ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. RAFFY

Détermination des surfaces de Joachimsthal à courbures principales liées par une relation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 20 (1903), p. 379-410

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__379_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉTERMINATION

DES

SURFACES DE JOACHIMSTHAL

A COURBURES PRINCIPALES LIÉES PAR UNE RELATION,

PAR M. L. RAFFY,

PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Enneper a déterminé (*Göttinger Nachrichten*, 1868) les surfaces à courbure totale constante qui admettent une famille de lignes de courbure planes : les plans de ces lignes passant tous par une même droite, les surfaces ainsi obtenues sont des surfaces de Joachimsthal. Il existe donc des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation (surfaces de Weingarten) et qui sont en même temps des surfaces de Joachimsthal. Je me suis proposé de trouver toutes les surfaces qui jouissent de cette double propriété. Les formules par lesquelles j'exprime la solution complète de ce problème fournissent, entre autres, de nombreux exemples, que je crois les premiers, de surfaces *algébriques* (et même unicursales) à courbures principales liées par une relation et qui ne sont ni de révolution, ni parallèles à des surfaces minima.

Je commence (§ I) par établir une propriété commune à toutes les surfaces de Weingarten qui admettent une famille de lignes de courbure planes : l'argument dont dépendent les courbures principales est la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v, u et v étant les paramètres des lignes de courbure. Il suffit d'introduire cette con-

dition analytique dans les expressions des rayons principaux d'une surface de Joachimsthal pour obtenir les deux équations du problème. On les ramène immédiatement à une équation aux fonctions mêlées, dont la discussion conduit à distinguer deux cas, dont l'un est le cas général, l'autre un cas limite, qui doit être traité à part.

L'examen du cas général (§ II) fournit, abstraction faite de constantes de position et d'une homothétie, une série *doublement infinie* de surfaces dont les courbures principales satisfont *à la même relation*. Par là, ces surfaces se rapprochent des hélicoïdes; mais leur détermination n'exige que deux quadratures, tandis que celle des hélicoïdes dont les courbures principales satisfont à une relation donnée dépend de l'intégration d'une équation du premier ordre et d'une quadrature. Un paramètre arbitraire n figure dans les expressions des rayons principaux de nos surfaces : *pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires, positives ou négatives de ce paramètre, la relation entre les rayons principaux est algébrique et du genre zéro;* les surfaces correspondantes, en nombre doublement infini, sont déterminées par deux intégrales abéliennes. A la valeur particulière $n = 0$ correspondent les surfaces à courbure totale constante.

Dans le second cas de la discussion (§ III), on trouve une série *simplement infinie* de surfaces dont les rayons de courbure satisfont *à la même relation*. Ici encore les expressions de ces rayons contiennent un paramètre arbitraire c : *pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires, positives ou négatives de c, la relation entre les rayons principaux est algébrique et du genre zéro;* la détermination des surfaces correspondantes dépend de deux intégrales abéliennes. La valeur particulière $c = 1$ donne des surfaces à courbure totale constante, parmi lesquelles figurent les hélicoïdes de Dini (*C. R. Acad. des Sciences*, 1865) engendrés par des tractrices ou courbes aux tangentes égales.

Dans la dernière partie (§ IV), nous examinons de plus près quelques exemples.

Si l'on particularise les formules trouvées dans le cas général, en supposant nulle l'une des constantes qui y figurent, et si l'on fait en même temps $n = 2$, on obtient *une série simplement infinie de surfaces du huitième ordre, dont les rayons principaux sont liés par une relation du cinquième ordre et du genre zéro.* Toutes ces surfaces ont en commun

une droite double et sont des surfaces *à deux côtés analytiquement distincts*. Leurs lignes de courbure planes sont des *sextiques unicursales;* les lignes de courbure sphériques sont des *biquadratiques*. Les coordonnées de chaque surface sont des fonctions rationnelles du paramètre des lignes de courbure sphériques, des fonctions irrationnelles du paramètre des lignes de courbure planes; par un changement de variable, elles deviennent des fonctions doublement périodiques de première espèce, aux mêmes périodes.

Quant aux formules trouvées dans le second cas, si on les particularise en égalant à zéro la constante qui ne figure pas dans les expressions des rayons principaux, *les surfaces obtenues et la relation entre les rayons principaux sont à la fois transcendantes ou algébriques*. Quand elles sont algébriques, la surface est *unicursale* et la relation entre les rayons principaux est *du genre zéro;* la surface admet une droite double et *ses deux côtés sont analytiquement distincts;* les lignes de courbure planes sont unicursales et à courbure rationnelle (*courbes de direction*); les lignes le long desquelles les rayons principaux restent constants (lignes d'égale courbure) sont tracées *sur des cônes de révolution* ayant tous même axe et même sommet. Pour une valeur convenable du paramètre c, on obtient une surface *du sixième ordre*, dont les lignes de courbure planes sont des *quartiques*, les lignes de courbure sphériques des *biquadratiques* et les lignes d'égale courbure des *sextiques* unicursales, tracées sur des cylindroïdes.

I. — Mise en équations du problème.

1. Nous commencerons par établir une proposition qui est de nature à simplifier notre analyse.

Une surface (S) étant rapportée à ses lignes de courbure ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$), pour exprimer que les courbes de la famille $v = \text{const.}$ sont planes, il suffit d'écrire que, dans la représentation sphérique de la surface, les lignes $v = \text{const.}$ sont planes, ou, ce qui revient au même, sont des courbes de contact de cônes circonscrits. Or, une surface étant rapportée à un réseau conjugué (u, v), ses trois coordonnées

ponctuelles satisfont à une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \, \partial v} = \beta \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes $v = \text{const.}$ soient des courbes d'ombre consiste dans l'évanouissement de l'invariant h; d'où

$$\beta\beta_1 - \frac{\partial \beta}{\partial u} = 0.$$

Si β était nul, les lignes $v = \text{const.}$ seraient des courbes de contact de cylindres circonscrits : leurs plans couperaient la sphère à angle droit; par suite les plans des lignes de courbure $v = \text{const.}$ couperaient la surface (S) à angle droit, ce qui n'a pas lieu pour les surfaces de Joachimsthal, tant qu'elles ne dégénèrent pas en surfaces de révolution. Ce cas peut donc être écarté.

Tout réseau conjugué sphérique étant orthogonal, l'élément linéaire de la sphère prend la forme

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + g\,dv^2.$$

Les expressions générales de β et de β_1 se réduisent aux valeurs suivantes

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial \log e}{\partial v}, \qquad \beta_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u},$$

de sorte que la condition précédente devient

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{g}}{\beta} = 0.$$

On conclut de là

$$\frac{\beta}{\sqrt{g}} = \frac{e'_v}{2e\sqrt{g}} = V'(v).$$

Or, pour les surfaces dont les rayons principaux sont liés par une relation, on peut supposer e et g fonctions du paramètre ϖ dont dépendent les rayons principaux. On aura donc

$$f'(\varpi) \frac{\partial \varpi}{\partial v} = V'(v),$$

d'où, par une intégration immédiate,

$$f(\varpi) = \mathrm{U}(u) + \mathrm{V}(v).$$

On a donc nécessairement

$$\varpi = \varpi(\mathrm{U} + \mathrm{V}),$$

ce qui est le résultat que nous avions en vue.

2. Ces préliminaires posés, rappelons les formules qui représentent en coordonnées rectangulaires (x, y, z) toutes les surfaces de Joachimsthal. Si l'on prend pour axe des z la droite par laquelle passent les plans des lignes de courbure planes $\theta = \text{const.}$, et si v est le paramètre des lignes de courbure sphériques, on a

$$(1) \qquad x = \frac{\cos\theta}{\mathrm{V}'\,\mathrm{Ch}(\Theta + \mathrm{V})}, \qquad y = \frac{\sin\theta}{\mathrm{V}'\,\mathrm{Ch}(\Theta + \mathrm{V})}, \qquad z = v - \frac{\mathrm{Sh}(\Theta + \mathrm{V})}{\mathrm{V}'\,\mathrm{Ch}(\Theta + \mathrm{V})};$$

Θ est une fonction arbitraire de θ, V une fonction arbitraire de v, V′ sa dérivée; les Sh et les Ch sont des sinus et cosinus hyperboliques. Dans ce système de notations, les rayons de courbure R_θ et R_v des sections principales respectivement tangentes aux lignes de courbure planes $\theta = \text{const.}$ et aux lignes de courbure sphériques $v = \text{const.}$ ont pour expressions

$$(2) \qquad \mathrm{R}_\theta = \sqrt{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{T}}}\left(\mathrm{Sh} - \frac{\mathrm{W}'}{2\,\mathrm{W}}\,\mathrm{Ch}\right), \qquad \mathrm{R}_v = -\sqrt{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{T}}}\left(\mathrm{Sh} - \frac{\mathrm{T}'}{2\,\mathrm{T}}\,\mathrm{Ch}\right)^{-1};$$

nous sous-entendons l'argument $\Theta + \mathrm{V}$ des fonctions hyperboliques et nous posons

$$(3) \qquad \mathrm{W} = \frac{1}{\mathrm{V}'^2}, \qquad \mathrm{W}' = \frac{d\mathrm{W}}{d\mathrm{V}}, \qquad \mathrm{T} = \frac{d\theta^2}{d\theta^2 + d\Theta^2}, \qquad \mathrm{T}' = \frac{d\mathrm{T}}{d\Theta}.$$

On peut, en effet, sans inconvénient, prendre désormais comme variables V et Θ : si V était constant, la surface disparaîtrait et si Θ était constant, elle dégénérerait en une surface de révolution.

On voit que, si l'on parvient à déterminer W en fonction de V, ainsi que T en fonction de Θ, on obtiendra séparément v et θ, et par suite les coordonnées de la surface, au moyen de deux quadratures.

Introduisons encore, pour plus de simplicité, les notations suivantes

$$(4)\qquad \omega=\frac{W'}{2W},\qquad \omega'=\frac{d\omega}{dW};\qquad \tau=\frac{T'}{2T},\qquad \tau'=\frac{d\tau}{d\Theta}.$$

Si maintenant nous différentions les relations (2), nous trouverons

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R_0}{\partial\Theta}=\sqrt{\dfrac{W}{T}}M, & \dfrac{\partial R_0}{\partial V}=\sqrt{\dfrac{W}{T}}(1-\omega^2-\omega')\operatorname{Ch}(\Theta+V),\\ \dfrac{1}{R_\rho^2}\dfrac{\partial R_\rho}{\partial V}=\sqrt{\dfrac{T}{W}}M, & \dfrac{1}{R_\rho^2}\dfrac{\partial R_\rho}{\partial\Theta}=\sqrt{\dfrac{T}{W}}(1-\tau^2-\tau')\operatorname{Ch}(\Theta+V), \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(6)\quad \begin{cases} M=(1+\omega\tau)\operatorname{Ch}(\Theta+V)-(\omega+\tau)\operatorname{Sh}(\Theta+V)\\ \quad=\dfrac{e^{V-\Theta}}{2}[e^{2(\Theta}(1-\omega)(1-\tau)+e^{-2V}(1+\omega)(1+\tau)]. \end{cases}$$

Ces formules vont nous servir à exprimer qu'il existe une relation entre les courbures principales.

3. Remarquons, auparavant, que les hypothèses

$$\omega=-\tau=\pm 1$$

ne conviennent qu'à la sphère. En effet, chacune de ces hypothèses entraînant

$$M=0,\qquad 1-\omega^2-\omega'=0,\qquad 1-\tau^2-\tau'=0,$$

les quatre dérivées de R_0 et de R_ρ sont nulles : en conséquence, les deux rayons principaux sont constants et la surface est une sphère.

Mais il y a plus : *si l'on suppose seulement* $M=0$, *la surface est une sphère*. En effet, quand M est nul, les deux binomes $(1-\omega)$ et $(1+\tau)$ sont simultanément nuls ou différents de zéro. La première hypothèse ramène au cas précédent. La seconde permet d'écrire

$$e^{2\Theta}\frac{1-\tau}{1+\tau}+e^{-2V}\frac{1+\omega}{1-\omega}=0;$$

d'où, en différentiant séparément par rapport à Θ et par rapport à V, l'on déduit

$$1-\tau^2-\tau'=0,\qquad 1-\omega^2-\omega'=0;$$

les quatre dérivées des rayons principaux sont encore nulles : la surface est une sphère.

Nous supposerons donc désormais $M \neq 0$. Il suit de là que R_0 et R_1 ne peuvent pas être fonctions *d'une seule* des variables Θ et V, car cette hypothèse entraîne $M = 0$.

Or, d'après ce qui a été prouvé au n° 1, les deux rayons principaux doivent dépendre de la somme $\Theta_0 + V_0$ d'une fonction de Θ et d'une fonction de V. Si Θ'_0 et V'_0 sont les dérivées de ces fonctions, la double condition dont il s'agit s'exprimera, en vertu des formules (5), par les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} \Theta'_0 (1 - \omega^2 - \omega') \operatorname{Ch}(\Theta + V) = V'_0 M, \\ V'_0 (1 - \tau^2 - \tau') \operatorname{Ch}(\Theta + V) = \Theta'_0 M; \end{cases}$$

et il est impossible, on vient de le voir, que les rayons principaux ne dépendent que de Θ ou que de V. En conséquence, les dérivées Θ'_0 et V'_0 sont l'une et l'autre différentes de zéro, comme la fonction M. Dès lors, il faut égaler à zéro le déterminant des équations (7), qui sont linéaires et homogènes par rapport à Θ'_0 et V'_0. On trouve ainsi

$$(8)\qquad (1 - \omega^2 - \omega')(1 - \tau^2 - \tau') \operatorname{Ch}^2(\Theta + V) = M^2.$$

Quand on aura satisfait à cette équation, les deux équations (7) se réduiront à une, qui donnera

$$(7')\qquad \frac{\Theta'_0}{V'_0} = \frac{M}{(1 - \omega^2 - \omega') \operatorname{Ch}(\Theta + V)}.$$

Si l'on remplace M par sa valeur tirée de la condition (8), il viendra

$$\frac{\Theta'_0}{V'_0} = \frac{\sqrt{1 - \tau^2 - \tau'}}{\sqrt{1 - \omega^2 - \omega'}},$$

ce qui prouve bien que le rapport $\Theta'_0 : V'_0$ sera égal à une fonction de Θ divisée par une fonction de V. Il semble qu'il y ait ici l'ambiguïté d'un double signe. Mais nous verrons que le second membre de la relation (7') est toujours une fonction uniforme de Θ et de V.

4. Il s'agit maintenant de discuter l'équation (8). Extrayons les racines carrées de ses deux membres, remplaçons le cosinus hyperbolique par des exponentielles et M par la seconde des expressions (6).

Après suppression du facteur commun $e^{V-\Theta}$ et groupement des termes, il viendra

$$(9)\qquad e^{2\Theta}\left[\sqrt{1-\omega^2-\omega'}\sqrt{1-\tau^2-\tau'}-(1-\omega)(1-\tau)\right] + e^{-2V}\left[\sqrt{1-\omega^2-\omega'}\sqrt{1-\tau^2-\tau'}-(1+\omega)(1+\tau)\right]=0.$$

On peut diviser tous les termes par le produit des deux radicaux : en effet, l'expression M étant supposée différente de zéro, les équations (7) montrent qu'aucun des deux trinomes $1-\omega^2-\omega'$ et $1-\tau^2-\tau'$ ne peut être nul. Nous écrirons donc

$$(10)\qquad \left(1-\frac{1-\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}\,\frac{1-\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}\right)e^{2\Theta} + \left(1-\frac{1+\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}\,\frac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}\right)e^{-2V}=0,$$

et nous associerons à cette équation celle qu'on obtient en la différentiant successivement par rapport à Θ et à V, savoir

$$(11)\qquad \frac{d}{d\Theta}\,\frac{(1-\tau)e^{2\Theta}}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}\,\frac{d}{dV}\,\frac{1-\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}} + \frac{d}{d\Theta}\,\frac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}\,\frac{d}{dV}\,\frac{(1+\omega)e^{-2V}}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}=0.$$

Dans cette équation, il n'y a pas lieu de supposer que *deux* dérivées relatives *à la même variable* soient nulles : c'est ce qui résulte des identités

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\Theta}\,\dfrac{(1-\tau)e^{2\Theta}}{1+\tau}=2(1-\tau^2-\tau')\,\dfrac{e^{2\Theta}}{(1+\tau)^2}, \\ -\dfrac{d}{dV}\,\dfrac{(1+\omega)e^{-2V}}{1-\omega}=2(1-\omega^2-\omega')\,\dfrac{e^{-2V}}{(1-\omega)^2}, \end{cases}$$

dont nous aurons encore à faire usage. On voit que, si les deux dérivées par rapport à Θ qui figurent dans l'équation (11) étaient nulles, le rapport $(1-\tau)e^{2\Theta}:(1+\tau)$ serait constant et l'on aurait

$$1-\tau^2-\tau'=0,$$

contrairement à nos hypothèses actuelles ; de même, si les deux dérivées par rapport à V étaient nulles, le trinome $1-\omega^2-\omega'$ devrait être nul.

En conséquence, nous n'avons que deux cas à distinguer : 1° *aucune* des quatre dérivées qui figurent dans l'équation (11) n'est égale à zéro ; 2° *deux* de ces dérivées, nécessairement relatives à des variables différentes, sont nulles.

II. — Premier cas : cas général.

5. *Aucune des quatre dérivées n'est nulle.* L'équation (11) peut alors être mise sous la forme

$$(11') \qquad \frac{\dfrac{d}{d\Theta}\dfrac{(1-\tau)e^{2\Theta}}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}}{\dfrac{d}{d\Theta}\dfrac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}} = -\frac{\dfrac{d}{dV}\dfrac{(1+\omega)e^{-2V}}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}}{\dfrac{d}{dV}\dfrac{1-\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}} = \text{const.} = m.$$

On déduit de là par intégration

$$(13) \qquad \begin{cases} -\dfrac{(1-\tau)e^{2\Theta}}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}} + m\dfrac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}} = \alpha, \\ \dfrac{(1+\omega)e^{-2V}}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}} + m\dfrac{1-\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}} = \beta, \end{cases}$$

α et β désignant deux nouvelles constantes. Tirant de ces formules les termes exponentiels pour les substituer dans l'équation (10), on trouve

$$e^{2\Theta} + \alpha\frac{1-\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}} + e^{-2V} - \beta\frac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}} = 0,$$

équation qui se décompose en deux :

$$(14) \qquad \begin{cases} e^{2\Theta} - \beta\dfrac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}} - \gamma = 0, \qquad e^{-2V} + \alpha\dfrac{1-\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}} + \gamma = 0 \\ (\gamma = \text{const.}). \end{cases}$$

On voit que ni α, ni β, ne peut être supposé nul. Ces dernières formules doivent s'accorder avec les relations (13) ; or, si l'on tire les irrationnelles du système (14) pour les porter dans les équations (13), on trouve

$$-\frac{1-\tau}{1+\tau}e^{2\Theta} + m = \frac{\alpha\beta}{e^{2\Theta}-\gamma}, \qquad -\frac{1+\omega}{1-\omega}e^{-2V} - m = \frac{\alpha\beta}{e^{-2V}+\gamma}.$$

Différentions ces dernières formules en ayant égard aux identités (12); il viendra

$$(14')\qquad \begin{cases} (1-\tau^2-\tau')\dfrac{e^{2(-)}}{(1+\tau)^2}=\dfrac{\alpha\beta e^{2(-)}}{(e^{2(-)}-\gamma)^2}, \\ (1-\omega^2-\omega')\dfrac{e^{-2V}}{(1-\omega)^2}=\dfrac{\alpha\beta e^{-2V}}{(e^{-2V}+\gamma)^2}. \end{cases}$$

La comparaison de ces résultats avec les équations (14) montre que β doit être égal à α. Si donc nous remplaçons α et β par $c(c\neq 0)$, nous aurons

$$(15)\qquad -\frac{1-\tau}{1+\tau}e^{2(-)}+m=\frac{c^2}{e^{2(-)}-\gamma},\qquad -\frac{1+\omega}{1-\omega}e^{-2V}-m=\frac{c^2}{e^{-2V}-\gamma}.$$

Ces relations, résolues par rapport à τ et à ω, donnent

$$(16)\qquad \begin{cases} \tau=\dfrac{T'}{2T}=\dfrac{e^{4(-)}-(m+\gamma)e^{2(-)}+c^2+m\gamma}{e^{4(-)}+(m-\gamma)e^{2(-)}-(c^2+m\gamma)}, \\ \omega=\dfrac{W'}{2W}=\dfrac{e^{-4V}+(m+\gamma)e^{-2V}+c^2+m\gamma}{-e^{-4V}+(m-\gamma)e^{-2V}+c^2+m\gamma}. \end{cases}$$

Il n'y a donc plus qu'à intégrer pour connaître T et W. Les résultats de l'intégration seront de forme différente, suivant que les fractions rationnelles en $e^{2(-)}$ et e^{-2V} présenteront telle ou telle particularité, correspondant à des relations entre m, γ et c. Mais, si nous faisons le changement de variables

$$\xi=e^{2(-)},\qquad \eta=e^{-2V},$$

les équations précédentes deviennent

$$(16')\qquad \begin{cases} \dfrac{dT}{T}=\dfrac{\xi^2-(m+\gamma)\xi+c^2+m\gamma}{\xi^2+(m-\gamma)\xi-(c^2+m\gamma)}\dfrac{d\xi}{\xi}, \\ \dfrac{dW}{W}=\dfrac{\eta^2+(m+\gamma)\eta+c^2+m\gamma}{\eta^2-(m-\gamma)\eta-(c^2+m\gamma)}\dfrac{d\eta}{\eta}. \end{cases}$$

En conséquence, on peut les mettre sous la forme suivante

$$d\log T=f(\xi)\,d\xi,\qquad d\log W=f(-\eta)\,d(-\eta),$$

ce qui montre que l'on aura toujours, après l'intégration,

$$T=p\,\varphi(\xi),\qquad W=q\,\varphi(-\eta),$$

p et q désignant deux constantes arbitraires. Il n'y aura donc, en réalité, *qu'une seule quadrature* à effectuer pour déterminer à la fois les deux fonctions T et W.

6. Cherchons maintenant les fonctions Θ_0 et V_0 dont la somme est l'argument unique dont dépendent les courbures principales. Si l'on désigne respectivement par Ξ et par H les dénominateurs de τ et de ω, savoir

$$\Xi = e^{4\Theta} + (m-\gamma)e^{2\Theta} - (c^2 + m\gamma), \qquad \mathrm{H} = -e^{-4V} + (m-\gamma)e^{-2V} + c^2 + m\gamma,$$

et si l'on calcule M à l'aide des formules (6) et (16), on trouve

$$\mathrm{M} = \frac{4c^2 e^{2\Theta} e^{-2V}}{\Xi \mathrm{H}} \mathrm{Ch}(\Theta + V). \tag{17}$$

D'autre part, les relations $(14)'$ et (16) donnent

$$1 - \omega^2 - \omega'^2 = \frac{c^2(1-\omega)^2}{(e^{-2V}+\gamma)^2} = \frac{4c^2 e^{-4V}}{\mathrm{H}^2}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation $(7)'$; il vient

$$\frac{\Theta_0'}{V_0'} = \frac{\mathrm{H} e^{2\Theta}}{\Xi e^{-2V}};$$

on pourra donc prendre

$$\begin{cases} \Theta_0' = \dfrac{2c^{2\Theta}}{e^{4\Theta} + (m-\gamma)e^{2\Theta} - (c^2 + m\gamma)}, \\ V_0' = \dfrac{2e^{-2V}}{-e^{-4V} + (m-\gamma)e^{-2V} + c^2 + m\gamma}; \end{cases} \tag{18}$$

et il est visible qu'on obtiendra Θ_0 et V_0 par *une seule* quadrature.

Si l'on introduit, en effet, les variables auxiliaires ξ et η, on trouve

$$d\Theta_0 = \frac{d\xi}{\xi^2 + (m-\gamma)\xi - (c^2 + m\gamma)}, \qquad dV_0 = \frac{d\eta}{\eta^2 - (m-\gamma)\eta - (c^2 + m\gamma)}, \tag{18}'$$

c'est-à-dire

$$d\Theta_0 = \psi'(\xi)\,d\xi, \qquad dV_0 = \psi'(-\eta)\,d\eta;$$

d'où résulte, après intégration,

$$\Theta_0 = \psi(\xi), \qquad V_0 = -\psi(-\eta);$$

et finalement

$$\Theta_0 + V_0 = \psi(e^{2\Theta}) - \psi(e^{-2V}).$$

7. Nous allons faire de nos résultats une vérification qui aura l'avantage de nous conduire à distinguer, parmi les surfaces trouvées, celles dont la courbure totale est constante. Il est visible que la valeur commune Q des deux rapports égaux

$$\frac{\partial R_0}{\partial \Theta} : \frac{1}{R_v^2}\frac{\partial R_v}{\partial \Theta} = \frac{\partial R_0}{\partial V} : \frac{1}{R_v^2}\frac{\partial R_v}{\partial V}$$

doit être une fonction de $\Theta_0 + V_0$. De plus, si l'on suppose la courbure totale constante, Q se réduit à une constante, et réciproquement. Or, d'après les relations (5), on a

$$Q = \frac{W}{T}\frac{M}{(1-\tau^2-\tau')\,\mathrm{Ch}(\Theta+V)}.$$

D'autre part, les formules $(14)'$ et (16) donnent

$$1-\tau^2-\tau' = \frac{c(1+\tau)^2}{(e^{2\Theta}-\gamma)^2} = \frac{4ce^{4\Theta}}{\Xi^2}.$$

Tenant compte de ce résultat et de l'expression (17) de M, nous trouvons

$$Q = \frac{W\Xi e^{-2V}}{T\Pi e^{2\Theta}}.$$

Calculons la différentielle logarithmique de Q, en ayant égard aux formules (16) et aux expressions (18) adoptées pour Θ_0' et V_0'. Il vient

$$d\log Q = (m+\gamma)(\Theta_0'\,d\Theta + V_0'\,dV) = (m+\gamma)\,d(\Theta_0+V_0).$$

Ainsi Q est bien une fonction de $\Theta_0 + V_0$, et nous obtenons, pour caractériser les surfaces à courbure totale constante, la condition

$$m+\gamma = 0,$$

qui est à la fois nécessaire et suffisante.

8. Il convient maintenant, en vue d'arriver à une conclusion importante, d'intégrer les équations $(16)'$ et $(18)'$. D'après ce qui a été

dit plus haut, nous n'avons qu'à nous occuper des formules

$$\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} = \frac{\xi^2 - (\gamma + m)\xi + c^2 + m\gamma}{\xi^2 - (\gamma - m)\xi - (c^2 + m\gamma)} \frac{d\xi}{\xi}, \qquad d\Theta_0 = \frac{d\xi}{\xi^2 - (\gamma - m)\xi - (c^2 + m\gamma)}.$$

Appelons a et b les racines, supposées distinctes, du dénominateur de $d\Theta_0$; ce qui revient à poser

$$\gamma - m = a + b, \qquad c^2 + m\gamma = -ab.$$

On voit que, étant donnés a et b, on ne peut déterminer que *deux* des trois coefficients m, γ, c^2; les deux derniers, par exemple, de sorte que m restera *arbitraire*. Cela étant, il vient

$$\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} = \frac{[(\xi - a)(\xi - b) - 2(m\xi + ab)]d\xi}{\xi(\xi - a)(\xi - b)}, \qquad d\Theta_0 = \frac{d\xi}{(\xi - a)(\xi - b)}.$$

Les résidus de la première fraction, relatifs aux infinis o, a, b, ont respectivement pour valeurs

$$-1, \quad 1 - \frac{a + b + 2m}{a - b}, \quad 1 + \frac{a + b + 2m}{a - b}.$$

On peut donc poser

$$\frac{a + b + 2m}{a - b} = n,$$

n étant une nouvelle constante, qui sera, comme m, *entièrement indépendante de a et de b*.

Dès lors, l'intégration donne

$$\mathrm{T} = \frac{p}{\xi}(\xi - a)^{1-n}(\xi - b)^{1+n} \qquad (p = \text{const.}).$$

Quant à Θ_0, on trouve immédiatement

$$\Theta_0 = \frac{1}{a - b} \log \frac{\xi - a}{\xi - b}.$$

A raison des remarques précédemment faites, on aura, sans nouveaux calculs,

$$\mathrm{W} = \frac{q}{\eta}(\eta + a)^{1-n}(\eta + b)^{1+n} \qquad (q = \text{const.}),$$

$$\mathrm{V}_0 = \frac{1}{a - b} \log \frac{\eta + b}{\eta + a}.$$

De là nous tirons

$$(19)\qquad \Theta_0 + V_0 = \frac{1}{a-b}\log\frac{(\xi-a)(\eta+b)}{(\xi-b)(\eta+a)} = -\frac{\log\zeta}{a-b},$$

en posant

$$\zeta = \frac{(\xi-b)(\eta+a)}{(\xi-a)(\eta+b)}.$$

C'est du seul argument ζ que vont dépendre les courbures principales.

Avant de les calculer, remarquons que, d'après les formules (1), aux diverses valeurs de la constante q dont dépend W correspondent des surfaces homothétiques par rapport à l'origine; on pourra donc disposer de q comme on voudra. Quant à la constante p, qui figure dans l'expression de T, il suffit, pour la faire disparaître, de diviser ξ, η, a, b et m par p; en faisant cela, on ne modifie pas le rapport n; mais W est alors multiplié par p, ce qui correspond à une homothétie dont on peut faire abstraction; enfin, Θ_0 et V_0 sont multipliés par ce même facteur p, qui est ici sans influence. Nous pouvons donc désormais faire

$$p = q = 1.$$

Il vient alors

$$(20)\qquad T = \frac{(\xi-a)^{1-n}(\xi-b)^{1+n}}{\xi}, \qquad W = \frac{(\eta+a)^{1-n}(\eta+b)^{1+n}}{\eta}.$$

Reportons-nous maintenant aux formules (3), qui expriment les rayons principaux :

$$R_0 = \sqrt{\frac{W}{T}}\left[\mathrm{Sh}(\Theta+V) - \frac{W'}{2W}\mathrm{Ch}(\Theta+V)\right],$$

$$R_1 = -\sqrt{\frac{W}{T}}\left[\mathrm{Sh}(\Theta+V) - \frac{T'}{2T}\mathrm{Ch}(\Theta+V)\right]^{-1}.$$

Si l'on tient compte des identités

$$\mathrm{Sh}(\Theta+V) = \frac{1}{2}\left(e^{(\Theta)+V} - e^{-(\Theta)-V}\right) = \frac{1}{2}e^{V-(\Theta)}\left(e^{2(\Theta)} - e^{-2V}\right) = \frac{\xi-\eta}{2\sqrt{\xi\eta}},$$

$$\mathrm{Ch}(\Theta+V) = \frac{1}{2}\left(e^{(\Theta)+V} + e^{-(\Theta)-V}\right) = \frac{1}{2}e^{V-(\Theta)}\left(e^{2(\Theta)} + e^{-2V}\right) = \frac{\xi+\eta}{2\sqrt{\xi\eta}},$$

ainsi que des formules (16), qui donnent

$$\frac{T'}{2T} = 1 - 2\frac{m\xi + ab}{(\xi - a)(\xi - b)}, \qquad -\frac{W'}{2W} = 1 + 2\frac{m\eta - ab}{(\eta + a)(\eta + b)},$$

on trouve, après quelques calculs,

$$\mathrm{Sh} - \frac{W'}{2W}\mathrm{Ch} = \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi}}\frac{(1+n)(\xi - b)(\eta + a) + (1-n)(\xi - a)(\eta + b)}{2(\eta + a)(\eta + b)},$$

$$-\mathrm{Sh} + \frac{T'}{2T}\mathrm{Ch} = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\eta}}\frac{(1-n)(\xi - b)(\eta + a) + (1+n)(\xi - a)(\eta + b)}{2(\xi - a)(\xi - b)}.$$

En conséquence, nous arrivons finalement aux expressions suivantes :

$$(21) \qquad R_\theta = \frac{(1+n)\zeta + 1 - n}{2\zeta^{\frac{1+n}{2}}}, \qquad R_\varphi = \frac{2\zeta^{\frac{1-n}{2}}}{(1-n)\zeta + 1 + n};$$

sur lesquelles on vérifie immédiatement que le produit des rayons principaux est constant, quand on suppose $n = 0$, ce qui revient, avec nos notations primitives, à $m + \gamma = 0$.

On voit aussi que, *pour toute valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative de n, la relation entre les rayons principaux est algébrique et du genre zéro.*

Mais il y a plus. Dans le cas général, cette relation dépend *uniquement du coefficient n*. Or, si l'on emploie les expressions (20) de T et de W pour déterminer la surface, par l'intermédiaire des relations (3) et (4), qui donnent

$$d\theta = \sqrt{\frac{T}{1-T}}\frac{d\xi}{2\xi}, \qquad d\varphi = -\sqrt{W}\frac{d\eta}{2\eta},$$

on est conduit aux deux quadratures

$$(22) \qquad \begin{cases} \theta = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{(\xi - a)^{\frac{1-n}{2}}(\xi - b)^{\frac{1+n}{2}}d\xi}{\xi\sqrt{\xi - (\xi - a)^{1-n}(\xi - b)^{1+n}}}, \\ \varphi = -\frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{(\eta + a)^{\frac{1-n}{2}}(\eta + b)^{\frac{1+n}{2}}d\eta}{\eta\sqrt{\eta}}. \end{cases}$$

En se reportant aux formules (1), on reconnaît que *les coordonnées*

de la surface, abstraction faite d'une rotation arbitraire autour de Oz et d'une translation également arbitraire suivant Oz, *dépendent des trois paramètres* a, b et n. Par suite, si l'on fixe n, il restera encore *deux* paramètres arbitraires dans les expressions de x, y, z; c'est-à-dire qu'*il existe une série doublement infinie de surfaces de Joachimsthal, dont les rayons de courbure principaux vérifient la même relation.*

III. — Second cas : cas limite.

9. *Deux dérivées sont nulles.* Revenons à l'équation (11)

$$\frac{d}{d\Theta}\frac{(1-\tau)e^{2\Theta}}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}\frac{d}{dV}\frac{1-\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}+\frac{d}{d\Theta}\frac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}\frac{d}{dV}\frac{(1+\omega)e^{-2V}}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}=0,$$

et supposons que *deux* des dérivées, nécessairement relatives à des variables différentes (n° 4), soient nulles. Il n'y a pas lieu d'admettre que ce soient celles où figurent des exponentielles, parce que l'évanouissement de ces dérivées s'exprime simplement par l'hypothèse $m=0$ faite dans les équations du premier cas. Supposons donc

$$(23)\qquad \frac{1-\omega}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}=\text{const.}=\beta,\qquad \frac{1+\tau}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}=\text{const.}=\alpha,$$

ou m infini dans l'équation (11′). L'équation (10) devient

$$\left[1-\frac{\beta(1-\tau)}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}\right]e^{2\Theta}+\left[1-\frac{\alpha(1+\omega)}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}\right]e^{-2V}=0;$$

ses deux termes, ne dépendant, le premier que de Θ, le second que de V, sont nécessairement constants; d'où

$$(24)\qquad \left[1-\frac{\beta(1-\tau)}{\sqrt{1-\tau^2-\tau'}}\right]e^{2\Theta}=-\gamma,\qquad \left[1-\frac{\alpha(1+\omega)}{\sqrt{1-\omega^2-\omega'}}\right]e^{-2V}=\gamma.$$

Ces formules montrent que α et β doivent être supposés *différents de zéro*. Il faut qu'elles s'accordent avec les précédentes; or, si l'on élimine les radicaux entre les relations (23) et (24), on trouve

$$(24)'\qquad \alpha\beta\frac{1-\tau}{1+\tau}e^{2\Theta}=e^{2\Theta}+\gamma,\qquad \alpha\beta\frac{1+\omega}{1-\omega}e^{-2V}=e^{-2V}-\gamma.$$

Différentions ces équations en ayant égard aux identités (12); il viendra

$$\alpha\beta\,\frac{1-\tau^2-\tau'}{(1+\tau)^2}=1, \qquad \alpha\beta\,\frac{1-\omega^2-\omega'}{(1-\omega)^2}=1.$$

Pour que ces relations soient compatibles avec les formules (23), il faut et il suffit que β *soit égal à* α. En conséquence, nous aurons

$$(25) \qquad c\,\frac{1-\tau}{1+\tau}\,e^{2(\Theta)}=e^{2(\Theta)}+\gamma, \qquad c\,\frac{1+\omega}{1-\omega}\,e^{-2V}=e^{-2V}-\gamma,$$

en remplaçant $\alpha^2=\beta^2$ par c, coefficient qui devra toujours être supposé différent de zéro.

Résolvant ces équations par rapport à τ et à ω, nous trouvons

$$(26) \qquad \tau=\frac{T'}{2T}=\frac{(c-1)e^{2(\Theta)}-\gamma}{(c+1)e^{2(\Theta)}+\gamma}, \qquad \omega=\frac{W'}{2W}=-\frac{(c-1)e^{-2V}+\gamma}{(c+1)e^{-2V}-\gamma}.$$

Connaissant ainsi τ et ω, nous n'avons plus que des quadratures à effectuer pour déterminer les surfaces.

10. Proposons-nous, auparavant, de calculer les fonctions Θ_0 et V_0 dont la somme est l'argument dont dépendent les courbures principales. A cet effet, nous formerons, comme plus haut, l'expression de M

$$M=\frac{e^{V-(\Theta)}}{2}\left[e^{2(\Theta)}(1-\omega)(1-\tau)+e^{-2V}(1+\omega)(1+\tau)\right].$$

Eu égard aux formules qui donnent τ et ω, on trouve

$$M=\frac{4ce^{2(\Theta)-2V}\,\mathrm{Ch}(\Theta+V)}{[(c+1)e^{2(\Theta)}+\gamma][(c+1)e^{-2V}-\gamma]}.$$

D'autre part, on a

$$1-\omega^2-\omega'=\frac{(1-\omega)^2}{c}=\frac{4ce^{-4V}}{[(c+1)e^{-2V}-\gamma]^2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la première des équations (7), il vient

$$V_0'\,\frac{e^{2(\Theta)}}{(c+1)e^{2(\Theta)}+\gamma}=\Theta_0'\,\frac{e^{-2V}}{(c+1)e^{-2V}-\gamma},$$

ce qui permet de prendre

$$(27)\qquad \Theta'_0 = \frac{2e^{2(\Theta)}}{(c+1)e^{2(\Theta)}+\gamma}, \qquad V'_0 = \frac{2e^{-2V}}{(c+1)e^{-2V}-\gamma}.$$

Ainsi que nous l'avons fait précédemment, nous allons comparer les expressions qui résultent de là pour Θ_0 et V_0 avec le rapport

$$Q = \frac{\partial R_0}{\partial \Theta} : \frac{1}{R_0^2}\frac{\partial R_0}{\partial \Theta} = \frac{W}{T}\frac{M}{(1-\tau^2-\tau')\,Ch(\Theta+V)}.$$

Nous connaissons M; on a, d'autre part,

$$1-\tau^2-\tau' = \frac{(1+\tau)^2}{c} = \frac{4ce^{2(\Theta)}}{[(c+1)e^{2(\Theta)}+\gamma]^2}.$$

En conséquence, il vient

$$Q = -\frac{We^{-2V}[(c+1)e^{2(\Theta)}+\gamma]}{Te^{2(\Theta)}[(c+1)e^{-2V}-\gamma]}.$$

Calculons maintenant la différentielle logarithmique de Q, en ayant égard aux relations (26). Nous trouvons, tous calculs faits,

$$\frac{dQ}{Q} = -(c-1)\left[\frac{2e^{2(\Theta)}d\Theta}{(c+1)e^{2(\Theta)}+\gamma} + \frac{2e^{-2V}dV}{(c+1)e^{-2V}-\gamma}\right],$$

ou, à raison des valeurs (27) obtenues pour Θ'_0 et V'_0,

$$\frac{dQ}{Q} = (1-c)\,d(\Theta_0+V_0).$$

On vérifie par là que les courbures principales sont bien des fonctions de la somme Θ_0+V_0. Mais on reconnaît, en outre, que l'hypothèse caractéristique des surfaces à courbure totale constante est ici

$$c = 1.$$

11. Revenons aux relations (26) qui, par l'introduction des variables

$$\xi = e^{2(\Theta)}, \qquad \eta = e^{-2V},$$

donnent respectivement

$$(26)'\qquad \frac{dT}{T} = \frac{(c-1)\xi-\gamma}{(c+1)\xi+\gamma}\frac{d\xi}{\xi}, \qquad \frac{dV}{V} = \frac{(c-1)\eta+\gamma}{(c+1)\eta-\gamma}\frac{d\eta}{\eta}.$$

Si, laissant de côté le cas très particulier de $c = -1$, nous posons

$$k = \frac{\gamma}{c+1},$$

l'intégration donnera, avec deux constantes p et q,

$$\text{(28)} \qquad \mathrm{T} = \frac{p}{\xi}(\xi + k)^{\frac{2c}{c+1}}, \qquad \mathrm{W} = \frac{q}{\eta}(\eta - k)^{\frac{2c}{c+1}}.$$

Nous avons déjà fait observer qu'aux diverses valeurs de q correspondent, en vertu des formules (1), des surfaces homothétiques par rapport à l'origine : on peut donc assigner à ce coefficient q telle valeur qu'on voudra. En ce qui concerne p, divisons ξ, η et k (c'est-à-dire γ) par p^n, ce qui ne change rien aux formules (27) ; W se trouvera multipliée par une puissance de p que l'on peut faire rentrer dans le coefficient q; quant à T, son expression devient

$$\frac{(\xi + k)^{\frac{2c}{c+1}}}{\xi} p^{\frac{n(1-c)+(1+c)}{c+1}}.$$

Ainsi, *sauf dans le seul cas des surfaces à courbure totale constante* ($c = 1$), on pourra disposer de n de manière à faire disparaître le facteur p de l'expression de T. Nous prendrons donc désormais

$$\text{(28)'} \qquad \mathrm{T} = \frac{(\xi + k)^{\frac{2c}{c+1}}}{\xi}, \qquad \mathrm{W} = \frac{(\eta - k)^{\frac{2c}{c+1}}}{\eta}.$$

Comme d'autre part, en vertu des relations (3), on a

$$d\theta = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{1-\mathrm{T}}}\, d\Theta = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{1-\mathrm{T}}}\, \frac{d\xi}{2\xi}, \qquad dv = \sqrt{\mathrm{W}}\, d\mathrm{W} = -\frac{\sqrt{\mathrm{W}}\, d\eta}{2\eta},$$

il restera à effectuer les deux quadratures

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} \theta = \displaystyle\int \frac{e^{-\Theta}(e^{2\Theta} + k)^{\frac{c}{c+1}} d\Theta}{\sqrt{1 - e^{-2\Theta}(e^{2\Theta} + k)^{\frac{2c}{c+1}}}}, \\ v = \displaystyle\int e^{\mathrm{V}}(e^{-2\mathrm{V}} - k)^{\frac{c}{c+1}} d\mathrm{V}, \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire

$$(29)' \qquad \theta = \int \frac{(\xi + k)^{\frac{c}{c+1}} d\xi}{2\xi\sqrt{\xi - (\xi + k)^{\frac{2c}{c+1}}}}, \qquad \varphi = -\int \frac{(\eta - k)^{\frac{c}{c+1}} d\eta}{2\eta\sqrt{\eta}}.$$

On voit que $d\varphi$ est une différentielle binome, qui s'intégrera si le rapport $c : (c+1)$ est un entier ou un entier augmenté de $1 : 2$.

Pour les surfaces à courbure totale constante ($c = 1$), le coefficient p subsiste et il vient

$$(29)'' \qquad \theta = \int \frac{\sqrt{p}\sqrt{\xi + k}\, d\xi}{2\xi\sqrt{\xi - p(\xi + k)}}, \qquad \varphi = -q\int \frac{\sqrt{\eta - k}}{2\eta\sqrt{\eta}} d\eta.$$

Passons au calcul des rayons de courbure principaux :

$$R_0 = \sqrt{\frac{W}{T}}\left[\mathrm{Sh}(\Theta + V) - \frac{T'}{2T}\,\mathrm{Ch}(\Theta + V)\right],$$

$$R_\rho = -\sqrt{\frac{W}{T}}\left[\mathrm{Sh}(\Theta + V) - \frac{W'}{2W}\,\mathrm{Ch}(\Theta + V)\right]^{-1}.$$

Les formules $(26)'$ reviennent à

$$-\frac{T'}{2T} = \frac{(1-c)\xi + (1+c)k}{(1+c)(\xi + k)}, \qquad \frac{W'}{2W} = \frac{(1-c)\eta - (1+c)k}{(1+c)(\eta - k)}$$

et les relations (28) donnent

$$\sqrt{\frac{W}{T}} = \sqrt{\frac{q}{p}}\,\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\eta}}\left(\frac{\eta - k}{\xi + k}\right)^{\frac{c}{c+1}}.$$

En tenant compte de ces résultats, on trouve successivement

$$\mathrm{Sh}(\Theta + V) - \frac{T'}{2T}\,\mathrm{Ch}(\Theta + V) = \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\eta}}\,\frac{(\xi + k) - c(\eta - k)}{(1+c)(\xi + k)},$$

$$\mathrm{Sh}(\Theta + V) - \frac{W'}{2W}\,\mathrm{Ch}(\Theta + V) = \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\xi}}\,\frac{c(\xi + k) - (\eta - k)}{(1+c)(\eta - k)},$$

et, pour les rayons de courbure principaux,

$$R_0 = \frac{\sqrt{q}}{(1+c)\sqrt{p}} \left(\frac{\eta - k}{\xi + k}\right)^{\frac{c}{c+1}} \left(c\frac{\xi + k}{\eta - k} - 1\right),$$

$$R_v = -\frac{\sqrt{q}\,(1+c)}{\sqrt{p}} \left(\frac{\eta - k}{\xi + k}\right)^{\frac{c}{c+1}} \left(1 - c\frac{\eta - k}{\xi + k}\right)^{-1}.$$

Quand c est égal à 1, on trouve immédiatement

$$R_0 R_v = -\frac{q}{p}$$

et les surfaces correspondantes sont données par les formules $(29)''$. Il convient de signaler celles qu'on obtient en faisant $k = 0$. On trouve alors, en réduisant q à l'unité,

$$v = V, \qquad \theta = \frac{\Theta}{l}, \qquad l = \sqrt{\frac{1-p}{p}}$$

et, par suite,

$$x = \frac{\cos\theta}{\operatorname{Ch}(l\theta + v)}, \qquad y = \frac{\sin\theta}{\operatorname{Ch}(l\theta + v)}, \qquad z = v - \frac{\operatorname{Sh}(l\theta + v)}{\operatorname{Ch}(l\theta + v)}.$$

Si l'on remplace $l\theta + v$ par une nouvelle variable t, il vient

$$x = \frac{\cos\theta}{\operatorname{Ch} t}, \qquad y = \frac{\sin\theta}{\operatorname{Ch} t}, \qquad z = -l\theta + t - \frac{\operatorname{Sh} t}{\operatorname{Ch} t}.$$

Ce sont là les hélicoïdes de Dini, qui ont pour profil générateur la courbe aux tangentes égales. On verra facilement que *tout hélicoïde qui est en même temps une surface de Joachimsthal* est représenté par ces formules et par suite *a sa courbure totale constante*.

Quand c diffère de 1, on peut faire $p = q = 1$, et si l'on pose

$$\frac{\xi + k}{\eta - k} = \zeta,$$

il vient

$$(30) \qquad R_0 = \frac{c\zeta - 1}{(1+c)\zeta^{\frac{c}{c+1}}}, \qquad R_v = \frac{(1+c)\zeta^{\frac{1}{c+1}}}{c - \zeta}.$$

Les surfaces correspondantes, étant données par les formules (29), dépendent évidemment de c et de k, tandis que la relation entre les rayons de courbure principaux ne dépend que de c. Nous obtenons donc ici *une série simplement infinie de surfaces de Joachimsthal, dont les rayons de courbure principaux vérifient la même relation*. Les plus simples de ces surfaces sont celles qu'on obtient en supposant $k = 0$. Ces surfaces, qui jouissent de propriétés remarquables, seront étudiées un peu plus loin.

Nous nous bornerons à faire observer que, *pour toute valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative de c, la relation entre les rayons principaux est algébrique et du genre zéro*. Pour $c = -2$ par exemple, elle est seulement du troisième degré.

IV. — Examen de quelques exemples.

12. Les formules (22), qui donnent θ et φ, se simplifient quand on y introduit l'hypothèse $b = 0$, qui revient à $c^2 + m\gamma = 0$.

Dans ce cas, sans doute, les dénominateurs des fractions (16)′ qui représentent les différentielles logarithmiques de T et de W acquièrent une seconde racine nulle; mais cette racine apparaît aussi dans les numérateurs et l'on vérifie aisément que tous nos résultats subsistent. Il faut seulement remarquer que n désigne maintenant le rapport

$$\frac{a+2m}{a} = \frac{\gamma+m}{\gamma-m}$$

et ne peut, en conséquence, être supposé égal ni à $+1$, ni à -1, parce que ces deux hypothèses entraîneraient $c = 0$. Sous le bénéfice de ces observations, nous trouvons

$$(31)\qquad \theta = \frac{1}{2}\int \frac{\xi^{\frac{n-2}{2}}\,d\xi}{\sqrt{(\xi-a)^{n-1}-\xi^n}}, \qquad \varphi = -\frac{1}{2}\int \frac{\eta^{\frac{n-2}{2}}\,d\eta}{\sqrt{(\eta+a)^{n-1}}}.$$

Les rayons principaux ont toujours les mêmes expressions

$$(32)\qquad R_\theta = \frac{(1+n)\zeta+1-n}{2\zeta^{\frac{1+n}{2}}}, \qquad R_\varphi = \frac{2\zeta^{\frac{1-n}{2}}}{(1-n)\zeta+1+n}, \qquad \zeta = \frac{\xi(\eta+a)}{\eta(\xi-a)}.$$

On voit que φ est une intégrale de différentielle binome; elle peut être obtenue *en termes finis* pour toute valeur *entière* de n, positive ou négative, paire ou impaire. Mais θ est alors une intégrale hyperelliptique.

Un cas particulier remarquable correspond à la valeur $n = 2$, pour laquelle on a immédiatement

$$\theta = \frac{1}{2}\arccos\frac{2\xi - 1}{\sqrt{1-4a}}, \qquad \varphi = -\sqrt{\eta + a}. \tag{33}$$

Substituant ces valeurs dans les formules (11), on obtient les coordonnées

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{\cos\frac{1}{2}\arccos\frac{2\xi-1}{\sqrt{1-4a}}} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}\arccos\frac{2\xi-1}{\sqrt{1-4a}}} = \frac{2\eta}{\xi+\eta}\sqrt{\frac{\xi\eta}{\eta+a}},\\ &-z = \sqrt{\eta+a} + \frac{\eta(\xi-\eta)}{(\xi+\eta)\sqrt{\eta+a}} = \frac{2\xi\eta + a(\xi+\eta)}{(\xi+\eta)\sqrt{\eta+a}}; \end{aligned}\right. \tag{34}$$

la surface est donc *algébrique*, quelque valeur qu'on assigne au paramètre arbitraire a.

Les expressions (32) des rayons principaux deviennent

$$R_\theta = \frac{3\zeta - 1}{2\zeta\sqrt{\zeta}}, \qquad R_\varphi = \frac{2}{(3-\zeta)\sqrt{\zeta}}, \tag{32'}$$

ce qui montre que ces rayons sont liés par une relation du cinquième ordre et du genre zéro. Remarquant que l'on a

$$4\frac{R_\theta}{R_\varphi} = -3\left(\sqrt{\zeta} - \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)^2 + 4, \qquad R_\theta - \frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\zeta} - \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)^3,$$

on trouve immédiatement

$$27\,R_\varphi(R_\theta R_\varphi - 1)^2 + 16\,(R_\theta - R_\varphi)^3 = 0.$$

Les formules (34) représentent donc une série *simplement infinie* de *surfaces algébriques* dont les rayons principaux satisfont à cette relation et admettent les expressions (32').

13. Nous allons voir que les coordonnées de ces surfaces sont représentées par des fonctions *uniformes* de deux paramètres et que

leurs deux côtés sont analytiquement distincts. Posons, en effet,

$$\eta = \frac{4at^2}{(t^2-1)^2},$$

de manière que $\sqrt{\eta}$ et $\sqrt{\eta+a}$ deviennent des fonctions rationnelles de t. Posons, en outre,

$$\frac{\xi}{\xi-a} = u_1^2$$

afin que la fonction

$$\zeta = \frac{\xi}{\xi-a}\,\frac{\eta+a}{\eta},$$

dont la racine carrée figure dans les expressions des rayons principaux, devienne le carré d'une fonction rationnelle de t et de u_1

$$\zeta = \frac{u_1^2(t^2+1)^2}{(t^2-1)^2}.$$

Enfin, en vue de ce qui suivra, introduisons la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ d'un point à l'axe des z. Nous obtiendrons

$$(34')\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{x\sqrt{2}\sqrt{1-4a}\sqrt{u_1^2-1}}{\sqrt{(u_1^2-1)(\sqrt{1-4a}-1)+2au_1^2}} = \dfrac{y\sqrt{2}\sqrt{1-4a}\sqrt{u_1^2-1}}{\sqrt{(u_1^2-1)(\sqrt{1-4a}+1)-2au_1^2}} = r, \\ r = \dfrac{16a\sqrt{a}\,t^3u_1\sqrt{u_1^2-1}}{(t^2+1)[u_1^2(t^2-1)^2+4at^2(u_1^2-1)]}, \\ -z = \dfrac{\sqrt{a}(t^2-1)[(t^2-1)^2u_1^2+8t^2u_1^2+4at^2(u_1^2-1)]}{(t^2+1)[(t^2-1)^2u_1^2+4at^2(u_1^2-1)]}. \end{array}\right.$$

Les expressions de x, y et z sont rationnelles par rapport à t; comme le radical $\sqrt{u_1^2-1}$ n'y figure pas, elles ne contiennent, relativement à u_1, que *deux* radicaux carrés portant sur des fonctions linéaires de u_1^2. En conséquence, si l'on introduit, à la place de u_1, le nouvel argument u, défini par la relation

$$u = \int \frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-1)(\sqrt{1-4a}-1)+2au_1^2}\sqrt{(u_1^2-1)(\sqrt{1-4a}+1)-2au_1^2}},$$

x, y et z seront des fonctions uniformes de u, à deux périodes, en même temps que des fonctions rationnelles de t.

De plus, les rayons principaux sont des fonctions rationnelles de $\sqrt{\zeta}$, qui est lui-même devenu une fonction *uniforme* de t et aussi de u. Or on sait que, quand les coordonnées x, y, z d'une surface sont exprimées par trois fonctions *uniformes* de deux paramètres u et t, si l'on représente l'élément linéaire par

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dt + \mathrm{G}\,dt^2,$$

la fonction

$$\mathrm{H}(u, t) = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}$$

est la seule irrationnelle dont dépendent les cosinus directeurs de la normale. C'est aussi la seule irrationnelle qui figure dans l'expression de la courbure moyenne. Si donc la courbure moyenne est une fonction *uniforme* de u et de t, il en sera de même des cosinus de la normale et la surface sera une surface *à deux côtés* analytiquement distincts. C'est ce qui a lieu ici. En conséquence les surfaces considérées ont *leurs deux côtés analytiquement distincts*.

Chacune d'elles admet l'axe des z comme *droite double*. En effet, il résulte des formules (34) que le point $x = y = 0$, considéré comme appartenant à *chaque* section plane $z = \text{const.}$, est donné par la valeur $\xi = 0$ et par celle-là seulement. Or on déduit de ces mêmes formules

$$\frac{y^2}{x^2} = \operatorname{tang}^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2\xi - 1}{\sqrt{1 - 4a}}\right) = \frac{\sqrt{1 - 4a} - 2\xi + 1}{\sqrt{1 - 4a} + 2\xi - 1},$$

ce qui montre qu'à chaque valeur de ξ et, en particulier, à la valeur $\xi = 0$ correspondent *deux* valeurs et deux seulement du rapport $y : x$. Ainsi le point $x = y = 0$ est un *point double* pour chaque section $z = \text{const.}$ et l'axe des z est une droite double des surfaces considérées.

14. Les lignes de courbure planes ($\xi = \text{const.}$ ou $u_1 = \text{const.}$) sont représentées dans leurs plans respectifs par les deux dernières des formules (34′). On voit que ce sont des *sextiques unicursales*, symétriques par rapport à l'axe des z. Cet axe étant une droite double et les sections faites par des plans qui le contiennent étant du sixième degré, *les surfaces considérées sont du huitième ordre*.

Pour reconnaître la nature des lignes de courbure sphériques ($\varphi = \text{const.}$), posons

$$z_1 = z + \sqrt{\eta + a}, \qquad \rho = \frac{\eta}{\sqrt{\eta + a}};$$

les formules précédentes deviennent

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = -\frac{2z_1\sqrt{\xi\eta}}{\xi - \eta}, \qquad z_1 = -\frac{\rho(\xi - \eta)}{\xi + \eta}.$$

Égalons le carré du dernier rapport successivement à celui du premier et du second, en ayant soin de remplacer les lignes trigonométriques de θ par leurs valeurs en fonction de ξ; nous trouvons

$$\frac{2x^2\sqrt{1-4a}}{\sqrt{1-4a} - 1 + 2\xi} = \frac{4z_1^2\xi\eta}{(\xi-\eta)^2},$$
$$\frac{2y^2\sqrt{1-4a}}{\sqrt{1-4a} + 1 - 2\xi} = \frac{4z_1^2\xi\eta}{(\xi-\eta)^2}.$$

Enfin, substituons à ξ son expression en fonction de z_1,

$$\xi = \frac{\eta(\rho - z_1)}{\rho + z_1}.$$

Nous obtenons, après suppression de facteurs communs,

$$2x^2\sqrt{1-4a} = (\rho - z_1)\left[(\sqrt{1-4a} - 1)(\rho + z_1) + 2\eta(\rho - z_1)\right],$$
$$2y^2\sqrt{1-4a} = (\rho - z_1)\left[(\sqrt{1-4a} + 1)(\rho + z_1) - 2\eta(\rho - z_1)\right].$$

Ces relations entraînent d'abord

$$x^2 + y^2 + z_1^2 = \rho^2,$$

ce qui est l'équation de la sphère $\varphi = \text{const}$; mais on en déduit aussi

$$\sqrt{1-4a}(x^2 - y^2) = 2\eta(\rho - z_1)^2 - (\rho^2 - z_1^2),$$

équation d'une quadrique ayant son centre sur l'axe Oz.

En conséquence les lignes de courbure $\varphi = \text{const.}$ sont des *biquadratiques sphériques*.

15. En vue d'étudier les exemples correspondants du *cas limite* ($a = \infty$, $b = -k$) reportons-nous aux formules (29) et (29′) où

nous introduirons l'hypothèse $k = 0$. En même temps nous ferons

$$c = \frac{1-n}{1+n},$$

en excluant les valeurs $n = \pm 1$, auxquelles correspondent pour c les valeurs inacceptables zéro et l'infini. Nous écarterons aussi la valeur $n = 0$, à laquelle correspondent les surfaces à courbure totale constante, qui ne rentrent pas dans les formules en question et sont déterminées par les équations (29″). Sous le bénéfice de ces réserves, nous obtenons

$$(35)\qquad \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}\int \frac{\xi^{-\frac{n}{2}-1}\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^{-n}}} = \frac{1}{n}\arccos\xi^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{n}\arccos e^{-n\Theta}, \\ \varphi = -\frac{1}{2}\int \eta^{-\frac{n}{2}-1}\,d\eta = \frac{1}{n}\eta^{-\frac{n}{2}} = \frac{e^{nV}}{n}. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs de 0 et de φ dans les formules (1), on trouve, pour les coordonnées des surfaces considérées, les expressions suivantes :

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\cos\left(\frac{1}{n}\cos\operatorname{arc}\,\xi^{-\frac{n}{2}}\right)} = \dfrac{y}{\sin\left(\frac{1}{n}\arccos\xi^{-\frac{n}{2}}\right)} = \dfrac{2\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1-n}{2}}}{\xi+\eta}, \\ z = \dfrac{\eta^{-\frac{n}{2}}}{n(\xi+\eta)}[(1-n)\xi+(1+n)\eta], \end{cases}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$(36')\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\cos\left(\frac{1}{n}\arccos e^{-n\Theta}\right)} = \dfrac{y}{\sin\left(\frac{1}{n}\arccos e^{-n\Theta}\right)} = \dfrac{e^{nV}}{\operatorname{Ch}(\Theta+V)}; \\ z = \dfrac{e^{nV}}{n\operatorname{Ch}(\Theta+V)}[\operatorname{Ch}(\Theta+V) - n\operatorname{Sh}(\Theta+V)]. \end{cases}$$

Il est facile d'obtenir en coordonnées cylindriques $(r, 0, z)$ l'équation de ces surfaces, sans faire d'hypothèse sur la constante n. Si l'on pose, en effet, conformément à nos notations antérieures,

$$\zeta = e^{2\Theta+2V} = \frac{\xi}{\eta},$$

les expressions des coordonnées pourront être écrites ainsi :

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\cos\theta} = \dfrac{y}{\sin\theta} = \dfrac{2\zeta^{\frac{1+n}{2}}}{\zeta+1}\cos n\theta, \\ z = \dfrac{\sqrt[n]{\zeta^2}[(1-n)\zeta+1+n]}{n(\zeta+1)}\cos n\theta. \end{cases}$$

On n'a donc qu'à éliminer ζ entre la dernière de ces équations et celle qui donne r, savoir

$$r = \frac{2\zeta^{\frac{1+n}{2}}}{\zeta+1}\cos n\theta.$$

Or, si l'on divise z par r, on obtient l'équation du second degré

$$(38)\qquad (1-n)r\zeta - 2nz\sqrt{\zeta} + (1+n)r = 0.$$

Résolvant par rapport à $\sqrt{\zeta}$ et substituant dans la précédente, on trouve

$$(39)\qquad nr^n = (1-n)^{1-n}\cos n\theta\,\frac{\left|nz+\sqrt{n^2z^2+(n^2-1)r^2}\right|^{\frac{1+n}{2}}}{nz^2+(n-1)r^2+z\sqrt{n^2z^2+(n^2-1)r^2}}.$$

Pour que la surface soit algébrique, *il faut* que ses sections $\theta = \text{const.}$ soient algébriques, c'est-à-dire que n soit entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Mais cette condition est évidemment *suffisante*, puisque

$$\cos n\theta = \cos n \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$$

est alors une fonction algébrique de x et y. En outre, nous allons voir que *la surface* (37), *quand elle est algébrique, est unicursale*. Soit en effet $\lambda : \mu$ la fraction irréductible que nous prenons pour valeur de n. Les formules (37) ne contiennent d'autre irrationnelle que $\sqrt[2\mu]{\zeta}$. Ce sont donc des fonctions rationnelles de $\sqrt[2\mu]{\zeta} = u$. Comme, d'autre part, x, y et z dépendent rationnellement de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\cos n\theta$, il suffira de prendre comme nouvelle variable

pour que les trois coordonnées deviennent des fonctions rationnelles des deux paramètres u et t, ce qui démontre la proposition.

16. Calculons maintenant les rayons de courbure principaux. Dans les formules (30) faisons

$$c = \frac{1-n}{1+n};$$

nous obtenons ainsi

$$(40) \qquad R_0 = \frac{(1-n)\zeta - (1+n)}{2\zeta^{\frac{1-n}{2}}}, \qquad R_v = \frac{2\zeta^{\frac{1+n}{2}}}{(1-n) - (1+n)\zeta}.$$

Pour que la relation entre R_0 et R_v soit algébrique, il faut et il suffit évidemment que n soit entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Quand il en est ainsi, il suffit d'introduire la variable u définie un peu plus haut pour que les expressions de R_0 et de R_v deviennent *rationnelles*. En conséquence : *les surfaces considérées et la relation entre leurs rayons principaux sont à la fois transcendantes ou algébriques; quand elles sont algébriques, la surface est unicursale et la relation entre les rayons principaux est du genre zéro.* En outre, d'après un raisonnement présenté plus haut (n° 13) et qui s'applique ici, les surfaces ont leurs *deux côtés analytiquement distincts.*

Les lignes $\zeta = \text{const.}$, *le long desquelles les rayons principaux restent constants, sont tracées sur des cônes de révolution,* comme le montre l'équation déjà formée

$$(38) \qquad \frac{z}{r} = \frac{(1-n)\zeta + 1 + n}{2n\sqrt{\zeta}},$$

dont le second membre se réduit à une constante dans l'hypothèse actuelle. Tous ces cônes ont leur sommet à l'origine; tous ont pour axe l'axe des z. Ils ne diffèrent les uns des autres que par leur angle.

Mentionnons encore un résultat relatif aux lignes de courbure planes ($\theta = \text{const.}$). Ces lignes sont représentées chacune dans son plan par les formules

$$r = \frac{2\zeta^{\frac{1+n}{2}}\cos n\theta}{\zeta+1}, \qquad z = \frac{\zeta^{\frac{n}{2}}[(1-n)\zeta + 1 + n]\cos n\theta}{n(\zeta+1)};$$

on déduit de là par différentiation (pour $d\theta = 0$)

$$\sqrt{dr^2 + dz^2} = \frac{\cos n\theta[(1-n)\zeta - (1+n)]\zeta^{\frac{n}{2}-1}d\zeta}{2(\zeta+1)},$$

ce qui montre que l'élément d'arc de ces lignes est une fraction rationnelle par rapport au paramètre $u = \sqrt[2\mu]{\zeta}$. Ainsi ces courbes planes, non seulement sont unicursales, mais ont leur *courbure rationnelle :* ce sont des *courbes de direction,* et leur rectification dépend simplement de l'intégration d'une fraction rationnelle, tandis qu'en général la rectification d'une courbe unicursale dépend d'une intégrale hyperelliptique.

17. Pour terminer, nous étudierons rapidement la surface particulière qui correspond à l'hypothèse $n = -2$. Si l'on introduit cette valeur dans l'équation (39) et qu'on effectue les calculs, on trouve

$$4r^2(r^2+z^2) - 4z(9r^2+8z^2)\cos 2\theta - 27r^2\cos^2 2\theta = 0.$$

C'est l'équation de la surface en coordonnées cylindriques. C'est aussi l'équation en coordonnées rectangulaires (r, z) des lignes de courbure planes dans leurs plans : ces lignes sont donc *du quatrième ordre.*

Pour avoir l'équation de la surface en coordonnées cartésiennes (x, y, z), il suffit de faire dans la relation précédente les substitutions

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad r^2\cos 2\theta = x^2 - y^2,$$

qui la transforment en celle-ci

$$4(x^2+y^2)^2(x^2+y^2+z^2) - 4z(9x^2+9y^2+8z^2)(x^2-y^2) - 27(x^2-y^2)^2 = 0.$$

Ainsi *la surface est du sixième degré.* Elle admet pour plans de symétrie les plans des zx et des zy; ses points à l'infini sont sur le cercle de l'infini et sur l'axe des z. Cet axe est une ligne double : en chacun de ses points le cône des tangentes se compose des deux plans $x^2 = y^2$.

Pour définir les lignes de courbure de la seconde famille ($\rho = \text{const.}$ ou $\eta = \text{const.}$) qui sont sphériques, introduisons l'hypothèse $n = -2$

dans les formules (36). Nous aurons ainsi

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}\arccos\xi} = \frac{-y}{\sin\frac{1}{2}\arccos\xi} = \frac{2\eta\sqrt{\xi\eta}}{\xi+\eta},$$

$$z_1 = z + \frac{\eta}{2} = -\eta\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta},$$

en transportant l'origine des coordonnées au centre de la sphère dont la cote, dans le système primitif, était $\rho = -\frac{\eta}{2}$.

Tirons ξ de la dernière équation pour le porter dans les deux premières préalablement élevées au carré, ce qui donne

$$\frac{2x^2}{1+\xi} = \frac{4\eta^3\xi}{(\xi+\eta)^2}, \qquad \frac{2y^2}{1-\xi} = \frac{4\eta^3\xi}{(\xi+\eta)^2}.$$

Nous trouvons de la sorte

$$2x^2 = \eta^2 - z_1 + \eta(\eta - z_1)^2, \qquad 2y^2 = \eta^2 - z_1^2 - \eta(\eta - z_1)^2.$$

De ces équations, combinées par voie d'addition et de soustraction, on tire

$$x^2 + y^2 + z_1^2 - \eta^2 = 0, \qquad x^2 - y^2 - \eta(z_1 - \eta)^2 = 0,$$

par où l'on vérifie d'abord que les lignes de courbure $\eta = \text{const.}$ sont sphériques. On voit, en outre, qu'elles sont tracées sur des cônes du second degré : ce sont donc des *biquadratiques sphériques*.

Si, dans les équations de ces biquadratiques, on remplace z_1 par $z + \frac{\eta}{2}$ et qu'on élimine η, on retrouve par un calcul facile l'équation du sixième ordre de la surface considérée.

Les expressions des rayons principaux, déduites des formules (40), sont ici

$$R_0 = \frac{3\zeta+1}{2\zeta\sqrt{\zeta}}, \qquad R_\rho = \frac{2}{(\zeta+3)\sqrt{\zeta}}.$$

En conséquence, R_0 et R_ρ sont liés par une relation du genre zéro et du cinquième ordre. Comme on a identiquement

$$4\frac{R_0}{R_\rho} = 3\left(\sqrt{\zeta}+\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)^2 + 4, \qquad R_0 + \frac{1}{R_\rho} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\zeta}+\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)^3,$$

l'élimination est immédiate et donne

$$27\,R_v(R_0R_v+1)^2-16(R_0-R_v)^3=0.$$

A raison de l'équation (38), le paramètre ζ ne peut devenir ni nul, ni négatif en un point réel de la surface, de sorte que les rayons principaux sont partout finis. Les ombilics, qui correspondent à la valeur $\zeta=-1$, sont les points du cercle imaginaire de l'infini.

Chaque ligne *d'égale courbure* ($\zeta=$ const.) est représentée par des équations de la forme

$$x=az\cos\theta,\qquad y=az\sin\theta,\qquad z=l\cos 2\theta.$$

C'est donc une courbe unicursale, située à la fois sur le cône de révolution

$$x^2+y^2=a^2z^2$$

et sur le conoïde du troisième ordre

$$\frac{z}{l}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

surface bien connue sous le nom de *cylindroïde*. Les lignes le long desquelles les deux rayons principaux restent constants sont donc des *sextiques* gauches; elles se projettent sur le plan des xy suivant des *rosaces à quatre branches*

$$r=al\cos 2\theta.$$

C'est aussi suivant une courbe de cette espèce que la surface est coupée par le plan des xy.