en* O, *qui fait la représentation conforme de* D *sur* $|Z| = \rho$. Le maximum μ_n de $|\mathcal{R}_n(z)|$ dans D est identique à celui de $|\pi_n(u)|$ dans D_1 qu'on appelle m_n. *La différence* $|f(z) - \mathcal{R}_n(z)|$ *est de l'ordre de* $(\mu_n - \rho)$, comme l'était $|\pi_n(u) - f_1(u)|$. La généralisation actuelle des π_n aux $\mathcal{R}_n$ est donc immédiate.

---

(1) Dans le cas où D est un cercle de centre O on sait que $\pi_n = z$, quel que soit n, et $f(z) = z$.

Si D est un cercle contenant O mais n'ayant pas son centre en O, soit a le symétrique de O par rapport à ce cercle; par $u = \frac{az}{a-z}$, D devient un cercle D_1 de centre O, pour lequel $\pi_n(u) = u$. On en déduit que les $\mathcal{R}_n$, de pôle a, relatives à D sont toutes égales à $\frac{az}{a-z}$ ainsi que la fonction $f(z)$ elle-même.

23. Une généralisation plus étendue se présente de la manière suivante :

Donnons-nous *a priori* des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ en nombre fini ou infini, fixes (1) ou mobiles *à l'intérieur d'un domaine* $\mathcal{D}$ *extérieur à* D, et considérons, n étant donné, toutes les fonctions rationnelles $R_n(z)$, normales en O, n'ayant dans le plan complet que n pôles au plus, simples ou multiples, *dont la somme des ordres soit* $\leq n$, ces pôles étant des points α_i. Envisageons l'ensemble des maxima λ_n des $|R_n(z)|$ dans D. Le maximum λ_n d'une $|R_n|$ dans D, dépend continûment des coefficients arbitraires figurant dans la R_n considérée et aussi des pôles α_i mobiles. Lorsque ces coefficients varient, ainsi que les pôles de la R_n, λ_n a une borne inférieure q_n, certainement atteinte par une R_n au moins que nous appellerons $\mathcal{R}_n$, bien que, *a priori*, nous ne sachions pas si elle est nécessairement unique. Sans d'ailleurs approfondir cette question de l'unicité de $\mathcal{R}_n$, remarquons simplement que si, pour un des points, α, par exemple, de l'ensemble α_i, on détermine la $R_n(z) = \tau_n\left(\frac{\alpha_1 z}{\alpha_1 - z}\right)$ *étudiée au* n° 22, on est sûr que si μ_n est le maximum de cette $|R_n|$ dans D, on aura certainement $q_n \leq \mu_n$. La suite décroissante des q_n a donc pour limite ρ, rayon de D, comme celle des μ_n. Il en résulte que, dans tout domaine Δ intérieur à D, la suite des $\mathcal{R}_n$ a pour limite $f(z)$ et uniformément, la convergence étant de l'ordre de $(q_n - \rho)$

$$|f(z) - \mathcal{R}_n(z)| < C(q_n - \rho) < C(\mu_n - \rho),$$

C ne dépendant que de Δ et D et non de l'indice n, ni des α_i.

24. Une dernière étape de généralisation sera la suivante :

Toute expression analytique susceptible d'approcher d'aussi près qu'on le veut une fonction holomorphe dans une aire $\mathcal{D}$, et cela uniformément dans toute aire Δ intérieure à $\mathcal{D}$, pourra jouer le rôle qu'ont joué les fonctions rationnelles dans tout ce qui précède. Le succès de la méthode tient en effet, comme on l'a vu au n° 10, à ce que, si D_ν contient D, on peut trouver un polynome P_n qui, dans D, diffère de $\frac{f_\nu - z}{z^2}$ de moins de ε_ν, d'où il résulte que $z + z^2 P_n$ est un

(1) Si l'ensemble des α_i fixes est infini, on le supposera *fermé*.

polynome normal en O qui diffère de f_ν de moins de ε'_ν [f_ν est la fonction de représentation de D_ν] : on en a déduit au n° 10 ce fait fondamental que les m_n *tendaient vers* ρ ; si donc on envisage une expression analytique holomorphe dans D dépendant de n paramètres, n pouvant être aussi grand qu'on le voudra; si l'on détermine parmi celles qui sont normales en O celle (ou celles) dont le maximum de la valeur absolue dans D est le plus petit possible et si l'on appelle S_n une de ces expressions minimantes, le maximum de $|S_n|$ dans D étant s_n, la suite s_n tendra vers ρ quand n tend vers l'infini, toutes les fois que les paramètres de l'expression sont suffisants pour permettre d'approcher indéfiniment toute fonction holomorphe dans un domaine donné. La fonction S_n tendra vers $f(z)$ dans D. En particulier on pourra envisager pour les S_n des fonctions *algébriques* holomorphes dans un domaine contenant D. Nous nous contenterons ici de signaler ces extensions possibles de la méthode exposée aux précédents Chapitres.

25. Divers problèmes se posent aussi lorsqu'on laisse moins d'arbitraire dans le choix de l'instrument de représentation. En voici un exemple :

Revenons aux fonctions rationnelles dont les pôles doivent être obligatoirement pris dans un domaine fermé $\mathcal{D}$ extérieur à D, et supposons qu'on ne considère que celles, normales en O, dont le nombre de pôles est $\leq n$, *chaque pôle étant simple*. Il y en a au moins une, $T_n(z)$, dont le maximum t_n de la valeur absolue dans D est le plus petit possible : les t_n tendent-ils vers ρ? Il suffit d'examiner si toute fonction $F(z)$ holomorphe dans un domaine D, contenant D_1 peut être arbitrairement approchée par une T_n à pôles simples pris dans $\mathcal{D}$. Or elle peut d'abord être approchée par une fonction rationnelle $R(z)$ ayant un unique pôle intérieur à $\mathcal{D}$. Ensuite, en considérant dans $R(z)$ chacun des termes $\frac{A_k}{(z-a)^k}$, on peut le considérer comme la limite de k fractions à pôles simples ayant leurs pôles aux points racines de $(z-a)^k = \varepsilon^k$ [ε nombre positif qui tendra vers zéro]; c'est-à-dire qu'on pourra trouver une somme $\sum_1^k \frac{B_i}{z-a_i}$ qui, dans D, diffère

de $\frac{A_k}{(z-a)^k}$ de moins de η, arbitrairement petit, les a_i étant intérieurs à D et suffisamment voisins de a. De cette manière, $R(z)$ pourra être remplacée par une fonction à pôles simples, avec telle approximation que l'on voudra dans D. Par suite les T_n satisfont bien à la condition signalée au début du n° 24, les t_n tendent vers ζ et T_n tend vers $f(z)$.

CHAPITRE VI.

AUTRE ASPECT DE LA QUESTION. REPRÉSENTATION CONFORME SUR UN CERCLE DE RAYON *un*. CONCLUSION.

26. Reprenons le polynome $\pi_n(z)$ correspondant à D, borné, contenant O. On a vu que $|\pi_n| \leqq m_n$ dans D + F, et si $P_n(z)$ est un autre polynome normal en O pour lequel $|P_n| \leqq m'_n$ dans D + F, on a $m_n \leqq m'_n$. Envisageons les polynomes

$$\frac{\pi_n}{m_n} = \frac{z}{m_n} + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n \qquad \text{et} \qquad \frac{P_n}{m'_n} = \frac{z}{m'_n} + \alpha'_2 z^2 + \ldots + \alpha'_n z^n.$$

Le maximum de $\left|\frac{\pi_n}{m_n}\right|$ dans D est, comme celui de $\left|\frac{P_n}{m'_n}\right|$, égal à l'unité. Et puisque $m_n < m'_n$ on aura

$$\frac{1}{m'_n} < \frac{1}{m_n}.$$

Or si l'on pose

$$\frac{\pi_n}{m_n} = \varpi_n \qquad \text{et} \qquad \frac{P_n}{m'_n} = p_n,$$

on a

$$\frac{1}{m_n} = \varpi'_n(0) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{m'_n} = p'_n(0).$$

Le polynome $\varpi_n(z)$ a donc cette propriété. qui est en quelque sorte dualistique de celle de $\pi_n(z)$ [ce fait se rencontre dans tous les problèmes isopérimétriques du calcul des variations et dans tous les problèmes d'extremum lié]. *Parmi tous les polynomes $p_n(z)$, nuls en* O, *inférieurs en valeur absolue à l'unité dans tout* D, *il y en a un et un seul $\varpi_n(z)$, ayant une dérivée $\varpi'_n(0)$, positive en* O, *et supérieure aux valeurs*

absolues des dérivées en O *de tous les polynomes* $p_n(z)$ *considérés.* Les $|p'_n(0)| = \frac{1}{m'_n}$ ont en effet pour borne supérieure la quantité

$$\frac{1}{m_n} = \varpi'_n(0),$$

atteinte par le polynome $\varpi_n(z)$.

De ce point de vue on aurait pu définir directement $\varpi_n(z)$ et l'étudier comme on l'a fait au Chapitre I pour $\pi_n(z)$. Nous n'insisterons pas là-dessus.

Lorsque n devient infini, m_n tend vers ρ et par conséquent

$$\lim \varpi_n(z) = \frac{1}{\rho} \lim \pi_n(z) = \frac{f(z)}{\rho} = f_1(z),$$

uniformément dans tout domaine Δ intérieur à D. Or $Z = f(z)$ transforme D en un cercle $|Z| < \rho$. Il en résulte que $Z_1 = f_1(z)$ transforme D en un cercle $|Z_1| < 1$ et de telle manière que $f'_1(0) > 0$ comme toutes les quantités $\varpi'_n(0)$.

Les $\varpi_n(z)$ ont donc pour limite, uniformément atteinte dans tout Δ intérieur à D, *la fonction qui représente* D *sur le cercle unité* avec conservation de l'origine et des directions d'axe réel à l'origine.

Chacun des $\varpi_n(z)$ transformant D en un domaine d_n intérieur à $|Z_1| < 1$, et dont la frontière touche $|Z_1| = 1$ en n points au moins, on s'explique que d_n ait pour limite le cercle $|Z_1| < 1$.

27. Les questions étudiées au cours du présent Mémoire en soulèvent d'autres sur lesquelles nous reviendrons prochainement. Que devient la suite des π_n lorsque O n'est plus intérieur à D mais se trouve sur la frontière de D? Que devient-elle lorsque D n'est plus un domaine, mais un continu sans point intérieur, auquel appartient ou n'appartient pas O? La convergence des π_n vers $f(z)$ s'étend-elle à la frontière de D lorsque F est une courbe de Jordan simple fermée? Comment varient les polynomes π_n lorsque D se déforme? Nous verrons que la réponse à ces questions est intéressante; signalons dès maintenant les points principaux de cette étude dans deux Notes des *Comptes rendus* (t. 184, 9 et 23 mai 1927, p. 1107 et 1227) que nous développerons ultérieurement.