ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GOMES TEIXEIRA

Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 2 (1885), p. 321-324

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__321_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

SATISFAISANT

A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE,

PAR M. GOMES TEIXEIRA,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COIMBRE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PORTO.

La série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2, ... *représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à* x, y *et* y' *à coefficients entiers*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

s'il existe une valeur de n *déterminée à partir de laquelle les dénominateurs de* a_{n+1}, a_{n+2}, ... *contiennent des facteurs premiers supérieurs respectivement à* $n+1$, $n+2$, $n+3$, ...

On peut tirer ce théorème de la formule suivante, qui résulte de l'expression analytique de la dérivée d'ordre n des fonctions composées, et qui donne la dérivée d'ordre n de la fonction y (*Journal de Battaglini*, t. XVIII):

$$\sum \frac{(y')^{\alpha}(y'')^{\beta}(y''')^{\gamma}\ldots(y^{(n-1)})^{\lambda}(y'')^{\alpha'}(y''')^{\beta'}\ldots(y^{(n-1)})^{\omega'}(y^{(n)})^{\lambda'}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta'!\ldots\lambda'!(2!)^{\beta+\beta'}(3!)^{\gamma+\gamma'}\ldots(n-1!)^{\lambda+\lambda'}\alpha''!}\,\frac{d^m F}{dx^a dy^b dy'^c} = 0. \tag{3}$$

Dans cette équation la somme Σ se rapporte à toutes les solutions

entières positives de l'équation

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+(n-1)\lambda+\alpha'+2\beta'+3\gamma'+\ldots \\ \qquad\qquad +(n-1)\lambda'+\alpha''=n-1, \end{cases}$$

et l'on a posé

$$(5)\qquad \begin{cases} m=\alpha+\beta+\ldots+\lambda+\alpha'+\beta'+\ldots+\lambda'+\alpha'', \\ a=\alpha+\beta+\ldots+\lambda, \quad b=\alpha'+\beta'+\ldots+\lambda', \quad c=\alpha''. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\sum \frac{(2!)^{\alpha'}3^{\beta'}4^{\gamma'}\ldots n^{\lambda'}(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{2!}\right)^{\beta+\alpha'}\ldots\left(\frac{y^{(n-1)}}{n-1!}\right)^{\lambda+\omega'}\left(\frac{y^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta!\ldots\lambda'!\alpha''!}\frac{d^m\mathrm{F}}{dx^a dy^b dy'^c}=0$$

ou, en séparant le terme qui contient $y^{(n)}$,

$$\sum \frac{(2!)^{\alpha'}3^{\beta'}4^{\gamma'}\ldots(n-1)^{\omega'}(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{2!}\right)^{\beta+\alpha'}\ldots\left(\frac{y^{(n-1)}}{n-1!}\right)^{\lambda+\omega'}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta'!\ldots\lambda'!\alpha''!}\frac{d^m\mathrm{F}}{dx^a dy^b dy'^c}+n\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\frac{y^{(n)}}{n!}=0.$$

Si l'on pose maintenant $x=0$ dans cette formule, on obtient une autre formule qui donne les valeurs de $y'_0, \frac{y''_0}{2!}, \ldots \frac{y^{(n)}_0}{n!}$, qui doivent coïncider avec les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la série proposée.

On voit par cette formule que le dénominateur de $\frac{y^{(n)}_0}{n!}$ ne peut contenir que les facteurs premiers suivants:

1° Ceux qui résultent du dénominateur

$$\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta'!\ldots\lambda'!\alpha''!;$$

2° Ceux qui résultent du dénominateur de

$$\left(\frac{d^m\mathrm{F}}{dx^a dy^b dy'^c}\right)_{x=0};$$

3° Ceux qui résultent du numérateur de

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\right)_{x=0};$$

4° Ceux qui résultent des dénominateurs de $y'_0, \frac{y''_0}{2!}, \ldots, \frac{y'^{(n-1)}_0}{n-1!}$;

5° Ceux qui résultent de n.

Nous allons voir que les facteurs premiers correspondant aux trois premiers cas n'augmentent pas indéfiniment avec n.

I. Comme la fonction $F(x, y, y')$ est entière par rapport à x, y et y', les dérivées de cette fonction d'ordre supérieur à son degré sont nulles, et par conséquent m ne peut pas augmenter indéfiniment. Donc les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \alpha', \beta', \ldots \lambda', \alpha''$, dont la somme est égale à m, ne peuvent augmenter indéfiniment, ni par conséquent leurs facteurs premiers.

II. La dérivée

$$\left(\frac{d^m F}{dx^a dy^b dy'^c}\right)_{x=0},$$

qui est fonction entière de y_0 et y'_0 et, par conséquent, de a_0 et a_1, ne peut contenir évidemment en dénominateur que les facteurs premiers qui entrent dans les dénominateurs de a_0 et a_1.

III. La dérivée $\left(\frac{dF}{dy'}\right)_{x=0}$, qui est une fonction entière à coefficients entiers de a_0 et a_1, est une fraction déterminée, et ne peut donc contenir en numérateur des facteurs premiers qui augmentent indéfiniment.

On voit donc que les facteurs premiers du dénominateur de $\frac{y^{(n)}_0}{n!}$ ou a_n ne peuvent augmenter indéfiniment que par suite de la présence du facteur n du cinquième cas, et nous avons donc le théorème énoncé.

Exemple. — La fonction définie par la série

$$1 + \frac{x}{2!\,2} + \frac{x^2}{3!\,3} + \ldots + \frac{x^n}{n+1!\,n+1}$$

ne peut pas satisfaire à une équation $F(x, y, y') = 0$ algébrique par rapport à x, y et y', parce que le coefficient $\frac{1}{n+1!\,n+1}$ de x^n peut contenir des facteurs premiers supérieurs à n.

Donc la fonction correspondante

$$\frac{\int \frac{e^x}{x} dx + \log x}{x}$$

ne peut satisfaire à une équation algébrique en x, y et y'. Elle est donc différente des fonctions algébriques, logarithmiques, circulaires, etc.