ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

OLIVIER DEBARRE

Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 25, n° 6 (1992), p. 687-708

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1992_4_25_6_687_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 25, 1992, p. 687 à 708.

LE LIEU DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES DONT LE DIVISEUR THÊTA EST SINGULIER A DEUX COMPOSANTES

PAR OLIVIER DEBARRE

Un diviseur thêta d'une variété abélienne complexe principalement polarisée générique est lisse. Plus précisément, Andreotti-Mayer et Beauville ont montré que dans l'espace des modules $\mathscr{A}_g$ des variétés abéliennes complexes principalement polarisées de dimension g, celles dont les diviseurs thêta sont singuliers forment un diviseur $\mathscr{N}_g$.

Les variétés abéliennes principalement polarisées pour lesquelles un diviseur thêta symétrique contient un point d'*ordre deux* de multiplicité *paire* forment une composante *irréductible* $\theta_{\text{null},g}$ de $\mathscr{N}_g$ ([F], proposition 3.3). Or pour $g \geqq 4$, la jacobienne d'une courbe générique de genre g est dans $\mathscr{N}_g$, mais pas dans $\theta_{\text{null},g}$. Il en résulte que $\mathscr{N}_g$ a au moins deux composantes irréductibles pour $g \geqq 4$.

Nous obtenons ici le résultat suivant, conjecturé par Smith et Varley dans [SV1] : *pour tout* $g \geqq 4$, le diviseur $\mathscr{N}_g$ *a exactement deux composantes irréductibles notées* $\theta_{\text{null},g}$ *et* $\mathscr{N}'_g$. *Tout diviseur thêta symétrique d'un élément générique de* $\mathscr{N}'_g$ *a exactement deux points doubles ordinaires opposés.* Ces résultats sont dus à Beauville ([B]) pour $g=4$ (le diviseur $\mathscr{N}'_4$ correspond aux jacobiennes des courbes de genre 4) et à Smith et Varley ([SV2]) pour $g=5$ (le diviseur $\mathscr{N}'_5$ correspond aux jacobiennes intermédiaires des solides doubles quartiques avec 5 points doubles). Ils sont complétés par un théorème de Teixidor, qui entraîne qu'un diviseur thêta d'un élément générique de $\theta_{\text{null},g}$ a exactement un point singulier, qui est double ordinaire ([Te], theorem 2.17).

Notre démonstration utilise des techniques développées dans [M1]. Mumford étudie l'adhérence de $\mathscr{N}_g$, notée encore $\mathscr{N}_g$, dans une compactification partielle convenable $\mathscr{A}_g^*$ de $\mathscr{A}_g$ obtenue en ajoutant un diviseur à l'infini $\partial\mathscr{A}_g$. Il assigne des multiplicités à ses composantes et montre qu'on peut écrire $\mathscr{N}_g = \theta_{\text{null},g} + 2\mathscr{N}'_g$. Il s'agit de montrer que $\mathscr{N}'_g$ est irréductible. L'idée consiste à regarder la trace $\partial\mathscr{N}_g$ de l'adhérence de $\mathscr{N}_g$ sur le diviseur $\partial\mathscr{A}_g$. La démonstration comporte deux étapes :

(i) toute composante de $\mathscr{N}'_g$ passe par un certain point P_0 de la frontière $\partial\mathscr{A}_g$,

(ii) $\mathscr{N}'_g$ est localement irréductible en P_0.

1. C.N.R.S., U.R.A. D 0752, Géométrie Algébrique et Arithmétique, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France, et University of Iowa, Iowa City, IA 52242, U.S.A. L'auteur est partiellement financé par le E.E.C. Science Project « Geometry of Algebraic Varieties ».

Pour montrer le premier point, on remarque tout d'abord que toute composante de $\mathcal{N}_g$ rencontre la frontière $\partial\mathcal{A}_g$ (premier pas de § 2). Il existe un morphisme $p : \partial\mathcal{A}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$ dont la fibre au-dessus d'un point générique (A, θ) de $\mathcal{A}_{g-1}$ est isomorphe au quotient de A par le groupe $\mathrm{Aut}(A, \theta)$ des automorphismes de A respectant un représentant symétrique de la polarisation θ (ce groupe est $\{-1, 1\}$ pour (A, θ) générique). Mumford montre (*loc. cit.* p. 364) que la frontière $\partial\mathcal{N}_g$ de $\mathcal{N}_g$ est un *diviseur* de $\partial\mathcal{A}_g$ qui se scinde en :

– d'une part $\partial''\mathcal{N}'_g = p^{-1}(\mathcal{N}'_{g-1})$, qu'on suppose irréductible moyennant une hypothèse de récurrence,

– d'autre part une famille $\partial'\mathcal{N}'_g$ dont toutes les composantes dominent $\mathcal{A}_{g-1}$. La fibre de $p : \partial'\mathcal{N}'_g \to \mathcal{A}_{g-1}$ au-dessus d'un point (A, θ) hors de $\mathcal{N}_{g-1}$ est l'image dans $A/\mathrm{Aut}(A, \theta)$ d'une réunion $c'(A, \theta)$ de composantes du diviseur :

$$c(A, \theta) = \{ a \in A \mid \Theta . \Theta_a \text{ est singulier } \},$$

où Θ est un diviseur thêta quelconque représentant la polarisation θ,

– d'autre part enfin la frontière de $\theta_{\mathrm{null}, g}$.

On montre dans un deuxième pas l'irréductibilité de $\partial'\mathcal{N}'_g$. Elle découle du résultat suivant, dont la démonstration fait l'objet de la première partie : *pour une variété abélienne principalement polarisée générique* (A, θ) *de dimension* $g \geqq 2$, *le morphisme* $\Theta/\pm 1 \to \mathbf{P}\,T_0 A$ *induit par l'application de Gauss* $\mathcal{G}$ (qui à tout point x d'un diviseur Θ *symétrique* représentant la polarisation θ associe l'espace tangent à Θ en x, translaté en 0) *a pour groupe de Galois le groupe symétrique* (sur l'ensemble à $g!/2$ éléments). En effet, ce résultat entraîne que $c(A, \theta) = \{ a \in A \mid \exists x \in \Theta\ \mathcal{G}(x) = \mathcal{G}(x - a) \}$ a deux composantes pour (A, θ) générique, dont l'une est $c'(A, \theta) = \partial'\mathcal{N}'_g \cap p^{-1}(A, \theta)$. Le principe 1.3 permet de conclure à l'irréductibilité de $\partial'\mathcal{N}'_g$.

On montre ensuite (troisième et quatrième pas) que $\partial\mathcal{N}'_g$ ne contient aucune composante de la frontière de $\theta_{\mathrm{null}, g}$. Il s'ensuit que $\partial\mathcal{N}'_g$ a exactement deux composantes, $\partial'\mathcal{N}'_g$ et $\partial''\mathcal{N}'_g$, donc que toute composante de $\mathcal{N}'_g$ contient un point générique P_0 de $\partial'\mathcal{N}'_g \cap \partial''\mathcal{N}'_g$. Un calcul local (cinquième pas) permet alors de montrer que $\mathcal{N}_g$ est localement irréductible en P_0, ce qui termine la démonstration de l'irréductibilité de $\mathcal{N}'_g$.

Il reste à montrer que pour un point générique de $\mathcal{N}'_g$, un diviseur thêta symétrique n'a que deux points doubles ordinaires opposés. Pour cela, on montre dans un sixième (et dernier) pas que c'est le cas au-dessus d'un point générique de $\partial'\mathcal{N}'_g$ (ce qui signifie que, pour a générique dans $c'(A, \theta)$ et tout diviseur symétrique Θ représentant θ, l'intersection $\Theta . \Theta_a$ a exactement deux points singuliers s et $a - s$). Une propriété de non-ramification permet alors de conclure.

Une courte dernière partie est consacrée à une description partielle de l'intersection des deux composantes de $\mathcal{N}_g$. En dimension 4, il est bien connu que cette intersection est irréductible non réduite. On montre que la situation se complique pour $g \geqq 5$: *l'intersection* $\theta_{\mathrm{null}, g} \cap \mathcal{N}'_g$ n'est *ni irréductible, ni réduite*. Les composantes non réduites correspondent au cas où les points singuliers s et $-s$ d'un diviseur thêta symétrique d'un élément de $\mathcal{N}'_g$ deviennent égaux (s est alors d'ordre 2), les autres au cas où apparaît, en sus de s et $-s$, un autre point singulier, d'ordre 2.

Dans tout cet article, le corps de base est le corps des nombres complexes.

L'auteur remercie le referee de l'avoir conseillé dans la réorganisation de cet article et de lui avoir signalé les erreurs et omissions d'une première rédaction.

1. Le groupe de Galois de l'application de Gauss d'un diviseur thêta générique

Une bonne référence pour les quelques notions relatives à un morphisme *surjectif plat à fibres finies* $f: X \to Y$ que nous allons maintenant rappeler est [T]. La *ramification* $R(f)$ (ou lieu critique) est par définition le sous-schéma de X défini par l'idéal de Fitting $F_0(\Omega_{X/Y})$; il *commute aux changements de base*. Lorsque f est de plus *fini*, on définit son *discriminant* $\Delta(f)$ comme le sous-schéma de Y associé au faisceau d'idéaux $F_0(f_* \mathcal{O}_{R(f)})$. Il est supporté par un diviseur de Y et *commute* aussi *aux changements de base*. Lorsque X et Y sont lisses, tout revêtement (c'est-à-dire tout morphisme fini surjectif) $f: X \to Y$ est automatiquement plat et $R(f)$ et $\Delta(f)$ sont des diviseurs sur X et Y respectivement (*i.e.* sont localement principaux).

Nous utiliserons la notion suivante:

DÉFINITION 1.1. — *Un revêtement plat sera dit ordinaire si son discriminant est irréductible et génériquement réduit.*

Lorsque X et Y sont lisses, un revêtement $f: X \to Y$ est donc ordinaire lorsque:

(i) $R(f)$ est irréductible,

(ii) l'indice de ramification d'un point générique de $R(f)$ est 2,

(iii) la restriction de f à $R(f)$ est de degré un sur son image.

Un résultat de connexité de Lazarsfeld permet de montrer:

PROPOSITION 1.2. — *Soit* X *une variété lisse et* $f: X \to \mathbf{P}^n$ *un revêtement ordinaire de degré d. Alors le groupe de Galois* G *de f est le groupe symétrique* $\mathbf{S}_d$,

◆ Les propriétés (ii) et (iii) entraînent ([H], lemma p. 698) que G contient une transposition. Il suffit donc de montrer que G est 2-transitif. Le schéma $X \times_{\mathbf{P}^n} X$ est connexe ([L], sketch of proof of (1.3), p. 156), localement intersection complète dans $X \times X$, donc connexe en codimension 1 ([Ha], theorem 3.4). Or le lieu singulier de $X \times_{\mathbf{P}^n} X$ est contenu dans $R(f) \times_{\mathbf{P}^n} R(f)$. L'hypothèse (iii) assure que les seules composantes de codimension 1 de ce lieu singulier sont celles de l'image Δ_R de $R(f)$ dans la diagonale Δ_X de $X \times_{\mathbf{P}^n} X$. Pour toute décomposition $X \times_{\mathbf{P}^n} X = C \cup C'$, où C et C′ sont des réunions de composantes irréductibles distinctes de $X \times_{\mathbf{P}^n} X$, l'intersection $C \cap C'$ est donc contenue dans Δ_R et de même dimension. L'hypothèse (i) entraîne $C \cap C' = \Delta_R$. L'hypothèse (ii) assure qu'en un point générique z de $R(f)$, l'application f s'écrit en coordonnées analytiques locales $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^2, x_2, \ldots, x_n)$. Le schéma $X \times_{\mathbf{P}^n} X$ a alors pour équations locales $(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = x_2 - y_2 = \ldots = x_n - y_n = 0$ dans $X \times X$ au voisinage du point correspondant (z, z) de Δ_R, donc n'a que deux branches en ce point. La variété $(X \times_{\mathbf{P}^n} X) - \Delta_X$ est donc irréductible, ce qui prouve que G est 2-transitif. ◆

Avant de commencer la démonstration proprement dite, énonçons un principe élémentaire qui nous servira à plusieurs reprises, et dont nous laissons la démonstration au lecteur :

PRINCIPE D'IRRÉDUCTIBILITÉ 1.3. — *Soit $f: X \to Y$ un morphisme de schémas. On suppose que Y est irréductible, que toutes les composantes de X ont la même dimension, que les fibres fermées de f ont toutes même dimension et que la fibre générique est irréductible. Alors X est irréductible.*

Soit maintenant (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension g. On choisit un diviseur Θ *symétrique* représentant la polarisation θ. Il est lisse ([AM], proposition 6 ii, p. 203) et l'application de Gauss $\mathcal{G}: \Theta \to \mathbf{P}\,T_0^* A \simeq \mathbf{P}^{g-1}$ définie dans l'introduction est finie de degré $g!$. Elle se factorise en :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}: \Theta & \longrightarrow & \mathbf{P}^{g-1} \\ & \searrow \quad \nearrow_{\mathcal{G}^*} & \\ & \Theta^* = \Theta/\pm 1. & \end{array}$$

Comme Θ^* est Cohen-Macaulay, le morphisme $\mathcal{G}^*$ est plat; on l'appellera application de Gauss réduite. Notre but est de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.4. — *L'application de Gauss réduite d'une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g \geqq 3$ est un revêtement ordinaire.*

◆ **Premier pas** : *le diviseur de ramification de l'application de Gauss d'une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g \geqq 3$ est intègre.*

On spécialise la situation au cas de la jacobienne (JC, θ_0) d'une courbe générique de genre g. On identifie l'ensemble des classes d'équivalence linéaire de diviseurs effectifs de degré $g-1$ à un diviseur thêta symétrique Θ_0. L'application de Gauss :

$$\Theta_0 \dashrightarrow \mathbf{P}\,T_0^* JC \simeq \mathbf{P}\,H^0(C, \omega_C)$$

associe à $\mathcal{O}_C(x_1 + \ldots + x_{g-1})$ l'hyperplan de $\mathbf{P}\,H^0(C, \omega_C)^*$ engendré par les points $x_1, \ldots, x_{g-1}$ sur la courbe canonique. Définie hors du fermé

$$Z = \{ \mathcal{O}_C(x_1 + \ldots + x_{g-1}) \in \Theta_0 \mid h^0(C, x_1 + \ldots + x_{g-1}) \geqq 2 \},$$

qui est de codimension trois ou vide, elle induit un morphisme $\mathcal{G}_0: \Theta_0 - Z \to \mathbf{P}^{g-1}$. On note Z' le complémentaire de son image.

On considère maintenant une déformation générique $(\mathbf{A}, \Theta)$ de (JC, Θ_0) de base un schéma lisse pointé $(S, 0)$ de dimension 1. On obtient un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}: \Theta - Z & \longrightarrow & \mathbf{P}_S^{g-1} - Z' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & S, & \end{array}$$

où $\mathcal{G}$ est *surjectif plat à fibres finies*. La ramification de $\mathcal{G}$ est un diviseur relatif dans $\Theta - Z$ dont la fibre en 0 est la ramification du morphisme $\mathcal{G}_0$, qui est supportée par le

diviseur (on notera que la description de cette ramification p. 247 de [ACGH] est erronée):

$$\{\mathcal{O}_C(x+D) \mid D \text{ effectif de degré } g-2 \text{ et } 2x+D \text{ contenu dans un hyperplan de } \mathbf{P}^{g-1}\}.$$

Montrons que ce lieu est irréductible pour une courbe générique de genre $g \geqq 5$. Il est paramétré par l'ensemble T des paires (x, D), où $2x+D$ est contenu dans un diviseur canonique. L'ensemble T est fibré au-dessus de C, en envoyant (x, D) sur x, et la fibre F_x de x est de dimension constante $(g-3)$, irréductible dès que le morphisme associé au système linéaire $|K_C - 2x|$ est *sans point base* et *birationnel* sur son image ([ACGH], lemma, p. 111). Si ça n'est pas le cas, l'image doit être rationnelle (puisque C est générique) et on peut écrire $K_C \equiv 2x + nL_d$, où L_d est un pinceau de degré $d \geqq g/2+1$ (puisque C est générique), et $n \geqq g-3$. On a donc $2g-2 \geqq 2+(g/2+1)(g-3)$. Pour $g \geqq 5$, c'est impossible, et l'ensemble T est irréductible (principe 1.3). Pour $g=4$, le système linéaire $|K_C - 2x|$ induit un morphisme $C \to \mathbf{P}^1$ de degré 4. Il ressort de [D2] p. 11 que la fibre F_x, dominée par la réunion des composantes de $C \times_{\mathbf{P}^1} C$ autres que la diagonale, est irréductible si C n'a pas d'involution non triviale. C'est le cas pour C générique et l'ensemble T est donc irréductible. Lorsque $g=3$, on remarque que T est lisse (par un calcul local au voisinage des bitangentes à la quartique canonique) et connexe, donc irréductible.

D'autre part, la ramification de $\mathcal{G}_0$ en un point générique de $R(\mathcal{G})_0$ est simple. Ceci entraîne que les *diviseurs* $R(\mathcal{G})_s$ sont *intègres* pour s générique. En effet, considérons la fibre en 0 de l'adhérence schématique de $R(\mathcal{G})$ dans Θ. C'est un diviseur de Weil dans Θ_0, dont toutes les composantes rencontrent donc $\Theta_0 - Z$, nécessairement le long d'un schéma contenu dans $R(\mathcal{G})_0$. Cette fibre est par conséquent irréductible et génériquement réduite. Il en est alors de même pour une fibre $R(\mathcal{G})_s$ générique. Ceci termine le premier pas.

On aura aussi besoin plus loin de savoir que l'image inverse de cette ramification dans un revêtement étale de degré deux de la variété abélienne est encore intègre. On utilise de nouveau une dégénérescence sur la jacobienne d'une courbe (JC, θ_0), qu'on suppose maintenant *hyperelliptique*. Le diviseur de ramification $R(\mathcal{G}_0)$ est alors réduit, égal à la somme des traces sur $\Theta_0 - Z$ des diviseurs R_w, définis pour chaque point de Weierstrass w de C par $R_w = \{L \in \Theta_0 \mid h^0(L(-w)) > 0\}$ (les points correspondants aux hyperplans tangents à la courbe rationnelle canonique ne sont pas contenus dans $\Theta_0 - Z$). L'image inverse dans le revêtement étale de chaque R_w est irréductible pour $g \geqq 3$, puisque R_w est isomorphe à $W_{g-2}(C)$ ([ACGH], Ex. G-8, p. 202). Ceci montre ce que l'on veut: dans un pinceau de variétés abéliennes génériques, le diviseur de ramification $R(\mathcal{G}_s)$ se spécialise comme ci-dessus en le diviseur réduit $R(\mathcal{G}_0)$. Si on pouvait écrire $\pi_s^* R(\mathcal{G}_s) = R'_s + \sigma_s R'_s$ (où σ_s est l'involution associée au revêtement double étale π_s), on aurait aussi une décomposition $\pi_s^* R(\mathcal{G}_0) = R'_0 + \sigma_0 R'_0$, ce qui n'est pas le cas.

Rappellons qu'une polarisation l de degré deux sur une variété abélienne X est une classe d'équivalence algébrique de faisceaux inversibles amples L sur X vérifiant $\dim H^0(X, L) = 2$. Fixons un tel faisceau symétrique L et une base $\{s, t\}$ de $H^0(X, L)$. Pour tout complexe μ, on note M_μ^X le diviseur $\operatorname{div}(s + \mu t)$. C'est un diviseur symétrique, ce qui permet de définir de nouveau une application de Gauss réduite:

$$(\mathcal{G}_\mu^X)^* : (M_\mu^X)^* = M_\mu^X / \pm 1 \to \mathbf{P}\, T_0^* X.$$

Deuxième pas : *pour une variété abélienne polarisée générique* (X, l) *de degré deux et de dimension* $g \geqq 3$ *et pour presque tout complexe* μ, *l'application de Gauss réduite* $(\mathscr{G}_\mu^X)^*$ *est un revêtement ordinaire.*

Une variété abélienne a une polarisation de degré deux si et seulement si elle est revêtement étale double d'une variété abélienne principalement polarisée. La remarque située à la fin de la démonstration du premier pas entraîne que la ramification de $\mathscr{G}_\mu^X$ est intègre pour X générique et $\mu = 0$, donc aussi pour μ générique.

Pour montrer que la restriction de $(\mathscr{G}_\mu^X)^*$ à sa ramification est birationnelle sur son image, on procède par récurrence sur g, en utilisant une construction inspirée de [D1] p. 258, dont on prend les notations. On considère deux variétés abéliennes polarisées de degré deux, l'une (E, l_E) de dimension 1, l'autre (X, l_X) de dimension $g-1$, et on choisit des représentants symétriques respectifs L_E et L_X des polarisations l_E et l_X. Soit r_E (resp. r_X) un élément non nul de $H(L_E)$ (resp. de $H(L_X)$) et soit $\tilde{r}_E$ (resp. $\tilde{r}_X$) un relèvement de r_E (resp. r_X) à $\mathscr{G}(L_E)$ (resp. $\mathscr{G}(L_X)$). Il existe des bases respectives $\{s_E, t_E\}$ et $\{s_X, t_X\}$ de $H^0(E, L_E)$ et $H^0(X, L_X)$, telles que $\tilde{r}_E . s_E = s_E$, $\tilde{r}_E . t_E = -t_E$, $\tilde{r}_X . s_X = s_X$ et $\tilde{r}_X . t_X = -t_X$. La variété abélienne Y quotient de $E \times X$ par le sous-groupe d'ordre deux engendré par $\{r_E, r_X\}$ est naturellement munie d'un fibré inversible symétrique L_Y qui définit une polarisation l_Y de degré deux. On note π l'isogénie de degré deux de $E \times X \to Y$. Le sous-espace vectoriel $\pi^* H^0(Y, L_Y)$ de $H^0(E, L_E) \otimes H^0(X, L_X)$ est alors composé des sections invariantes par l'action de $\tilde{r}_E \otimes \tilde{r}_X$, dont une base est $\{s_E s_X, t_E t_X\}$. On a avec les notations ci-dessus $\pi^* M_\mu^Y = \mathrm{div}(s_E s_X + \mu t_E t_X)$. Pour E, X et μ génériques, le diviseur M_μ^Y est lisse (par [D1], corollaire 11.6 *a*, c'est le cas pour E et X génériques et $\mu = 1$). Si D_0 est un champ de vecteurs non nul sur E et $D_1, \ldots, D_{g-1}$ une base de champs de vecteurs sur X, l'application de Gauss $\mathscr{G}_\mu^Y : M_\mu^Y \to \mathbf{P}^{g-1}$ s'insère dans un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & M_\mu^Y \\ & \overset{\pi}{\nearrow} & \\ E \times X \supset \pi^* M_\mu^Y & \xrightarrow[\mathscr{H}_\mu]{} & \mathbf{P}^{g-1}, \end{array} \qquad \mathscr{G}_\mu^Y \searrow$$

où le morphisme $\mathscr{H}_\mu$ est défini par :

$$\mathscr{H}_\mu(e, x) = (D_0 s_E(e) s_X(x) + \mu D_0 t_E(e) t_X(x), s_E(e) D_1 s_X(x) + \mu t_E(e) D_1 t_X(x), \ldots).$$

Notons que $M_\mu^Y + r_X = \mathrm{div}(\tilde{r}_X . (s_E s_X + \mu t_E t_X)) = M_{-\mu}^Y$. En particulier, cela entraîne que les discriminants de $\mathscr{G}_\mu^Y$ et de $\mathscr{G}_{-\mu}^Y$ sont *les mêmes*.

Notre démarche est maintenant la suivante. Pour étudier le discriminant de $(\mathscr{G}_\mu^Y)^*$, on étudie celui de $\mathscr{H}_\mu$, ou plus exactement celui de sa restriction $\mathscr{H}_\mu^H$ à l'image inverse de l'hyperplan H de $\mathbf{P}^{g-1}$ défini par l'annulation de la première coordonnée. On notera que, la formation du discriminant commutant aux changements de bases, on a une égalité de *schémas* $\Delta(\mathscr{H}_\mu) \cap H = \Delta(\mathscr{H}_\mu^H)$. On vérifie l'égalité entre *ensembles* :

$$\mathscr{H}_\mu^{-1}(H) = (E \times B) \cup \bigcup_{1 \leqq i \leqq 4} \{r_i\} \times M_{\mu\mu_i}^X,$$

où l'on a adopté les notations suivantes :

B est la partie fixe du système linéaire $|L_X|$,

$r_1, \ldots, r_4$ sont les points de ramification du morphisme $(s_E, t_E) : E \to \mathbf{P}^1$, c'est-à-dire les points d'ordre deux de E; on peut les numéroter de façon que $r_1 = 0$ et $r_3 - r_1 = r_4 - r_2 = r_E$,

$\mu_1, \ldots, \mu_4$ les images de ces points par ce morphisme. On peut poser ([M2], p. 350) :

$$\mu_E = \mu_1 = 1/\mu_2 = -\mu_3 = -1/\mu_4.$$

C'est en fait une égalité entre *diviseurs*, comme on peut le vérifier en calculant les classes de cohomologie des deux membres. On pourra remarquer que dans la situation générique, chacune des 5 composantes de $\mathscr{H}_\mu^{-1}(H)$ est lisse (*cf.* ci-dessus pour les 4 dernières et [D1], théorème 10.4 et proposition 10.1, pour la première). Le support de la ramification de $\mathscr{H}_\mu^H$ est réunion des intersections deux à deux de ces 5 composantes et des ramifications des restrictions de $\mathscr{H}_\mu$ à chacune de ces composantes.

La restriction de $\mathscr{H}_\mu$ à $\{r_i\} \times M^X_{\mu\mu_i}$ est l'application de Gauss $\mathscr{G}^X_{\mu\mu_i}$.

La restriction de $\mathscr{H}_\mu$ à $E \times B$ se factorise en :

$$E \times B \xrightarrow{f} \mathbf{P}^1 \times B \xrightarrow{m_\mu} \mathbf{P}^1 \times B \xrightarrow{h} H \simeq \mathbf{P}^{g-2}$$
$$((\alpha, \beta), x) \mapsto (\alpha D_j s_X(x) + \beta D_j t_X(x))_{1 \leqq j \leqq g-1},$$

où : f est le quotient par ± 1 sur E et l'identité sur B,

m_μ est la multiplication par μ sur $\mathbf{P}^1$ et l'identité sur B.

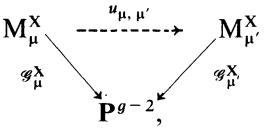
La ramification de f est $\cup \{r_i\} \times B$ et m_μ est un isomorphisme. Le support du discriminant de $\mathscr{H}_\mu^H$, c'est-à-dire le support de l'intersection de $\Delta(\mathscr{H}_\mu)$ avec H, est donc réunion des 5 hypersurfaces :

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^X_{\mu\mu_E}) = \operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^X_{-\mu\mu_E}) \\ \operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^X_{\mu/\mu_E}) = \operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^X_{-\mu/\mu_E}) \\ \operatorname{supp}\Delta(h) \\ \mathscr{H}_\mu(\{r_1\} \times B) = \mathscr{H}_\mu(\{r_3\} \times B) = h(\{\mu\mu_E\} \times B) \\ \mathscr{H}_\mu(\{r_2\} \times B) = \mathscr{H}_\mu(\{r_4\} \times B) = h(\{\mu/\mu_E\} \times B). \end{cases}$$

Les égalités des deux premières lignes résultent du fait que $\mathscr{G}^Y_\mu$ et $\mathscr{G}^Y_{-\mu}$ ont mêmes discriminants, comme on l'a montré plus haut. Les deux dernières lignes résultent des égalités $\{r_3\} \times B = \{r_1\} \times B + (r_E, r_X)$ et $\{r_4\} \times B = \{r_2\} \times B + (r_E, r_X)$, et du fait que (r_E, r_X) est dans le noyau de π. Notre but est maintenant d'étudier la ramification de $\mathscr{H}_\mu$ au-dessus d'un point générique de $\operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^X_{\mu\mu_E})$. Si $g > 3$, l'hypothèse de récurrence nous assure de l'irréductibilité de cette hypersurface (pour des choix génériques de X, μ et E), ainsi que de celle de $\operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^X_{\mu\mu_E})$. Par [D1] proposition 10.1 et théorème 10.4, $h(\{\mu\mu_E\} \times B)$ et $h(\{\mu/\mu_E\} \times B)$ sont aussi irréductibles pour un choix générique de X.

LEMME 1.6. — *L'hypersurface* $\Delta(\mathscr{G}^X_\mu)$ *varie avec* μ.

◆ Supposons au contraire que $\Delta(\mathscr{G}_\mu^X)$ soit une hypersurface (irréductible) fixe Δ pour les μ pour lesquels M_μ^X est lisse. Les $M_\mu^X - R(\mathscr{G}_\mu^X)$ forment alors une famille continue de revêtements étales de $\mathbf{P}^{g-2} - \Delta$, donc sont tous isomorphes. Plus précisément, il existe des diagrammes commutatifs :



où $u_{\mu,\mu'}$, est birationnel. Comme $\mathscr{G}_\mu^X$ et $\mathscr{G}_{\mu'}^X$ sont finis et que M_μ^X et $M_{\mu'}^X$ sont lisses, le théorème principal de Zariski entraîne que $u_{\mu,\mu'}$ est un isomorphisme. On va montrer que c'est impossible en calculant la classe de Kodaira-Spencer de la famille $\{M_\mu^X\}_{\mu\in\mathbf{C}}$. On a une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccc} H^0(M_\mu^X, TX) & \xrightarrow{r} & H^0(M_\mu^X, L_X) & \xrightarrow{\partial} & H^1(M_\mu^X, TM_\mu^X) \\ D & & \longmapsto D(s_X + \mu t_X). & & \end{array}$$

Il ressort de [D1], p. 271 que t_X n'est pas dans l'image de r, donc n'est pas dans le noyau de ∂. Mais ∂t_X est la classe de Kodaira-Spencer de la famille $\{M_\mu^X\}_{\mu\in\mathbf{C}}$. Il en résulte que les M_μ^X lisses ne sont pas tous isomorphes, ce qui montre le lemme. ◆

Le discriminant $\Delta(h)$, par contre, *ne dépend ni de* μ *ni de* E. Lorsque μ varie, la seule des 5 hypersurfaces dans (1.5) qui reste fixe est donc $\operatorname{supp}\Delta(h)$. L'hypothèse de récurrence permet d'autre part de calculer des degrés :

$$\deg \operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}_{\mu\mu_E}^X) = \deg \operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}_{\mu/\mu_E}^X) = (1/2)\deg\Delta(\mathscr{G}_{\mu\mu_E}^X) = (1/2)\,2(g-1+1)! = g!$$

$$\deg h(\{\mu\mu_E\}\times B) = \deg h(\{\mu/\mu_E\}\times B) \leqq (1/2)\,L_X^{g-1} = (g-1)! < g!.$$

Il s'ensuit que, toujours pour des choix génériques de X, E et μ, l'hypersurface $\operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}_{\mu\mu_E}^X)$ est irréductible et n'est contenue dans aucune des 4 autres composantes du discriminant de $\mathscr{H}_\mu^H$. Par conséquent, les seuls points de ramification de $\mathscr{H}_\mu^H$ situés au-dessus d'un point générique de $\operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}_{\mu\mu_E}^X)$ sont ceux de sa restriction à $(\{r_1\}\times M_{\mu\mu_1}^X)\cup(\{r_3\}\times M_{\mu\mu_3}^X)$. De nouveau, l'hypothèse de récurrence prouve qu'il y a exactement 4 tels points (deux opposés situés sur $\{r_1\}\times M_{\mu\mu_1}^X$, deux autres opposés situés sur $\{r_3\}\times M_{\mu\mu_3}^X$) et que la ramification y est simple. Les images de ces points dans $(M_\mu^Y)^* = M_\mu^Y/\pm 1$ sont les mêmes. On a donc montré que le discriminant de $\mathscr{H}_\mu^H$ a multiplicité quatre sur une de ses composantes. Comme c'est l'intersection schématique de $\Delta(\mathscr{H}_\mu)$ avec H, il s'ensuit que $\Delta(\mathscr{H}_\mu)$ a multiplicité au plus quatre sur une de ses composantes. Mais $\Delta(\mathscr{H}_\mu) = 4\Delta((\mathscr{G}_\mu^Y)^*)$, de sorte que $\Delta((\mathscr{G}_\mu^Y)^*)$ est génériquement réduit sur une composante (celle qui contient $\Delta(\mathscr{G}_{\mu\mu_E}^X)$). Il en résulte que le discriminant de l'application de Gauss réduite sur une variété abélienne polarisée de degré deux générique, dont on sait déjà qu'il est *irréductible*, est aussi génériquement intègre. Cela termine la démonstration du pas de récurrence.

Il reste à commencer la récurrence avec le cas $g=3$. On refait la même construction avec une variété abélienne X de dimension 2. De nouveau, on va étudier le discriminant de la restriction $\mathscr{H}_\mu^H$ de $\mathscr{H}_\mu$ à l'image inverse de la droite projective H. On a maintenant $B=\{b_1,\ldots,b_4\}$ où b_i est d'ordre deux sur X, de sorte que:

$$(\mathscr{H}_\mu)^{-1}(H)=(E\times\{b_1,\ldots,b_4\})\cup\bigcup_{1\leq i\leq 4}\{r_i\}\times M^X_{\mu\mu_i}.$$

La restriction de $\mathscr{H}_\mu$ à $E\times\{b_j\}$ est ramifiée en les points $\{r_i,b_j\}$. La restriction de $\mathscr{H}_\mu$ à $\{r_i\}\times M^X_{\mu\mu_i}$ est l'application de Gauss $\mathscr{G}^X_{\mu\mu_i}$. Elle est de degré 4 et se factorise en:

$$\begin{array}{ccc} M^X_{\mu\mu_i} & \longrightarrow & \mathbf{P}^1 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & M^X_{\mu\mu_i}/\pm 1. & \end{array}$$

La courbe $M^X_{\mu\mu_i}/\pm 1$ est elliptique. Le discriminant de $\mathscr{G}^X_{\mu\mu_i}$ est donc, ensemblistement, réunion des deux points de $\mathscr{G}^X_{\mu\mu_i}(B)$ et de 4 points qu'on note $p_1(\mu\mu_i),\ldots,p_4(\mu\mu_i)$ (il a multiplicité 2 en ces derniers).

Le discriminant de $\mathscr{H}_\mu^H$ est (ensemblistement) composé des points $\mathscr{G}_\mu(r_i,b_j)=\mathscr{G}^X_{\mu\mu_i}(b_j)$ et des points $p_j(\mu\mu_i)$ (avec $p_j(\mu\mu_i)=p_j(\mu\mu_{i+2})$). Comme dans le cas général, on s'intéresse aux points de ramification dans la fibre de $p_j(\mu\mu_i)$.

Un tel point est, pour des choix génériques de μ et de E, distinct des autres $p_s(\mu\mu_r)$ (excepté de $p_j(\mu\mu_{i+2})$) car pour tout réel α, les $p_j(\alpha)$ sont les 4 points du discriminant du morphisme $M^X_\alpha/\pm 1\to\mathbf{P}^1$ donc varient avec α (lemme 1.6).

De même, toujours pour un choix générique de μ, un tel point n'est pas dans $\mathscr{G}^X_{\mu\mu_i}(B)$. En effet, pour $\mu=0$, le morphisme $M^X_0\to\mathbf{P}^1$ est de groupe de Galois $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ et se factorise par $h:C\to\mathbf{P}^1$, où C est une courbe lisse de genre 2; le discriminant de $\mathscr{G}^X_0$ est ensemblistement le même que celui de h, à savoir 6 points *distincts* $\mathscr{G}^X_0(B)\cup\{p_1(0),\ldots,p_4(0)\}$.

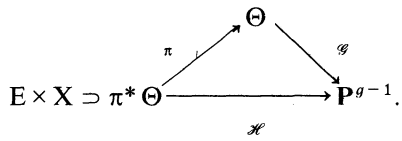
En conclusion, dans la situation générique, les seuls points de ramification dans la fibre de $p_j(\mu\mu_i)$ sont quatre points du type (r_1,x_1), $(r_1,-x_1)$, (r_3,x_3), $(r_3,-x_3)$. La ramification y est simple. Ces quatre points ont même image dans $(M^Y_\mu)^*$ et le discriminant de $(\mathscr{G}^Y_\mu)^*$ est par conséquent réduit en $p_j(\mu\mu_i)$, donc aussi génériquement réduit.

On a ainsi terminé la démonstration du deuxième pas.

Dernier pas: *le discriminant de l'application de Gauss réduite d'une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g\geqq 3$ est génériquement réduit.*

On poursuit la même construction en gardant les mêmes notations. Il existe une isogénie π de degré quatre de $E\times X$ sur une variété abélienne principalement polarisée (A,θ) et un diviseur Θ symétrique représentant θ tels qu'une équation de $\pi^*\Theta$ soit $s_E s_X+t_E t_X$. Pour des choix génériques de E et X, ce diviseur est lisse ([D1], corol-

laire 11.6 *a*) et on a un diagramme :



De nouveau, on considère la restriction $\mathscr{K}^{\mathrm{H}}$ de $\mathscr{K}$ à l'image inverse de l'hyperplan H de $\mathbf{P}^{g-1}$ défini par l'annulation de la première coordonnée. Avec les notations précédentes, le support du discriminant de $\mathscr{K}^{\mathrm{H}}$ est le même que celui de $\mathscr{K}^{\mathrm{H}}_1$, à savoir les trois hypersurfaces :

$$\operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^{\mathrm{X}}_{\mu_{\mathrm{E}}}) = \operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^{X}_{1/\mu_{\mathrm{E}}})$$

$$\operatorname{supp}\Delta(h)$$

$$h(\{\mu_{\mathrm{E}}\}\times \mathrm{B}) = h(\{1/\mu_{\mathrm{E}}\}\times \mathrm{B}).$$

Lorsque E est générique et dim $\mathrm{X}\geqq 3$, le pas précédent et un calcul de degrés entraînent que les deux premières de ces hypersurfaces de H sont irréductibles distinctes et non contenues dans la dernière. Comme précédemment, cela entraîne que les seuls points de ramification de $\mathscr{K}^{\mathrm{H}}$ situés au-dessus d'un point générique de $\operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^{\mathrm{X}}_{\mu_{\mathrm{E}}})$ sont au nombre de 8 (2 opposés sur chacun des $\{r_i\}\times \mathrm{M}^{\mathrm{X}}_{\mu_i}$) et que la ramification y est simple. Ces 8 points ont la même image dans Θ^*. Le discriminant de $\mathscr{G}^*$ est donc réduit en un point générique de $\operatorname{supp}\Delta(\mathscr{G}^{\mathrm{X}}_{\mu_{\mathrm{E}}})$.

Le cas $g=3$ est élémentaire et laissé au lecteur. ◆

COROLLAIRE 1.7. — *Le groupe de Galois de l'application de Gauss réduite d'une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g\geqq 2$ est le groupe symétrique sur l'ensemble à $g!/2$ éléments.*

◆ Soit Θ un diviseur thêta symétrique, La proposition 1.2 ne s'applique pas telle quelle puisque Θ^* a des singularités isolées pour $g\geqq 3$. Cependant, les mêmes arguments montrent que $\Theta\times_{\mathbf{P}^{g-1}}\Theta$ est connexe en codimension 1 donc aussi $\Theta^*\times_{\mathbf{P}^{g-1}}\Theta^*$. Le fait que Θ^* est non singulier en codimension un permet de conclure de la même façon. ◆

COROLLAIRE 1.8. — *Soit Θ un diviseur thêta sur une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension $g\geqq 3$ et soit $\mathscr{G}:\Theta\to\mathbf{P}^{g-1}$ son application de Gauss. Alors la variété $\Theta\times_{\mathbf{P}^{g-1}}\Theta$ a trois composantes irréductibles.*

◆ On peut suppose Θ symétrique. Comme $\mathscr{G}$ se factorise par l'involution $\sigma(x)=-x$, la famille $\{(x,\sigma x)\,|\,x\in\Theta\}$ et la diagonale $\Delta_\Theta=\{(x,x)\,|\,x\in\Theta\}$ sont des composantes de $\Theta\times_{\mathbf{P}^{g-1}}\Theta$.

Le groupe de Galois G de $\mathscr{G}$ opère sur une fibre $\mathrm{F}=\{x_1,\ldots,x_d,\sigma x_1,\ldots,\sigma x_d\}$ de $\mathscr{G}$ (avec $2d=\deg\mathscr{G}=g!$) et tout élément de G commute avec σ. Or le groupe de Galois de $\mathscr{G}^*$ est le groupe symétrique $\mathbf{S}_d$ (corollaire 1.7). Quitte à échanger x_j et σx_j, on peut supposer que G contient toutes les doubles transpositions $(x_1,x_j)(\sigma x_1,\sigma x_j)$. De plus, G opère transitivement sur F donc contient une permutation g vérifiant $g(x_1)=\sigma x_1$. On

distingue alors deux cas :

– si $g(x_2)=x_j$ (avec $j\geqq 2$), on vérifie facilement que $F\times F$ se scinde en trois orbites sous l'action de G : celles de (x_1,x_1), celle de $(x_1,\sigma x_1)$ et celle de (x_1,x_2).

– si $g(x_2)=\sigma x_j$ (avec $j\geqq 2$), on arrive à la même conclusion, sauf si $g=\sigma$. Dans ce cas, on a $G\simeq \mathbf{S}_d\times \mathbf{Z}/2$. Le sous-groupe $\mathbf{S}_d$ de G est alors distingué et induit une factorisation :

$$\mathscr{G}: \quad \Theta \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}^{g-1},$$

où π est le revêtement double de $\mathbf{P}^{g-1}$ ramifié le long de l'hypersurface irréductible $\Delta(\mathscr{G}^*)$. Ceci entraîne que la restriction de $\mathscr{G}$ à $R(\mathscr{G})$ est de degré $\deg(f)=g!/2$ sur son image, ce qui contredit le théorème 1.4 pour $g\geqq 3$.

Le groupe G opère donc sur $F\times F$ avec 3 orbites, ce qui prouve le corollaire. ◆

2. Irréductibilité de $\mathscr{N}'_g$

Commençons par rappeler quelques résultats de [M1]. Il existe une compactification partielle $\mathscr{A}_g^*$ de $\mathscr{A}_g$ obtenue en lui adjoignant un diviseur à l'infini $\partial\mathscr{A}_g$, et un morphisme $p:\partial\mathscr{A}_g\to\mathscr{A}_{g-1}$ dont la fibre au-dessus d'un point (A,θ) de $\mathscr{A}_{g-1}$ est isomorphe au quotient de A par le groupe $\mathrm{Aut}(A,\theta)$ défini dans l'introduction (génériquement $\{1,-1\}$). Mumford définit dans [M1] un *diviseur* $\mathscr{N}_g$ qui est l'adhérence dans $\mathscr{A}_g^*$ du lieu des variétés abéliennes dont un diviseur thêta est singulier. Il se décompose en :

$$\mathscr{N}_g=\theta_{\mathrm{null},g}+2.\mathscr{N}'_g,$$

où le diviseur $\theta_{\mathrm{null},g}$ est défini dans l'introduction.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite de l'irréductibilité de $\mathscr{N}'_g$. Puisqu'on sait que $\mathscr{N}'_2$, $\mathscr{N}'_3$ et $\mathscr{N}'_4$ sont irréductibles, on va procéder par récurrence sur g. On suppose $g\geqq 5$ et on fait les hypothèses :

– le diviseur $\mathscr{N}'_{g-1}$ est irréductible,

– un diviseur thêta symétrique d'une variété abélienne principalement polarisée correspondant à un point générique de $\mathscr{N}'_{g-1}$ a exactement deux points singuliers opposés, qui sont doubles ordinaires (de sorte que le diviseur $\mathscr{N}'_{g-1}$ est réduit).

Nous utiliserons aussi le fait déjà connu, rappelé dans l'introduction, que $\theta_{\mathrm{null},g-1}$ a des propriétés analogues.

Le but de cette partie est de déduire de ces hypothèses l'irréductibilité de $\mathscr{N}'_g$. On suit le schéma de démonstration indiqué dans l'introduction.

Premier pas : *toute composante de $\mathscr{N}'_g$ rencontre la frontière $\partial\mathscr{A}_g$.*

Cela découle du résultat suivant, bien connu, dont nous rappelons ici la démonstration faute de référence adéquate.

LEMME 2.1. — *Si $g \geq 4$, l'adhérence* D* *dans $\mathscr{A}_g^*$ de tout diviseur effectif* D *de $\mathscr{A}_g$ rencontre $\partial\mathscr{A}_g$ le long d'un diviseur.*

◆ Soit $\mathscr{A}_g^s = \mathscr{A}_g \sqcup \ldots \sqcup \mathscr{A}_0$ la compactification de Satake de $\mathscr{A}_g$ et soit D^s l'adhérence de D dans $\mathscr{A}_g^s$. Pour $g \geq 4$, le groupe des diviseurs de Weil de $\mathscr{A}_g^s$ modulo les diviseurs principaux est isomorphe à $\mathbf{Z}$ ([SV2], theorem 0.5), de sorte qu'un multiple de D^s est un diviseur de Cartier très ample (*loc. cit.*, haut de la p. 351), donc rencontre le fermé $\mathscr{A}_{g-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathscr{A}_0$ en codimension au plus 1. Comme $g \geq 3$, on a $\dim \mathscr{A}_i < \dim \mathscr{A}_{g-1} - 1$ pour $0 \leq i < g-1$, donc D^s rencontre $\mathscr{A}_{g-1}$. Il existe un morphisme $\mathscr{A}_g^* \to \mathscr{A}_g \sqcup \mathscr{A}_{g-1}$ qui envoie $\partial\mathscr{A}_g$ sur $\mathscr{A}_{g-1}$, de sorte que D* rencontre $\partial\mathscr{A}_g$. Puisque $\partial\mathscr{A}_g$ est un diviseur de Cartier dans $\mathscr{A}_g^*$, leur intersection est de codimension 1 dans D*, donc c'est un diviseur de $\partial\mathscr{A}_g$. ◆

Deuxième pas : *la frontière de $\mathscr{N}_g$ a quatre composantes irréductibles, qu'on notera $\partial'\mathscr{N}_g'$, $\partial''\mathscr{N}_g' = p^{-1}(\mathscr{N}_{g-1}')$, $\partial'\theta_{\text{null},g}$ et $\partial''\theta_{\text{null},g} = p^{-1}(\theta_{\text{null},g-1})$. Les deux dernières sont dans la frontière de $\theta_{\text{null},g}$.*

Il ressort de [M1] p. 364 que la frontière de $\mathscr{N}_g$ domine $\mathscr{A}_{g-1}$ via p et que la fibre d'un point (A, θ) de $\mathscr{A}_{g-1}$ *hors de* $\mathscr{N}_{g-1}$ est l'image dans $A/\mathrm{Aut}(A, \theta)$ du diviseur :

$$c(A, \theta) = \{ a \in A \mid \Theta . \Theta_a \text{ est singulier} \}.$$

où Θ est un représentant quelconque de θ. Un point a est dans $c(A, \theta)$ si et seulement si il existe $x \in \Theta$ avec $\mathscr{G}(x) = \mathscr{G}(x-a)$. Le diviseur $c(A, \theta)$ est donc l'image dans A du morphisme $\varphi : \Theta \times_{\mathbf{P}^{g-2}} \Theta \to A$ qui à (x, y) associe $(x-y)$. Pour (A, θ) générique et Θ *symétrique*, $\Theta \times_{\mathbf{P}^{g-2}} \Theta$ a trois composantes (corollaire 1.8) :

— la diagonale Δ_Θ, dont l'image par φ est réduite à 0,

— la famille $\{ (x, -x) \mid x \in \Theta \}$. Si on note $\mathbf{2}_A$ la multiplication par 2 dans A, son image par φ est $\mathbf{2}_A(\Theta)$, diviseur indépendant du choix de Θ; elle correspond à une composante irréductible $\partial'\theta_{\text{null},g}$ de la frontière de $\theta_{\text{null},g}$ ([M1], p. 368),

— une dernière famille irréductible qu'on notera $\mathscr{C}'(A, \Theta)$. Son image par φ, notée $c'(A, \theta)$ dans la suite, correspond (ensemblistement), à une composante *irréductible* $\partial'\mathscr{N}_g'$ de la frontière de $\mathscr{N}_g'$. On remarquera que $c'(A, \theta)$ est distinct de $\mathbf{2}_A(\Theta)$, comme il ressort de la comparaison de leurs classes de cohomologie ([M1], proposition 3.2) : $[c'(A, \theta)] = ((g+1)!/6 - 2^{2g-4})[\Theta]$ et $[\mathbf{2}_A(\Theta)] = 2^{2g-4}[\Theta]$.

Les composantes de la frontière de $\mathscr{N}_g$ qui ne dominent pas $\mathscr{A}_{g-1}$ sont $\partial''\mathscr{N}_g' = p^{-1}(\mathscr{N}_{g-1}')$ et $\partial''\theta_{\text{null},g} = p^{-1}(\theta_{\text{null},g-1})$, qui sont irréductibles par hypothèse de récurrence et [F], proposition 3.3, respectivement. La seconde est dans la frontière de $\theta_{\text{null},g}$ ([M1], p. 368).

Troisième pas : *le diviseur $\mathscr{N}_g'$ ne contient pas $\partial'\theta_{\text{null},g}$.*

Nous allons montrer par un calcul local que $\mathscr{N}_g$ est lisse en un point générique de $\partial'\theta_{\text{null},g}$. En particulier, une seule composante de $\mathscr{N}_g$ contient $\partial'\theta_{\text{null},g}$ et cette composante est $\theta_{\text{null},g}$. Il nous faut pour cela revenir à la définition du *diviseur* $\mathscr{N}_g$ donnée dans [M1].

Soit (A_0, θ_0) une variété abélienne principalement polarisée *générique*, et soit a_0 un point de A_0 non d'ordre 2, qui soit dans le diviseur $c(A_0, \theta_0)$. On peut donc écrire

$a_0 = x_0 - y_0$, avec $\mathscr{G}(x_0) = \mathscr{G}(y_0)$. La donnée de (A_0, θ_0) et de a_0 correspond à un point Q_0 de $\partial \mathscr{N}_g$. Il existe un voisinage analytique U de Q_0 dans $\mathscr{A}_g^*$, un schéma universel propre et plat $q : \mathscr{A} \to U$ et un « diviseur thêta » relatif $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$ ([M1], p. 361). Les fibres de q sont des variétés abéliennes principalement polarisées hors de $\partial U = \partial \mathscr{A}_g \cap U$, et des « dégénérescences de rang 1 de variétés abéliennes principalement polarisées » au-dessus de ∂U. Mumford définit un sous-schéma $\mathscr{S}$ de $\mathscr{D}$ ([M1], p. 362, où il est noté $\mathrm{Sing}_{\mathrm{vert}} \mathscr{D}$), dont la fibre hors de ∂U est le lieu singulier du diviseur thêta (ordinaire). L'écriture $a_0 = x_0 - y_0$ correspond à la donnée d'un point s_0 de $\mathscr{S}$ ([M1], p. 363-364). Le diviseur $\mathscr{N}_g$ est défini dans U comme la projection de $\mathscr{S}$ et Mumford explique comment assigner des multiplicités à ses composantes en le considérant comme le *discriminant* de la famille $\mathscr{D} \to U$.

LEMME 2.2. — *Pour a_0 générique dans chacune des deux composantes de $c(A_0, \theta_0)$, le schéma $\mathscr{S}$ est lisse en s_0 et $q : \mathscr{S} \to \mathscr{A}_g^*$ est un plongement en ce point.*

◆ Dans des systèmes de coordonnées analytiques locales sur $\mathscr{A}$ (au voisinage de s_0) et U (au voisinage de Q_0) convenables, le morphisme q s'écrit ([M1], p. 362) :

$$q(z_1', z_1, z, x, \tau) = (z_1', x, \tau),$$

où :

$$z_1, z_1' \in \mathbf{C},$$

$$z = (z_2, \ldots, z_g) \in \mathbf{C}^{g-1},$$

$$x = (x_1, \ldots, x_{g-1}) \in \mathbf{C}^{g-1},$$

$$\tau \in \mathscr{H}_{g-1}, \text{ demi-espace de Siegel,}$$

$$s_0 = (0, \lambda, s_0, a_0, \tau_0), \qquad Q_0 = (0, a_0, \tau_0).$$

La frontière ∂U est définie dans U par l'annulation de z_1'. Le morphisme $p : \partial U \to \mathscr{A}_{g-1}$ s'écrit $p(0, x, \tau) = \tau$. Le point τ_0 de $\mathscr{H}_{g-1}$ correspond à la variété abélienne principalement polarisée (A_0, θ_0), tandis que les points a_0 et s_0 de $\mathbf{C}^{g-1}$ correspondent respectivement aux points a_0 et s_0 de A_0. Le complexe λ est défini par $D_i \theta(x_0) + \lambda D_i \theta(y_0) = 0$ pour tout $i = 2, \ldots, g$ (on a noté $D_i = \partial / \partial z_i$). Le diviseur $\mathscr{D}$ est défini dans $\mathscr{A}$ par l'annulation d'une fonction δ des coordonnées ci-dessus, qui s'écrit ainsi au voisinage de s_0 ([M1], p. 363) :

$$\delta(z_1', z_1, z, x, \tau) = \theta(z, \tau) + z_1 \theta(z - x, \tau) + z_1' \delta',$$

où θ est la fonction thêta usuelle. Au voisinage de s_0, le schéma $\mathscr{S}$ est défini par les $g+1$ équations ([M1], p. 362) :

$$\delta = D_1 \delta = D_2 \delta = \ldots = D_g \delta = 0.$$

En utilisant les équations de la chaleur ([M1], p. 358), on vérifie sur la matrice jacobienne associée à ces équations que la conclusion du lemme est équivalente au fait que

la matrice :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & D_2\theta(x_0)\ldots D_g\theta(x_0) \\ D_2\theta(x_0) & \\ \vdots & D_iD_j\theta(x_0)+\lambda D_iD_j\theta(y_0) \\ D_g\theta(x_0) & \end{pmatrix},$$

est inversible. On va montrer que c'est le cas génériquement. Choisissons les coordonnées $z_2,\ldots,z_g$ de façon que $\mathscr{G}(x_0)=(0,\ldots,0,1)$ et $\mathscr{G}(y_0)=(0,\ldots,0,-1/\lambda)$. Il s'agit de montrer que la matrice $[D_iD_j\theta(x_0)+\lambda D_iD_j\theta(y_0)]_{2\leqq i,j\leqq g-2}$ est inversible. On fait les hypothèses suivantes au point (x_0,y_0) :

- le schéma $\Theta_0\times_{\mathbf{P}^{g-2}}\Theta_0$ est lisse,
- le morphisme « différence » $\varphi:\Theta_0\times_{\mathbf{P}^{g-2}}\Theta_0\to A$ est un plongement.

On peut paramétrer Θ_0 aux voisinages de x_0 et de y_0 de la façon suivante :

$$\Theta_0=\{(x_2,\ldots,x_{g-1},\varphi_x(x_2,\ldots,x_{g-1}))\}\text{ au voisinage de }x_0$$
$$\Theta_0=\{(y_2,\ldots,y_{g-1},\varphi_y(y_2,\ldots,y_{g-1}))\}\text{ au voisinage de }y_0,$$

avec $\partial\varphi_x/\partial z_i(x_0)=\partial\varphi_y/\partial z_i(y_0)=0$ pour $2\leqq i\leqq g-1$. On notera $x=(x_2,\ldots,x_{g-1})$ et $y=(y_2,\ldots,y_{g-1})$. Si on prend les $(g-2)$ premières composantes comme coordonnées locales sur $\mathbf{P}^{g-2}$, l'application de Gauss s'écrit :

$$\mathscr{G}(x_2,\ldots,x_{g-1})=(D_2\varphi_x(x),\ldots,D_{g-1}\varphi_x(x))$$
$$\mathscr{G}(y_2,\ldots,y_{g-1})=(-\lambda D_2\varphi_y(y),\ldots,-\lambda D_{g-1}\varphi_y(y)).$$

Les équations locales du schéma $\Theta_0\times_{\mathbf{P}^{g-2}}\Theta_0$ au voisinage de (x_0,y_0) sont donc $D_i\varphi_x(x)+\lambda D_i\varphi_y(y)=0$ pour $2\leqq i\leqq g-1$. Le morphisme φ est donné par :

$$\varphi(x_2,\ldots,x_{g-1},y_2,\ldots,y_{g-1})=(x_2-y_2,\ldots,x_{g-1}-y_{g-1},\varphi_x(x)-\varphi_y(y)).$$

Les hypothèses faites plus haut entraînent alors que la matrice

$$[D_iD_j\varphi_x(x_0)-D_iD_j\varphi_y(y_0)]_{2\leqq i,j\leqq g-2}$$

est inversible. On termine en vérifiant que

$$D_iD_j\theta(x_0)=D_g\theta(x_0).D_iD_j\varphi_x(x_0)=D_iD_j\varphi_x(x_0)$$

et

$$D_iD_j\theta(y_0)=D_g\theta(y_0).D_iD_j\varphi_y(y_0)=-1/\lambda D_iD_j\varphi_y(y_0),$$

ce qui montre que M est inversible.

Les deux propriétés ci-dessus étant réalisées pour x générique dans chacune des composantes de $c(A_0,\theta_0)$, puisque celles-ci sont lisses et de même dimension que leurs images par φ, cela termine la démonstration du lemme. ◆

On va déduire du lemme que $\mathscr{N}_g$ est *lisse* en un point générique de $\partial'\theta_{\text{null},g}$, donc que $\mathscr{N}'_g$ ne contient pas $\partial'\theta_{\text{null},g}$. En effet, si a_0 est générique dans $\mathbf{2}_A(\Theta_0)$, on ne peut

l'écrire que d'une façon comme $a_0 = x_0 - y_0$, avec $\mathscr{G}(x_0) = \mathscr{G}(y_0)$. Cela résulte du fait que $\mathbf{2}_A(\Theta_0)$ et $c'(A_0, \theta_0)$ sont distincts, comme on l'a montré plus haut, et que le morphisme de multiplication par deux $\Theta_0 \to \mathbf{2}_A(\Theta_0)$ est birationnel. Autrement dit, la fibre de $q : \mathscr{S} \to \mathscr{N}_g$ au-dessus du point correspondant Q_0 est constituée du seul point s_0. Le lemme 2.2 permet alors de conclure que $q : \mathscr{S} \to \mathscr{N}_g$ est un isomorphisme local en s_0.

Quatrième pas : *le diviseur $\mathscr{N}'_g$ ne contient pas $\partial'' \theta_{\text{null}, g}$, de sorte que toute composante de $\mathscr{N}'_g$ contient $\partial' \mathscr{N}'_g$ ou $\partial'' \mathscr{N}'_g$.*

De nouveau, nous allons montrer par un calcul local que $\mathscr{N}_g$ est localement irréductible en un point générique de $\partial'' \theta_{\text{null}, g} = p^{-1}(\theta_{\text{null}, g-1})$, de sorte que $\theta_{\text{null}, g}$ est la seule composante de $\mathscr{N}_g$ qui contienne $\partial'' \theta_{\text{null}, g}$.

Soit (A_0, θ_0) une variété abélienne principalement polarisée *générique* dans une des deux composantes de $\mathscr{N}_{g-1}$ et soit a_0 un point de A_0 non d'ordre 2. La donnée de (A_0, θ_0) et de a_0 correspond à un point R_0 de $\partial \mathscr{N}_g$. On introduit comme précédemment les schémas $\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{S}$ au-dessus d'un voisinage analytique U de R_0 dans $\mathscr{A}^*_g$. Un représentant symétrique Θ_0 de la polarisation θ_0 a comme singularités : deux points doubles ordinaires opposés s_0 et $-s_0$ si (A_0, θ_0) correspond à un point de $\mathscr{N}_{g-1}$ (hypothèse de récurrence), un point double ordinaire s_0 si (A_0, θ_0) correspond à un point de $\theta_{\text{null}, g-1}$ ([Te], theorem 2.17). La fibre $q^{-1}(R_0)$ est une dégénérescence de rang 1 de variété abélienne principalement polarisée, dont le lieu singulier est isomorphe à A_0. Il ressort de la description de $\mathscr{S}$ de [M1], p. 363 que, via cet isomorphisme, le point s_0 est dans $\mathscr{S}$.

LEMME 2.3. — *Si a_0 n'est pas dans $(\Theta_0)_{s_0} \cap (\Theta_0)_{-s_0}$, le schéma $\mathscr{S}$ est lisse en s_0.*

◆ Dans des systèmes de coordonnées analytiques locales sur $\mathscr{A}$ (au voisinage de s_0) et U (au voisinage de R_0) convenables, le morphisme q s'écrit ([M1], p. 362) :

$$q(z'_1, z_1, z, x, \tau) = (z_1 z'_1, x, \tau),$$

où :

$$z_1, z'_1 \in \mathbf{C},$$
$$z = (z_2, \ldots, z_g) \in \mathbf{C}^{g-1},$$
$$x = (x_1, \ldots, x_{g-1}) \in \mathbf{C}^{g-1},$$
$$\tau \in \mathscr{H}_{g-1}, \text{ demi-espace de Siegel.}$$
$$s_0 = (0, 0, s_0, a_0, \tau_0), \qquad R_0 = (0, a_0, \tau_0).$$

Le diviseur $\mathscr{D}$ est défini dans $\mathscr{A}$ par l'annulation d'une fonction δ des coordonnées ci-dessus. Montrons qu'elle s'écrit ainsi au voisinage de s_0 :

$$\delta(z_1, z'_1, z, x, \tau) = \theta(z, \tau) + z_1 \theta(z - x, \tau) + z'_1 \theta(z + x, \tau) + z_1 z'_1 \delta',$$

où θ est la fonction thêta usuelle. Des équations locales de $\mathscr{D}_0$ sont $\theta(z, \tau) + z_1 \theta(z - x, \tau)$ sur la branche $z'_1 = 0$ et $z'_1 \theta(\bar{z}, \tau) + \theta(\bar{z} - x, \tau)$ sur la branche $z_1 = 0$ de la normalisation de $q^{-1}(R_0)$ ([M1], p. 363). On obtient bien la fonction δ ci-dessus modulo $z_1 z'_1$ puisqu'on recolle les deux branches par la translation par x. Au voisinage de s_0, le schéma $\mathscr{S}$ est

défini par les $g+1$ équations suivantes ([M1], p. 362) (on note encore $D_i = \partial/\partial z_i$ et $D'_1 = \partial/\partial z'_1$) :

$$\delta = z_1 D_1 \delta - z'_1 D'_1 \delta = D_1 \delta = \ldots = D_g \delta = 0.$$

Le point singulier s_0 de Θ_0 étant un point double, il résulte des équations de la chaleur ([M1], p. 358) que les $\partial\theta/\partial\tau_{\alpha\beta}$ ne sont pas tous nuls. Le rang de la matrice jacobienne associée aux équations de $\mathscr{S}$ est donc égal à $2 + \mathrm{Rang}\,(D_i D_j \theta(s_0))_{2 \leqq i,\, j \leqq g}$, *si* $\theta(s_0 - a_0, \tau_0)$ *et* $\theta(s_0 + a_0, \tau_0)$ *ne sont pas tous les deux nuls*. C'est exactement notre hypothèse. On conclut alors en utilisant le fait que s_0 est un point double *ordinaire* sur Θ_0, de sorte que la matrice des dérivées secondes de θ en ce point est inversible. ◆

On va déduire du lemme que $\mathscr{N}_g$ est *localement irréductible* en un point générique de $\partial''\theta_{\mathrm{null},\,g}$, donc que $\mathscr{N}'_g$ ne contient pas $\partial''\theta_{\mathrm{null},\,g}$. En effet, prenons (A_0, θ_0) générique dans $\theta_{\mathrm{null},\,g-1}$. Comme Θ_0 n'a que des singularités isolées, il est facile de vérifier que $c(A_0, \theta_0) = \{ a \in A_0 \mid \Theta_0 . (\Theta_0)_a \text{ est singulier} \}$ est encore un *diviseur* (bien que (A_0, θ_0) soit dans $\mathscr{N}_{g-1}$). Pour a_0 hors de ce diviseur, il ressort de [M1], p. 363-364 que la fibre de $\mathscr{S}$ au-dessus du point correspondant R_0 de $\partial''\theta_{\mathrm{null},\,g}$ est constituée du seul point s_0. Il existe donc un voisinage V de R_0 tel que $q(\mathscr{S}) = \mathscr{N}_g \cap V$. Mais $\mathscr{S}$ est lisse en s_0 (lemme 2.3), de sorte que $\mathscr{N}_g$ est localement irréductible en R_0.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'intersection de $\partial'\mathscr{N}'_g$ et de $\partial''\mathscr{N}'_g$, notre but étant de montrer que $\mathscr{N}_g$ y est localement irréductible en un point générique. Soit (A_0, θ_0) une variété abélienne principalement polarisée correspondant à un point générique de $\mathscr{N}'_{g-1}$. Tout diviseur thêta symétrique Θ_0 a alors, d'après l'hypothèse de récurrence, deux points singuliers opposés s_0 et $-s_0$, qui sont doubles ordinaires. Soit P_0 le point de $\partial\mathscr{A}_g$ correspondant à un point a_0 générique dans $(\Theta_0)_{s_0}$. On a :

LEMME 2.4. — *Le point* P_0 *ainsi défini est dans l'intersection de* $\partial'\mathscr{N}'_g$ *et de* $\partial''\mathscr{N}'_g$.

◆ Le point P_0 est par construction dans $\partial''\mathscr{N}'_g = p^{-1}(\mathscr{N}'_{g-1})$. On considère une déformation générique à un paramètre $(A, \Theta) \to T$ de (A_0, Θ_0). Les applications de Gauss induisent une application rationnelle $\mathscr{G} : \Theta \dashrightarrow \mathbf{P}_T^{g-2}$ qui n'est pas définie aux points s_0 et $-s_0$. Par contre, les points s_0 et $-s_0$ étant doubles ordinaires sur Θ_0, l'éclaté $\tilde{\Theta}$ de Θ en s_0 et $-s_0$ est lisse et coïncide avec l'éclatement de Nash, de sorte que $\mathscr{G}$ induit un *morphisme* $\tilde{\mathscr{G}} : \tilde{\Theta} \to \mathbf{P}_T^{g-2}$. L'image inverse E de s_0 dans $\tilde{\Theta}$ est isomorphe à $\mathbf{P}^{g-2}$. Le transformé strict de Θ_0 rencontre E en une quadrique lisse Q_0 isomorphe au cône tangent projectifié à Θ_0 en s_0, d'équation $\Sigma D_i D_j \theta(s_0) x_i x_j$, où $\{ D_1, \ldots, D_{g-1} \}$ est une base de champs de vecteurs sur A_0. Sur Q_0, le morphisme $\tilde{\mathscr{G}}$ est donné par $\tilde{\mathscr{G}}(x_1, \ldots, x_{g-1}) = (\Sigma D_1 D_j \theta(s_0) x_j, \ldots, \Sigma D_{g-1} D_j \theta(s_0) x_j)$. La restriction de $\tilde{\mathscr{G}}$ à E est par suite associée au système hyperplan, de sorte qu'elle induit un *isomorphisme* de E sur $\mathbf{P}_0^{g-2}$. En particulier, pour tout x lisse sur Θ_0, il existe e dans E tel que $\tilde{\mathscr{G}}(x) = \tilde{\mathscr{G}}(e)$. Le couple (e, x) appartient à l'adhérence de la réunion des $\mathscr{C}'(A_t, \Theta_t)$ pour t non nul. Or le diviseur $c'(A_t, \theta_t)$ est défini comme l'image de la sous-variété $\mathscr{C}'(A_t, \Theta_t)$ de $A_t \times A_t$ par le morphisme différence. Il s'ensuit que tout point de $s_0 - \Theta_0 = (\Theta_0)_{s_0}$, et en particulier a_0, est dans l'adhérence des $c'(A_t, \theta_t)$, donc correspond à un point de la fibre de $\partial'\mathscr{N}'_g \to \mathscr{A}_{g-1}$ au-dessus de (A_0, θ_0). ◆

Cinquième pas: *le diviseur* $\mathscr{N}'_g$ *est localement irréductible en* P_0.

On garde les notations de la démonstration du quatrième pas. On a donc des schémas $\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{S}$ au-dessus d'un voisinage analytique U de P_0 dans $\mathscr{A}_g^*$.

Montrons qu'on peut supposer $\partial''\mathscr{N}'_g \cap U$ et $\partial'\mathscr{N}'_g \cap U$ irréductibles. Pour le premier, cela résulte du fait que $\partial''\mathscr{N}'_g$ est l'image inverse par p de $\mathscr{N}'_{g-1}$. Les fibres de la restriction de p au diviseur $\partial''\mathscr{N}'_g \cap U$ de U sont alors irréductibles, et son image de même, puisqu'on peut supposer $\mathscr{N}'_{g-1}$ localement irréductible en le point correspondant à (A_0, θ_0). Le principe 1.3 montre alors que $\partial''\mathscr{N}'_g \cap U$ est irréductible. Ensuite, la restriction p' de p à $\partial'\mathscr{N}'_g \cap U$ domine un ouvert V qu'on peut supposer irréductible. Un diviseur thêta de A_0 n'a que des singularités isolées; il en est donc de même pour les variétés abéliennes correspondant à tous les points de V. On a remarqué plus haut que cela entraîne que les fibres $c(A, \theta)$ de p' sont encore des *diviseurs*. On sait d'autre part que la fibre générique de p' est *irréductible*. De nouveau, le principe 1.3 entraîne l'irréductibilité de $\partial'\mathscr{N}'_g \cap U$.

Nous allons maintenant étudier les composantes du schéma $\mathscr{S}$. Au-dessus d'un point générique de $\partial''\mathscr{N}'_g \cap U$, la fibre de $\mathscr{S}$ est isomorphe au lieu singulier d'un diviseur thêta ([M1], p. 363) et le lemme 2.3 montre que $\mathscr{S}$ est *lisse* en chacun de ces points. Il s'ensuit que $\mathscr{S}$ a exactement deux composantes dont la projection sur U contient $\partial''\mathscr{N}'_g$. On les notera $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}''$. L'une d'elles, par exemple $\mathscr{S}'$, contient s_0, l'autre $-s_0$, et on a $q(\mathscr{S}') = q(\mathscr{S}'')$. D'autre part, le lemme 2.2 montre que $\mathscr{S}$ est *lisse* au-dessus d'un point générique de $\partial'\mathscr{N}'_g \cap U$. La proposition suivante, qu'on admet provisoirement, montre que le degré de la fibre est 2. Montrons que cela entraîne le cinquième pas. De nouveau, $\mathscr{S}$ n'a que deux composantes dont la projection sur U contient $\partial'\mathscr{N}'_g \cap U$. Il ressort de la démonstration du lemme 2.4 que l'une de ces composantes doit contenir s_0. Mais, comme s_0 *n'est pas d'ordre deux* (puisque (A_0, θ_0) correspond à un point générique de $\mathscr{N}'_{g-1}$, donc n'est pas dans $\theta_{\text{null}, g-1}$), un point générique a_0 dans $(\Theta_0)_{s_0}$ n'est pas dans $(\Theta_0)_{-s_0}$ donc (lemme 2.3) $\mathscr{S}$ est lisse en les points s_0 et $-s_0$.

Par conséquent, $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}''$ sont les seules composantes de $\mathscr{S}$ qui dominent $\partial'\mathscr{N}'_g \cap U$ *ou* $\partial''\mathscr{N}'_g \cap U$. Toute composante $\mathscr{N}$ de $\mathscr{N}'_g \cap U$ passant par P_0 est la projection d'une composante de $\mathscr{S}_{\mathscr{N}}$ de $\mathscr{S}$. Mais $\mathscr{N} \cap U$ doit contenir $\partial'\mathscr{N}'_g \cap U$ ou $\partial''\mathscr{N}'_g \cap U$, de sorte que $\mathscr{S}_{\mathscr{N}}$ domine l'une de ces deux familles, donc est égal à $\mathscr{S}'$ ou à $\mathscr{S}''$. La seule composante de $\mathscr{N}'_g \cap U$ passant par P_0 est donc $q(\mathscr{S}') = q(\mathscr{S}'')$.

PROPOSITION 2.5. — *Le morphisme* $q: \mathscr{S} \to \partial'\mathscr{N}'_g \cap U$ *est degré* 2.

◆ Un point générique de $\partial'\mathscr{N}'_g \cap U$ correspond à un point (A, θ) de $\mathscr{A}_{g-1}$, pour lequel tout représentant symétrique Θ de θ est lisse, et à un élément a de A qui peut s'écrire $a = x - y$ avec $\mathscr{G}(x) = \mathscr{G}(y)$ (plus précisément $(x, y) \in \mathscr{C}'(A, \Theta)$). La fibre de $\mathscr{S}$ au-dessus de ce point est en bijection avec:

$$\operatorname{Sing}(\Theta . \Theta_a) = \{ x \in \Theta . \Theta_a \mid \mathscr{G}(x) = \mathscr{G}(x-a) \} \simeq \mathrm{pr}_1 \circ \varphi^{-1}(a),$$

où $\varphi: \Theta \times_{\mathbf{P}^{g-2}} \Theta \to A$ est le morphisme différence et pr_1 la première projection $\Theta \times_{\mathbf{P}^{g-2}} \Theta \to \Theta$. Il s'agit de calculer le degré de la restriction φ' de φ à $\mathscr{C}'(A, \Theta)$. Ce degré est pair puisque φ' se factorise par l'involution $(x, y) \mapsto (-y, -x)$ de $\mathscr{C}'(A, \Theta)$. On

va calculer le degré local de φ' au-dessus de l'origine de A. Soient $A \tilde{\times} A \to A \times A$ l'éclatement de la diagonale Δ et $\tilde{A} \to A$ celui de l'origine. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\psi}: A \tilde{\times} A & \longrightarrow & \tilde{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi: A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \mapsto & x - y. \end{array}$$

On note aussi $\tilde{\mathscr{C}}'(A, \Theta)$ le transformé strict de $\mathscr{C}'(A, \Theta)$ dans $A \tilde{\times} A$ et $\varepsilon: \tilde{\mathscr{C}}'(A, \Theta) \to \mathscr{C}'(A, \Theta)$ le morphisme induit. La restriction $\tilde{\varphi}'$ de $\tilde{\psi}$ à $\tilde{\mathscr{C}}'(A, \Theta)$ a pour image $\tilde{c}'(A, \theta)$, transformé strict de $c'(A, \theta)$ dans A. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathscr{C}}'(A, \Theta) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}'} & \tilde{c}'(A, \theta) \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{C}'(A, \Theta) & \underset{\varphi'}{\to} & c'(A, \theta). \end{array}$$

Les degrés de φ' et de $\tilde{\varphi}'$ sont égaux. On calcule le degré de $\tilde{\varphi}'$ sur l'image inverse l'origine. Remarquons que $\Delta \cap \mathscr{C}'(A, \Theta)$, isomorphe à $R(\mathscr{G})$, est irréductible. Son image inverse par ε est $\{(x, D_x) \mid x \in \Theta,\ D_x \in \mathbf{P}T_x\Theta \text{ et } D_x \in \mathbf{P}\operatorname{Ker} T_x \mathscr{G}\}$. Une composante en est bien sûr le transformé strict $\tilde{\mathscr{C}}_1$ de $\Delta \cap \mathscr{C}'(A, \Theta)$, mais il se peut qu'il y en ait d'autres; ce sont alors des familles du type:

$$\tilde{\mathscr{C}}_k = \{(x, D_x) \mid x \in Z_k,\ \operatorname{Dim} \operatorname{Ker} T_x \mathscr{G} \geqq k \quad \text{et} \quad D_x \in \mathbf{P}\operatorname{Ker} T_x \mathscr{G}\},$$

où k est un entier positif et où Z_k est une sous-variété de Θ. On va montrer que $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_1)$ est une *hypersurface* dans $\mathbf{P}T_0 A$, distincte de $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_k)$ pour $k > 1$. On identifie d'abord $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_1)$.

LEMME 2.6. — *La restriction du morphisme $\tilde{\varphi}'$ à $\tilde{\mathscr{C}}_1$ se factorise en*:

$$\tilde{\mathscr{C}}_1 \xrightarrow{\varepsilon} R(\mathscr{G}) \xrightarrow{\mathscr{G}} \Delta(\mathscr{G})_{\text{red}} \dashrightarrow \Delta(\mathscr{G})^*_{\text{red}} \subset \mathbf{P}T_0 A \simeq \alpha^{-1}(0),$$

où $\Delta(\mathscr{G})^*_{\text{red}}$ est la variété duale de $\Delta(\mathscr{G})_{\text{red}}$.

◆ Soit V un ouvert affine de A, soit θ une équation de $\Theta \cap V$ dans V et soit $\{D_1, \ldots, D_{g-1}\}$ une base de champs de vecteurs sur A. Le morphisme $\mathscr{G}$ s'étend sur V en un morphisme $\bar{\mathscr{G}}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Theta \cap V & & \\ & \swarrow & & \overset{\mathscr{G}}{\searrow} & \\ \bar{\mathscr{G}}: V & \to & \mathbf{C}^{g-1} - \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{P}^{g-2} \\ x & \mapsto & (D_1\theta(x), \ldots, D_{g-1}\theta(x)). & & \end{array}$$

Sur un ouvert dense $R(\mathscr{G})_0$ de $R(\mathscr{G})$, on a $T\Theta = TR(\mathscr{G}) \oplus K$, où $K = \operatorname{Ker} T\mathscr{G}$ est de rang 1, engendré en $x \in R(\mathscr{G})_0 \cap V$ par $\sum k_i(x) D_i$, avec :

$$\sum k_i(x) D_i \theta(x) = 0$$
$$\exists \lambda(x) \in \mathbf{C} \; \forall i \quad \sum_j D_i D_j \theta(x) k_j(x) = \lambda(x) D_i \theta(x).$$

La restriction de $\tilde{\varphi}'$ à $\tilde{\mathscr{C}}_1$ coïncide avec la composée :

$$\tilde{\mathscr{C}}_1 \xrightarrow{\varepsilon} R(\mathscr{G}) \dashrightarrow \mathbf{P} T_0 A$$
$$x \mapsto \sum k_i(x) D_i.$$

L'image inverse de l'hyperplan $T_{\mathscr{G}(x)} \Delta(\mathscr{G})_{\text{red}}$ par π est engendrée par $\bar{\mathscr{G}}(x)$ et $T\bar{\mathscr{G}}(T_x \Theta)$. Ses éléments ont pour coordonnées :

$$u_i = \sum_j D_i D_j \theta(x) t_j + \mu D_i \theta(x) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq g-1,$$

avec

$$t_j, \mu \in \mathbf{C} \qquad \text{et} \qquad \sum D_j \theta(x) t_j = 0.$$

Ces égalités entraînent aussitôt $\sum u_i k_i(x) = 0$, ce qui montre le lemme. ◆

Montrons que $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_1) = \Delta(\mathscr{G})^*_{\text{red}}$ est une hypersurface. Si ça n'est pas le cas, $\Delta(\mathscr{G})_{\text{red}} = (\Delta(\mathscr{G})^*_{\text{red}})^*$ (on est en caractéristique 0) est réglé par des droites qui ne passent pas par un point fixe. Cela contredit le lemme suivant :

LEMME 2.7. — *L'hypersurface $\Delta(\mathscr{G})_{\text{red}}$ n'est pas recouverte par des courbes rationnelles ne passant pas par un point fixe. En particulier, $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_1)$ est une hypersurface.*

◆ L'application de Gauss réduite induit un morphisme birationnel de sa ramification $R(\mathscr{G}^*)$ sur son discriminant $\Delta(\mathscr{G})_{\text{red}}$ (théorème 1.4), de sorte que $R(\mathscr{G}^*)$ est aussi recouverte par des courbes rationnelles, dont presque toutes ne passent pas par un point singulier de Θ^*. Leur image inverse dans Θ est alors rationnelle, puisque revêtement étale d'une courbe rationnelle, ce qui est absurde, car une variété abélienne ne contient pas de courbe rationnelle. ◆

Remarquons de plus que par tout point de $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_k)$ passe un sous-espace linéaire de $\mathbf{P} T_0 A$ de dimension $k-1$ contenu dans $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_k)$, de sorte que $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_k)$ est réglée en droites pour $k > 1$. Si sa variété duale est une hypersurface, elle est donc réglée en courbes rationnelles qui ne passent pas par un point fixe. On a donc toujours $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_k)^* \neq \Delta(\mathscr{G})_{\text{red}}$ (lemme 2.7), et, par réflexivité, $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_k) \neq \tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_1)$ pour $k > 1$.

Le degré de $\tilde{\varphi}'$ au-dessus de $\tilde{\varphi}'(\tilde{\mathscr{C}}_1)$ est donc celui de sa restriction à $\tilde{\mathscr{C}}_1$. Le lemme 2.6 et le théorème 1.4 montrent que ce degré est 2.

Pour terminer la démonstration de la proposition, il suffit de montrer que $\tilde{\varphi}'$ n'est pas ramifiée en un point générique de $\tilde{\mathscr{C}}_1$. Pour cela, il suffit de voir que le morphisme :

$$N_{\tilde{\mathscr{C}}_1/\tilde{\mathscr{C}}'(A,\Theta)} \to \tilde{\varphi}^* N_{\tilde{\varphi}(\tilde{\mathscr{C}}_1)/\tilde{C}'(A,\theta)} \simeq \tilde{\varphi}'^* \mathscr{O}_{C'(A,\theta)}(-1),$$

induit par $\tilde{\varphi}$ est génériquement injectif. Or, avec les notations de la démonstration du lemme 2.6, ce morphisme est tout simplement, sur $R(\mathscr{G})_0$, l'identité du fibré en droites K. La proposition est ainsi démontrée. ◆

Sixième et dernier pas: *le diviseur thêta d'une variété abélienne principalement polarisé correspondant à un point générique de $\mathscr{N}_g$ a comme seules singularités deux points doubles ordinaires opposés.*

On se place de nouveau localement. Avec les notations précédentes, il faut montrer que le morphisme $q: \mathscr{S} \to \mathscr{N}'_g \cap U$ est de degré deux. Cela résulte du fait que le degré de q au-dessus de $\partial' \mathscr{N}'_g \cap U$ est deux (proposition 2.5) et que q est étale au-dessus d'un point générique (lemme 2.2). D'autre part, il résulte aussi du lemme 2.2 que les composantes de $\mathscr{S}$ qui dominent $\mathscr{N}'_g$ sont génériquement lisses. Si on se place en un point s *lisse* sur $\mathscr{S}$ en lequel q est *étale*, il est facile de vérifier (en utilisant les équations de la chaleur) que le point s est double ordinaire sur le diviseur thêta correspondant.

On a donc terminé la démonstration (par récurrence) du résultat principal de cet article.

4. Intersection des deux composantes de $\mathscr{N}_g$

Nous allons maintenant donner une description partielle de l'intersection de $\theta_{\text{null},g}$ et de $\mathscr{N}'_g$. Il est classique que $\theta_{\text{null},4} \cap \mathscr{N}'_4$ est *irréductible non réduit*. La situation se complique en dimension supérieure:

THÉORÈME 4.1. – *Pour $g \geqq 5$, l'intersection $\theta_{\text{null},g} \cap \mathscr{N}'_g$ est réductible non réduite.*

◆ On se place sur la frontière $\partial \mathscr{A}_g$. L'intersection de $\partial\theta_{\text{null},g}$ avec la fibre de $p: \partial \mathscr{A}_g \to \mathscr{A}_{g-1}$ au-dessus d'un point générique (A, θ) de $\mathscr{A}_{g-1}$ est le diviseur $2_A(\Theta)$, indépendant du choix du diviseur Θ symétrique. Son intersection avec $\partial \mathscr{N}'_g$ est $c'(A, \theta)$. La famille $\mathbf{2}_A(R(\mathscr{G}))$ est une composante de multiplicité 2 de l'intersection $\mathbf{2}_A(\Theta).c'(A, \theta)$. Notant $[\Theta]$ la classe de cohomologie d'un diviseur thêta, la proposition 2.3 de [M1] donne:

$$2[\mathbf{2}_A(R(\mathscr{G}))] = 2^{2g-5} g [\Theta]^2$$

$$[\mathbf{2}_A(\Theta).c'(A, \Theta)] = 2^{2g-5}((g+1)!/6 - 2^{2g-4})[\Theta]^2.$$

Pour $g=4$, ces deux classes sont égales, mais plus pour $g \geqq 5$. L'intersection $\mathbf{2}_A(\Theta).c'(A, \theta)$ se décompose alors en $2.\mathbf{2}_A(R(\mathscr{G})) + d(A, \theta)$, où $d(A, \theta)$ est une sous-variété non vide de codimension pure deux de A ne contenant pas $\mathbf{2}_A(R(\mathscr{G}))$.

On a ainsi mis en évidence deux sous-variétés de $\partial\theta_{\text{null},g} \cap \partial \mathscr{N}'_g$: d'une part l'adhérence ∂D_g de la réunion des $d(A, \theta)$, pour (A, θ) variant dans $\mathscr{A}_{g-1}$, d'autre part ∂R_g, irréductible, adhérence de la réunion des $\mathbf{2}_A(R(\mathscr{G}))$.

On se place localement, ce qui permet d'introduire un schéma $\mathscr{S}$, qu'on décompose ensemblistement en la réunion de $\mathscr{S}_{\text{null}}$ («points d'ordre deux») et de $\mathscr{S}'$. La famille ∂R_g est dans l'image de $\mathscr{S}_{\text{null}} \cap \mathscr{S}'$, alors que ce n'est pas le cas de ∂D_g.

Comme l'intersection $\theta_{\text{null},g} \cap \mathscr{N}'_g$ est de codimension pure deux dans $\mathscr{A}_g^*$, ∂D_g est contenu dans la frontière d'une sous-variété D_g de $\theta_{\text{null},g} \cap \mathscr{N}'_g$. Comme ∂D_g n'est pas dans l'image de $\mathscr{S}_{\text{null}} \cap \mathscr{S}'$, il en est de même pour D_g.

En ce qui concerne ∂R_g, on remarque que $\mathscr{S}$ est localement intersection complète des $g+1$ équations qui la définissent au-dessus d'un ouvert de $\partial\mathscr{A}_g$ qui rencontre ∂R_g : cela résulte de la proposition 3 de [BD], qui montre que si une variété abélienne principalement polarisée A est simple, qu'un diviseur Θ est lisse et que le point a de A est d'ordre infini, alors $\dim \operatorname{Sing}(\Theta . \Theta_a) \leqq 0$. En particulier, $\mathscr{S}$ est localement connexe en codimension un ([Ha], theorem 3.4) et la sous-variété $\mathscr{S}_{\text{null}} \cap \mathscr{S}'$ qui domine ∂R_g doit être contenue comme diviseur dans une composante de $\mathscr{S}_{\text{null}} \cap \mathscr{S}'$. Celle-ci est génériquement finie sur une composante R_g de $\theta_{\text{null},g} \cap \mathscr{N}'_g$, dont la frontière contient ∂R_g.

Les deux variétés R_g et D_g sont distinctes (l'une est dans l'image de $\mathscr{S}_{\text{null}} \cap \mathscr{S}'$, l'autre pas). Le principe d'Andreotti et Mayer ([D1], théorème 5.4.3) entraîne que l'intersection $\theta_{\text{null},g} \cap \mathscr{N}'_g$ n'est pas réduite le long de R_g. ◆

BIBLIOGRAPHIE

[AM] A. ANDREOTTI et A. MAYER, *On Period Relations for Abelian Integrals on Algebraic Curves. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 1967, p. 189-238.

[ACGH] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Geometry of Algebraic Curves, I.*, Springer Verlag, 1985.

[B] A. BEAUVILLE, *Prym Varieties and the Schottky Problem. Invent. Math.*, 41, 1977, p. 149-196.

[BD] A. BEAUVILLE et O. DEBARRE, *Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.*, Serie IV, 14, 1987, p. 613-623.

[D1] O. DEBARRE, *Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension* 3. *Duke Math. J.*, 56, 1988, p. 221-273.

[D2] O. DEBARRE, *Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes. Comp. Math.*, 58, 1986, p. 3-11.

[F] E. FREITAG, *Holomorphic Tensors on Subvarieties of the Siegel Modular Variety*. In: Automorphic Forms of Several Variables, Taniguchi Symposium, Katata, 1983, Birkhäuser, 1988, p. 93-113.

[H] J. HARRIS, *Galois Groups of Enumerative Problems. Duke Math. J.*, 46, 1979, p. 685-724.

[Ha] R. HARTSHORNE, *Complete Intersections and Connectedness. Amer. J. of Math.*, 84, 1962, p. 497-508.

[L] R. LAZARSFELD, *A Barth-type Theorem for Branched Coverings of Projective Space. Math. Ann.*, 249, 1980, p. 153-162.

[M1] D. MUMFORD, *On the Kodaira Dimension of the Siegel Modular Variety*, Springer Lecture Notes 997, Springer Verlag, New York, 1983, p. 348-375.

[M2] D. MUMFORD, *On the Equations Defining Abelian Varieties I. Invent. Math.*, 1, 1966, p. 287-354.

[SV1] R. SMITH et R. VARLEY, *On the Geometry of* $\mathscr{N}_0$. *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino*, 42, 1984, p. 29-37.

[SV2] R. SMITH et R. VARLEY, *Components of the Locus of Singular Theta Divisors in Genus* 5. *In Algebraic Geometry, Sitges* 1983, Springer Lecture Notes in Mathematics 1124, Springer Verlag, 1985, p. 338-416.

[T] B. TEISSIER, *The Hunting of Invariants in the Geometry of Discriminants*. In: "Real and Complex Singularities, Oslo 1976", Proceedings of the Nordic Summer School/NAVF, 1977, Sijthoff & Noordhoff.

[Te] M. TEIXIDOR, *Half-canonical Series on Algebraic Curves. Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 302, 1987, p. 99-115.

(Manuscrit reçu le 23 mars 1990,
révisé le 15 mai 1992.)

O. DEBARRE
Université Paris-XI
mathématiques,
Bât. 425,
91405 Orsay Cedex.