ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GUICHARD

Sur les fonctions entières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 1 (1884), p. 427-432

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__427_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR

LES FONCTIONS ENTIÈRES,

PAR M. GUICHARD,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

1. *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une suite ayant le seul point ∞ comme point limite. On peut former une fonction entière, prenant en ces points des valeurs données $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

Soient $f(z)$ une fonction ayant les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\varphi(z)$ une fonction méromorphe ayant les pôles $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et pour résidus correspondants $\frac{b_1}{f'(a_1)}, \frac{b_2}{f'(a_2)}, \ldots, \frac{b_n}{f'(a_n)}$.

$\varphi(z)$ est de la forme

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{z - a_n} \frac{b_n}{f'(a_n)} + P_n(z) \right] + R(z),$$

P_n étant un polynôme, $R(z)$ une fonction holomorphe.

Le produit

$$\varphi(z) f(z) = G(z)$$

satisfait aux conditions de l'énoncé.

Les autres solutions se mettent sous la forme

$$G(z) + \lambda(z) f(z),$$

λ étant holomorphe.

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes :

1° Soit $z = 0$ le point limite d'une suite simplement infinie, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On peut former une fonction uniforme ayant le seul point

singulier $z = 0$, et prenant aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des valeurs données $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

2° Soit $z = 0$ le point limite d'une suite n fois infinie, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On peut former une fonction uniforme ayant un seul point singulier d'ordre n, le point $z = 0$, et prenant en $a_1, a_2, \ldots$ des valeurs données $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

2. *Soient* G *et* G_1 *deux fonctions entières premières entre elles (n'ayant aucun zéro commun). On peut déterminer deux fonctions entières* λ *et* μ *satisfaisant à la relation*

$$G(z) + \lambda(z) G_1(z) = e^{\mu(z)}.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros de $G_1(z)$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les valeurs de $G(z)$ en ces points.

Formons une fonction $\mu(z)$, prenant en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs $Lb_1, Lb_2, \ldots, Lb_n$.

La différence

$$e^{\mu(z)} - G(z)$$

s'annule aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$; donc elle est divisible par $G_1(z)$.

Corollaire. — Posons $A = e^{-\mu(z)}$, $B = \lambda(z) e^{-\mu(z)}$, on aura alors

$$AG + BG_1 = 1,$$

relation analogue à celle du théorème d'Euler pour les polynômes.

Les autres fonctions holomorphes A_1 et B_1 satisfaisant à cette relation sont de la forme

$$A_1 = A + RG_1,$$
$$B_1 = B - RG,$$

R étant une fonction holomorphe quelconque.

3. *Soient* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *une suite ayant le seul point limite* $z = \infty$, *il existe une fonction entière* $G(z)$, *prenant en ces points des valeurs données* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *et dont la dérivée* $G'(z)$ *prend, aux mêmes points, des valeurs* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *données à l'avance.*

J'appelle $f(z)$ une fonction holomorphe qui admet comme zéros simples les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\varphi(z)$ l'une des fonctions holomorphes

qui prend en ces points des valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_n$. On devra avoir

$$G(z) = \varphi(z) + \lambda(z) f(z),$$

d'où

$$G'(z) = \varphi'(z) + \lambda(z) f'(z) + \lambda'(z) f(z).$$

Assujettissons la fonction λ à prendre aux points a_n les valeurs

$$\frac{c_n - \varphi'(a_n)}{f'(a_n)}.$$

La fonction $G(z)$ est alors une des solutions.

Toutes les autres sont de la forme

$$G_1(z) = G(z) + \lambda(z) f^2(z).$$

On peut maintenant choisir λ de façon que $G_1''(z)$ prenne aux points a_1, $a_2, \ldots, a_n$ des valeurs données $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Toutes les fonctions $G(z)$, satisfaisant à cette triple condition, diffèrent de multiples de $f^3(z)$. Elles sont de la forme

$$G(z) + \lambda(z) f^3(z).$$

On peut choisir λ de façon que leur dérivée troisième prenne aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des valeurs données $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$.

Corollaire. — On en déduit comme cas particulier : il existe une fonction $G(z)$ prenant en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et dont la dérivée prend aux points $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des valeurs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Les deux suites (a) et (b) ayant le seul point limite $z = \infty$.

4. *Une fonction entière, n'ayant pas de zéros doubles, satisfait à une équation différentielle de la forme*

$$\frac{d^2y}{dz^2} = P\frac{dy}{dz} + Qy, \tag{1}$$

P *et* Q *étant des fonctions entières de* z.

En effet, soit $G(z)$ une fonction holomorphe, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ses zéros

supposés simples. Formons une fonction P qui, en ces points, prenne les valeurs

$$\frac{G''(a_1)}{G'(a_1)},\ \frac{G''(a_2)}{G'(a_2)},\ \ldots.$$

La différence $G''(z) - G'(z) \times P$ est divisible par $G(z)$; en appelant Q le quotient, on a la relation (1).

Toutes les fonctions satisfaisant à cette relation sont

$$P_1 = P + \lambda G,$$
$$Q_1 = Q - \lambda G'.$$

On peut encore donner aux polynômes P et Q une autre forme.

G et G′ étant premier entre eux, on peut trouver deux fonctions A et B tels que

$$AG' + BG = 1;$$

d'où

$$P = AG'' + \lambda G,$$
$$Q = BG'' - \lambda G',$$

d'où

$$BP - AQ = \lambda.$$

Sous cette forme, on voit qu'on peut choisir λ de manière que P et Q soient premiers entre eux. Il suffit pour cela de prendre λ premier avec G″.

5. *Équations du troisième ordre auxquelles peut satisfaire une fonction entière n'ayant pas de zéros doubles.*

Soit $G(z)$ une fonction satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = P\frac{dy}{dz} + Qy.$$

Elle satisfait à l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dz^3} = P\frac{d^2y}{dz^2} + (P' + Q)\frac{dy}{dz} + Q'y.$$

Supposons qu'elle satisfasse à une autre équation

$$\frac{d^3y}{dz^3} = A\frac{d^2y}{dz^2} + B\frac{dy}{dz} + Cy,$$

on aura

$$(A-P)\frac{d^2y}{dz^2}+(B-P'-Q)\frac{dy}{dz}+(C-Q')y=1,$$

d'où

$$[P(A-P)+(B-P'-Q)]\frac{dy}{dz}+[Q(A-P)+C-Q']y=0.$$

G et G′ étant premiers entre eux,

$$B=-P(A-P)+P'+Q+\lambda G,$$
$$C=-Q(A-P)+Q'-\lambda G',$$

équation qui contient deux indéterminées λ et A.

6. *Deux fonctions entières* G *et* G_1, *n'ayant pas de zéros doubles, satisfont à une même équation différentielle, linéaire, à coefficients entiers du troisième ordre*

$$\frac{d^3y}{dz^3}=A\frac{d^2y}{dz^2}+B\frac{dy}{dz}+Cy. \tag{1}$$

En effet, soient P, Q, P_1, Q_1 les fonctions satisfaisant aux relations

$$G''=PG'+QG,$$
$$G_1''=P_1G_1'+Q_1G_1.$$

Si G satisfait à (1), on doit avoir

$$B=-P(A-P)+P'+Q+\lambda G,$$
$$C=-Q(A-P)+Q'-\lambda G'.$$

Si G_1 satisfait à la même équation, on aura

$$B=-P_1(A-P_1)+P_1'+Q_1+\lambda_1G_1,$$
$$C=-Q_1(A-P_1)+Q_1'-\lambda_1G_1'.$$

En égalant les valeurs de B et C, on a deux équations du premier degré pour déterminer λ et λ_1. Le dénominateur commun est

$$GG_1'-G_1G'.$$

Le numérateur de λ contient A au premier degré; on pourra donc

choisir A de façon que le numérateur ait les mêmes zéros que le dénominateur; λ étant entier, il en est de même de B et C, et par suite de λ_1.

La démonstration ne subsiste pas dans les deux cas suivants :

1° $GG'_1 - G_1G'$ est identiquement nul;

2° Le coefficient de A, dans le numérateur de λ, n'est pas premier avec $GG'_1 - G_1G'$.