ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. VIVANTI

Démonstration d'un théorème sur les périodes de la fonction elliptique $\wp(u)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 2 (1885), p. 325-336

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__325_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME

SUR LES

PÉRIODES DE LA FONCTION ELLIPTIQUE $\wp u$,

PAR M. J. VIVANTI.

1. Dans un résumé des Leçons de M. Weierstrass sur les fonctions elliptiques, en cours de publication (1), on trouve un théorème important, qui peut être énoncé comme il suit :

Il y a un et un seul couple de périodes primitives 2Ω, $2\Omega'$ *de la fonction elliptique* $\wp u$, *qui remplit les conditions suivantes :*

I. $\wp\Omega = e$, $\wp\Omega' = e'$, e, e' *étant deux valeurs choisies arbitrairement parmi les racines* e, e', e'' *de l'équation cubique*

$$4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 = 0;$$

II. *La partie réelle de* $\dfrac{\Omega'}{\Omega i}$ *est positive;*

III. *Le parallélogramme, dont deux côtés contigus sont* Ω, Ω', *est divisé par sa diagonale plus courte en deux triangles acutangles* (2).

Nous nous proposons d'établir ce beau théorème d'une façon tout à fait élémentaire.

---

(1) *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass*, bearbeitet und herausgegeben von H.-A. Schwarz. Göttingen, Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W.-Fr. Kaestner), 1883, p. 32-33.

(2) Nous laissons de côté le cas-limite où $\wp u$ admet un couple de périodes primitives dont le rapport est purement imaginaire.

2. On sait (1) qu'il est toujours possible de trouver un couple de périodes primitives $2\omega, 2\omega'$, tel que la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ soit positive et même plus grande qu'un nombre assigné d'avance, par exemple plus grande que $\frac{1}{2}$.

Posons

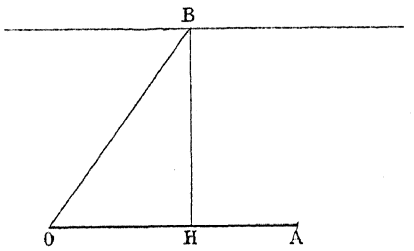
$$\frac{\omega'}{\omega} = r + is,$$

où

$$s > \tfrac{1}{2},$$

et soient OA, OB (*fig.* 1) les droites représentant respectivement ω

Fig. 1.



et ω' en grandeur et en direction. Si l'on mène BH perpendiculairement à OA, on obtient

$$BH = OB \sin \widehat{BOA};$$

or

$$OB = \mathrm{mod}\,\omega', \quad \sin \widehat{BOA} = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}} = \frac{s \,\mathrm{mod}\,\omega}{\mathrm{mod}\,\omega'};$$

donc

$$BH = s \,\mathrm{mod}\,\omega > \tfrac{1}{2} \,\mathrm{mod}\,\omega$$

ou bien

$$BH > \tfrac{1}{2} OA.$$

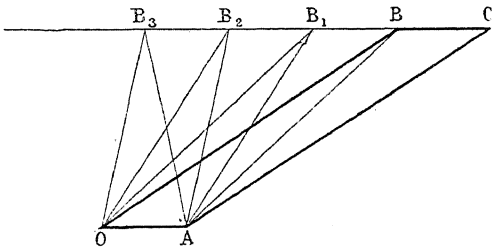
Il suit de là que, si l'on mène par B une droite parallèle à OA, les droites joignant un point quelconque de cette ligne avec O et A renferment en tous cas un angle aigu.

---

(1) *Voir* Ouvrage cité, p. 4.

Cela posé, soit OACB (*fig.* 2) un parallélogramme dont les côtés sont égaux respectivement à ω, ω'. Si les angles $\widehat{BAO}$, $\widehat{BOA}$ sont aigus, le couple 2ω, $2\omega'$ remplit la troisième condition du théorème. Si l'un d'eux, par exemple $\widehat{BAO}$, est obtus, qu'on prenne sur la CB prolongée

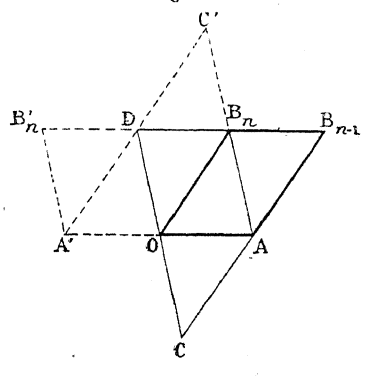
Fig. 2.



les segments BB_1, B_1B_2, ..., tous égaux à CB. Après un nombre fini d'opérations, on aboutira sans doute à un point B_n (dans la figure, $n=3$), tel que l'angle $\widehat{OAB_n}$ soit aigu et l'angle $\widehat{OAB_{n-1}}$ obtus. Alors l'angle AOB_n sera aigu et le parallélogramme $OAB_{n-1}B_n$ sera divisé par sa diagonale plus courte en deux triangles acutangles.

3. Du parallélogramme $OAB_{n-1}B_n$ on peut en déduire (*fig.* 3) deux

Fig. 3.



autres, OAB_nD, OB_nAC, ayant la même propriété; on les obtient en menant par O une droite DC parallèle à B_nA et en prolongeant les côtés $B_{n-1}B_n$, $B_{n-1}A$ du premier parallélogramme.

Les côtés de $OAB_{n-1}B_n$ sont

$$(a) \qquad OA = \omega, \quad OB_n = \omega' - n\omega;$$

ceux de OAB_nD sont

$$(b) \qquad OA = \omega, \quad OD = \omega' - (n+1)\omega;$$

ceux de OB_nAC sont

$$(c) \qquad OC = -OD = (n+1)\omega - \omega', \quad OB_n = \omega' - n\omega.$$

On obtient, en outre, trois autres parallélogrammes en renversant la direction de l'un des côtés de chaque parallélogramme précédemment considéré (1); les côtés de ces nouveaux parallélogrammes sont :

Pour $OA'DB_n$,

$$(d) \qquad OA' = -\omega, \quad OB_n = \omega' - n\omega;$$

pour $OA'B'_nD$,

$$(e) \qquad OA' = -\omega, \quad OD = \omega' - (n+1)\omega;$$

pour $ODC'B_n$,

$$(f) \qquad OD = \omega' - (n+1)\omega, \quad OB_n = \omega' - n\omega.$$

4. Désignons, en général, par Ω, Ω' les côtés de chaque parallélogramme; pour que la partie réelle de $\frac{\Omega'}{\Omega i}$ soit positive, on doit poser :

Dans le parallélogramme (a).....	$\Omega = \omega$,	$\Omega' = \omega' - n\omega$;
» » (b)	$\Omega = \omega$,	$\Omega' = \omega' - (n+1)\omega$;
» » (c).....	$\Omega = (n+1)\omega - \omega'$,	$\Omega' = \omega' - n\omega$;
» » (d)	$\Omega = \omega' - n\omega$,	$\Omega' = -\omega$;
» » (e)	$\Omega = \omega' - (n+1)\omega$,	$\Omega' = -\omega$;
» » (f).....	$\Omega = \omega' - n\omega$,	$\Omega' = \omega' - (n+1)\omega$.

Ces couples de côtés, pris dans l'ordre adbecf ou dans l'ordre beadcf,

(1) Dans la figure nous avons distingué par des traits discontinus les côtés de ces parallélogrammes qui n'appartiennent pas aux précédents.

suivant que n est pair ou impair, sont congrus, par rapport aux périodes de pu, respectivement aux six couples

$$\omega, \omega'; \ \omega', \omega; \ \omega, \omega'', \ \omega'', \omega; \ \omega', \omega''; \ \omega'', \omega',$$

où

$$\omega'' = \omega + \omega'.$$

Or, puisque

$$p\omega = e^{(\lambda)}, \quad p\omega' = e^{(\mu)}, \quad p\omega'' = e^{(\nu)},$$

où $e^{(\lambda)} e^{(\mu)} e^{(\nu)}$ est une permutation de $ee'e''$, parmi les six parallélogrammes considérés il y en aura nécessairement un dont les côtés satisferont aux conditions

$$p\Omega = e, \quad p\Omega' = e',$$

e, e' étant désignés d'avance.

5. Nous devons maintenant démontrer qu'il n'y a pas de couple de périodes primitives différent de 2Ω, $2\Omega'$ et de -2Ω, $-2\Omega'$ qui remplisse les conditions du théorème.

Si deux grandeurs ω, ω' satisfont aux équations

$$p\omega = e, \quad p\omega' = e',$$

elles ont nécessairement la forme

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \omega = \Omega + 2m\Omega + 2n\Omega' = (1 + 2m)\Omega + 2n\Omega', \\ \omega' = \Omega' + 2m'\Omega + 2n'\Omega' = 2m'\Omega + (1 + 2n')\Omega', \end{cases}$$

où m, n, m', n' sont des nombres entiers quelconques.

Pour que 2ω, $2\omega'$ soit un couple de périodes *primitives* de pu, il doit être

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + 2m & 2n \\ 2m' & 1 + 2n' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

et enfin, pour que la partie réelle de $\frac{\omega'}{\omega i}$ soit positive, il doit être $\Delta = +1$.

Nous devons donc chercher s'il y a un système de nombres m, n, m', n' (dont un au moins soit différent de zéro), liés par l'équation

$$(\beta) \qquad (1 + 2m)(1 + 2n') - 4m'n = 1,$$

tel que le parallélogramme (ω, ω') [1], ω et ω' étant donnés par les équations (α), soit divisé par sa diagonale plus courte en deux triangles acutangles.

6. Le nombre des cas à étudier est diminué considérablement par les remarques suivantes :

I. Deux couples 2ω, $2\omega'$ et -2ω, $-2\omega'$ satisfont ou ne satisfont pas ensemble à la troisième condition du théorème. Cela réduit à la moitié le nombre des cas. On peut, par exemple, laisser de côté tous les systèmes de nombres m, n, m', n', où l'un déterminé d'entre eux est négatif.

Nous conviendrons de ne donner à m' que des valeurs positives.

II. Si les nombres m, n, m', n' satisfont à l'équation (β), elle est satisfaite aussi par les nombres n', m', n, m. Donc, pour chaque couple (α), il y en a un autre

$$(\alpha') \qquad \overline{\omega} = (1 + 2n')\,\Omega + 2m'\Omega', \quad \overline{\omega}' = 2n\,\Omega + (1 + 2m)\,\Omega'.$$

Or, au point de vue géométrique, c'est-à-dire, tant qu'on ne tient pas compte de la grandeur Ω, Ω' et de la condition $s > \frac{1}{2}$, rien ne distingue Ω de Ω'; de façon que l'on peut désigner par Ω', Ω les mêmes côtés du parallélogramme (Ω, Ω') qu'on appelait d'abord Ω, Ω'. Après cela il sera

$$\overline{\omega} = \omega', \quad \overline{\omega}' = \omega.$$

C'est-à-dire, si le parallélogramme (ω, ω') se déduit de (Ω, Ω') par un certain procédé géométrique, on en déduira par le même procédé le parallélogramme $(\overline{\omega}, \overline{\omega}')$, pourvu seulement qu'on opère maintenant par rapport au côté Ω' de la même façon qu'on opérait auparavant par rapport au côté Ω, et inversement.

Si donc on a démontré géométriquement, à savoir, sans tenir compte de la grandeur de Ω, Ω' et de la condition $s > \frac{1}{2}$, que le parallélogramme (ω, ω') remplit ou ne remplit pas la troisième condition du théorème, on pourra regarder la même chose comme établie aussi pour le parallélogramme $(\overline{\omega}, \overline{\omega}')$. En d'autres termes, la considération d'un

[1] Nous désignons ainsi le parallélogramme dont deux côtés contigus sont ω, ω'.

système de nombres m, n, m', n' nous exempte de celle du système n', m', n, m.

III. Les nombres n, n' ont ou n'ont pas même signe, suivant que m est positif ou négatif (m' étant toujours supposé positif). Si l'on ne fait aucune hypothèse sur la grandeur de l'angle $\widehat{\Omega\Omega'}$, on peut prendre n toujours positivement.

IV. Si la valeur absolue de $(1 + 2m)$ est plus petite que $2m'$, la valeur absolue de $(1 + 2n')$ est plus grande que $2n$. Alors, en appliquant la remarque II de ce numéro, on obtient un système de nombres m_1, n_1, m'_1, n'_1, où

$$m_1 = n', \quad n_1 = m', \quad m'_1 = n, \quad n'_1 = m,$$

pour lesquels on a

$$\text{val. abs.}(1 + 2m_1) > 2m'_1.$$

On peut donc se passer de l'étude des systèmes où la valeur absolue de $(1 + 2m)$ est moindre que $2m'$; ou bien on peut toujours supposer

$$\text{val. abs.}(1 + 2m) > 2m'.$$

7. Ceci établi, nous pouvons entamer la démonstration de la deuxième partie de notre théorème.

Il nous faut avant tout énoncer un lemme, d'ailleurs tout à fait évident. Si les côtés contigus OA, OB du parallélogramme OACB (*fig.* 4, 5)

Fig. 4.

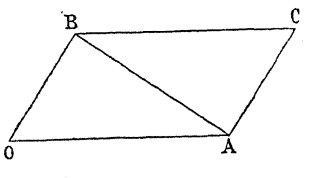
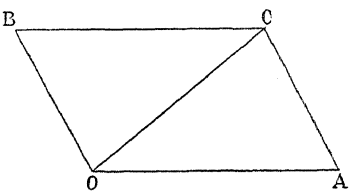


Fig. 5.



ont les directions de Ω, Ω', et si $OA = h\Omega$, $OB = k\Omega'$, où h, k sont des grandeurs positives, l'angle $\widehat{OAB}$ (de la *fig.* 4) ou $\widehat{AOC}$ (de la *fig.* 5) est certainement aigu si $h \gtrless k$; au contraire l'angle $\widehat{ABO}$ (de la *fig.* 4) ou $\widehat{ACO}$ (de la *fig.* 5) est certainement aigu si $k \gtrless h$.

Cela découle immédiatement du fait que le parallélogramme (Ω, Ω') est divisé par sa diagonale plus courte en deux triangles acutangles.

8. On peut ordonner comme il suit les cas dont il nous faut nous occuper :

(A) Les nombres m', n ne sont pas nuls $\begin{cases} 1^\circ\ m > 0 \begin{cases} (\alpha)\ \text{L'angle } \widehat{\Omega\Omega'} \text{ est aigu} \\ (\beta)\ \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{obtus} \end{cases} \\ 2^\circ\ m < 0. \end{cases}$

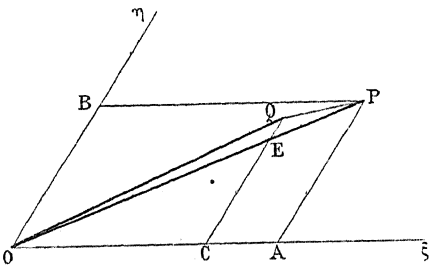
(B) L'un au moins des nombres m', n est nul.

9. (A) Les nombres m', n ne sont pas nuls.

1° $m > 0$. Soient $O\xi$, $O\eta$ (*fig.* 6) les directions de Ω, Ω', et faisons

$$OA = (1 + 2m)\,\Omega, \quad OC = 2m'\Omega < OA, \quad AP = 2n\,\Omega', \quad CQ = (1 + 2n')\,\Omega'.$$

Fig. 6.



Si OP coupe CQ au point E, on a

$$CE = \frac{AP \cdot OC}{OA} = \frac{2n \cdot 2m'}{1 + 2m}\,\Omega' < (1 + 2n')\,\Omega',$$

de façon que Q est sur le prolongement de CE. D'ailleurs de (β) et de l'inégalité

$$1 + 2m > 2m'$$

on tire

$$2m'(1 + 2n' - 2n) < 1,$$

c'est-à-dire

$$2n > 1 + 2n',$$

d'où

$$AP > CQ.$$

Donc Q est dans l'intérieur du triangle OBP.

Il nous faut maintenant distinguer les cas (α), (β).

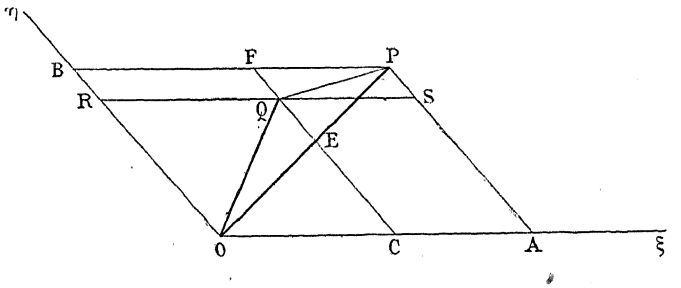
(α). Si l'angle $\widehat{\Omega\Omega'}$ est aigu (*fig.* 6), l'angle $\widehat{OBP}$ est obtus, et $\widehat{OQP}$ l'est à plus forte raison. Donc le parallélogramme dont les côtés sont

$$OP = (1 + 2m)\,\Omega + 2n\Omega' = \omega, \quad OQ = 2m'\Omega + (1 + 2n')\,\Omega' = \omega'$$

ne remplit pas la troisième condition du théorème.

(β). L'angle $\widehat{\Omega\Omega'}$ est obtus (*fig.* 7). Si $2m' > 1 + 2n'$, en appliquant

Fig. 7.



au parallélogramme OCQR le lemme du n°7, on voit que l'angle $\widehat{RQO}$ est aigu; donc l'angle $\widehat{OQP}$, qui est plus grand que $180° - \widehat{RQO}$, est obtus.

Soit au contraire $2m' < 1 + 2n'$. De la relation (β) on tire

$$1 + 2m - 2m' = \frac{4m'n + 1}{2n' + 1} - 2m' = \frac{2m'}{2n' + 1}(2n - 2n') - \frac{2m' - 1}{2n' + 1},$$

et, comme

$$2m' < 1 + 2n', \quad 2n > 2n',$$

il sera

$$1 + 2m - 2m' < 2n - 2n' - \frac{2m' - 1}{2n' + 1} \leqq 2n - 2n' - 1.$$

En appliquant donc au parallélogramme QSPF le lemme déjà cité, on voit que l'angle $\widehat{PQF}$ est aigu; d'où il suit que l'angle $\widehat{PQO}$, qui est plus grand que $180° - \widehat{PQF}$, est obtus.

Donc le parallélogramme (OP, OQ) ne remplit pas la troisième condition du théorème.

10. 2° $m<0$ (1). — Soit encore (*fig.* 8)

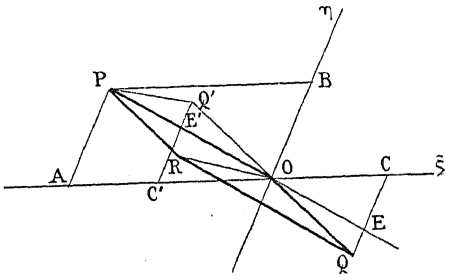
$$OA=(1+2m)\Omega,\quad OC=2m'\Omega<\mathrm{mod}\,OA,\quad OB=2n\Omega',\quad CQ=(1+2n')\Omega'.$$

On démontre, comme dans le cas précédent, que

$$AP>\mathrm{mod}\,CQ,\quad \mathrm{mod}\,CQ>\mathrm{mod}\,CE.$$

Prenons sur OA le segment $OC'=CO$; par C′ menons C′E′Q′ parallèle à OB et faisons $C'Q'=QC$. Le point Q′ sera sur le prolongement de QO, et les segments QO, OQ′ seront égaux. Achevons de construire

Fig. 8.



le parallélogramme OPRQ des nouvelles périodes ω, ω′. Il est aisé de voir que les triangles ORP, PQ′O sont égaux; donc $\widehat{ORP}=\widehat{PQ'O}$. Or $\widehat{PQ'O}$ n'est autre chose que l'angle $\widehat{PQO}$ du numéro précédent, et conséquemment il est obtus; donc l'angle $\widehat{ORP}$ l'est aussi; et OPRQ n'est pas divisé par OR en deux triangles acutangles.

11. (B) L'un au moins des nombres m', n est nul. La (β) se réduit à

$$(1+2m)(1+2n')=1,$$

Cette équation admet deux solutions, à savoir

$$m=n'=0,\quad m=n'=-1.$$

---

(1) Il n'y a pas lieu de considérer le cas $m=0$, parce que nous sommes convenus de lui donner toujours des valeurs telles qu'il soit

$$\text{val. abs.}\,(1+2m)>2m',$$

ce qui n'est pas possible, tant que m' n'est pas nul, si $m=0$.

Ainsi le cas (B) donne naissance aux six cas suivants :

Cas.	m.	n.	m'.	n'.
(a)	0	0	0	0
(b)	0	n	0	0
(c)	0	0	m'	0
(d)	-1	0	0	-1
(e)	-1	n	0	-1
(f)	-1	0	m'	-1

Le cas (a) donne : $\omega = \Omega$, $\omega' = \Omega'$. Il n'y a donc pas à s'en occuper.

(b) se réduit à (c), (e) à (f) en vertu de la remarque II du n° 6.

(d) se réduit à (a), (f) à (c) en vertu de la remarque I du même numéro.

Tout se réduit donc au seul cas (c), à savoir :

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = 2m'\Omega + \Omega'.$$

12. Soit OACB le parallélogramme (Ω, Ω'), où, si l'angle $\widehat{\Omega\Omega'}$ est aigu (*fig.* 9)

$$OA = \Omega, \quad OB = \Omega',$$

s'il est obtus (*fig.* 10)

$$AO = \Omega, \quad AC = \Omega'.$$

On sait que les triangles AOB, BAC sont acutangles. Prenons sur le

Fig. 9.

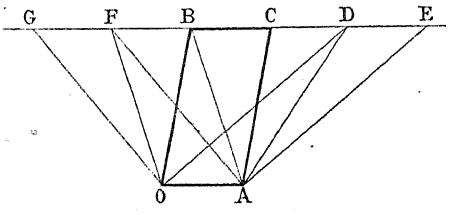
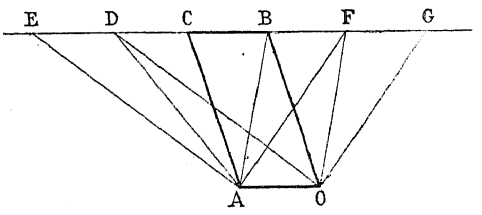


Fig. 10.



prolongement de BC les segments CD, DE égaux à BC. Comme l'angle $\widehat{OAC}$ est obtus, l'angle $\widehat{OAD}$ l'est à plus forte raison, et le parallélogramme OAED, c'est-à-dire (ω, ω'), où (1)

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \pm 2\Omega,$$

(1) Ici et dans la suite le signe supérieur se rapporte à la *fig.* 9, l'inférieur à la *fig.* 10.

n'est pas divisé par AD en deux triangles acutangles. La même chose résulte *a fortiori* pour les parallélogrammes dont les côtés sont :

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \pm 4\Omega,$$
$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \pm 6\Omega,$$
$$\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Prenons maintenant sur le prolongement de CB les segments BF, FG égaux à CB. Comme l'angle $\widehat{BAO}$ est aigu, son supplément, c'est-à-dire $\widehat{AOF}$, sera obtus, et le parallélogramme OAFG, dont les côtés ω, ω' sont

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \mp 2\Omega,$$

ne sera pas divisé par sa diagonale plus courte OF en deux triangles acutangles. La même chose s'ensuivra *a fortiori* pour les parallélogrammes dont les côtés sont :

$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \mp 4\Omega,$$
$$\omega = \Omega, \quad \omega' = \Omega' \mp 6\Omega,$$
$$\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous pouvons donc regarder notre théorème comme parfaitement établi dans tous les cas.