ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

B. HELFFER
J. NOURRIGAT
X. P. WANG

Sur le spectre de l'équation de Dirac (dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$) avec champ magnétique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 22, n° 4 (1989), p. 515-533
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_4_515_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 515 à 533.

SUR LE SPECTRE DE L'ÉQUATION DE DIRAC (DANS $\mathbb{R}^2$ OU $\mathbb{R}^2$) AVEC CHAMP MAGNÉTIQUE

PAR B. HELFFER, J. NOURRIGAT ET X. P. WANG

1. Introduction et énoncé des résultats

On s'intéresse dans cet article à la nature du spectre de l'opérateur de Dirac avec champ magnétique opérant *a priori* dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ et défini par :

$$D_A = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j (D_{x_j} - A_j(x)) + \alpha_4 \tag{1.1}$$

où $A(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ (le potentiel magnétique), où les α_j sont des matrices 4×4 définis par :

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leqq j \leqq 3), \qquad \alpha_4 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

et où les σ_j ($j = 1, \ldots$) sont trois matrices hermitiennes 2×2 (matrices de Pauli) satisfaisant aux relations :

$$\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\delta_{j,k}; \qquad \sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i\sigma_2 \tag{1.3}$$

On peut prendre (*cf.* [LA-LI]) par exemple :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

On s'intéressera également à l'analogue dans $\mathbb{R}^2$. Il nous suffit alors d'une fonction $A_1(x)$, C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (à valeurs réelles) et D_A est défini par :

$$D_A = \alpha_1 (D_{x_1} - A_1(x)) + \alpha_2 D_{x_2} + \alpha_4 \tag{1.5}$$

Rappelons tout d'abord deux résultats sans doute classiques mais dont nous redonnerons une démonstration au paragraphe 2 (résultats vrais pour $n = 2, 3$).

PROPOSITION 1.1. — *L'opérateur* D_A *est essentiellement auto-adjoint.*

On considère alors son extension auto-adjointe et on a la :

PROPOSITION 1.2. — *Le spectre de* D_A *est disjoint de l'intervalle* $]-1, +1[$. *Le spectre et le spectre essentiel de* D_A *sont tous deux symétriques par rapport à l'origine.*

Rappelons maintenant la relation classique :

$$D_A^2=(P_A+1)\,I_4+i\sum_{j<k}\alpha_j\alpha_k B^{jk} \tag{1.6}$$

où $B^{jk}=(\partial A_j/\partial x_k)-(\partial A_k/\partial x_j))$ désigne le champ magnétique et $P_A=\sum_j(D_{x_j}-A_j)^2$ désigne l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.

Dans le cas de la dimension 3, on identifiera la 2-forme champ magnétique $\sum_{j<k} B^{jk}\,dx_j\wedge dx_k$ avec le vecteur $B(x)=(B_1, B_2, B_3)$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$B_1=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3},\qquad \ldots \tag{1.7}$$

On introduit une suite de fonctions $\varepsilon(x)$ $(r\geqq 0)$ dont les majorations vont exprimer une croissance tempérée de $B(x)$ à l'infini. On pose :

$$\varepsilon_0(x)=|B(x)|$$

et, si $r\geqq 1$:

$$\varepsilon_r(x)=\frac{\sum_{|\alpha|=r}|D^\alpha B|}{1+\sum_{|\alpha|<r}|D^\alpha B|}\overset{\text{def}}{\equiv}\frac{m_r(x)}{1+\sum_{j=0}^{r-i}m_j(x)} \tag{1.8}$$

On introduit pour tout $r\geqq 0$, l'hypothèse suivante :

(H_r) Il existe une suite de boules B_n disjointes, de rayon $\geqq 1$, telles que la fonction $\varepsilon_r(x)$ soit bornée sur la réunion de ces boules.

On démontrera le :

THÉORÈME 1.3. — *Si* $n=2$ *ou* 3 *et s'il existe un entier* $r\geqq 0$ *tel que l'hypothèse* (H_r) *soit vérifiée, alors la résolvante de* D_A *n'est pas compacte.*

Il est clair que (H_r) est une hypothèse très faible satisfaite dans des cas très variés comme :

(1) le cas où $A(x)$ est polynômial;

(2) le cas où $|B(x)|\to 0$ (où le résultat est connu compte tenu d'un résultat de Leinfelder [LE] (*cf.* [C.F.K.S.], Thm. 6.1).

Nous conjecturons que la résolvante de l'opérateur D_A défini en (1.5) (sans champ électrique) n'est jamais compacte. Il est alors naturel de caractériser le spectre essentiel de D_A [qui est clairement le complémentaire de $]-1, +[$ dans le cas où $B(x)\to 0$]. Pour

cela, nous introduisons l'hypothèse plus forte :

(H'_r) Il existe une suite de boules B_n disjointes, dont les rayons tendent vers $+\infty$, telles que la fonction $\varphi_r(x)$ restreinte à la réunion de ces boules, tende vers 0 à l'infini.

On a le :

THÉORÈME 1.4. — *Si $n=3$, et s'il existe un entier $r\geqq 0$ tel que l'hypothèse (H'_r) soit vérifiée, alors le spectre essentiel de l'opérateur D_A est le complémentaire de l'intervalle* $]-1, +1[$.

En particulier, si les composantes de $B(x)$ sont des polynômes de degré $\leqq r$, l'hypothèse (H'_{r+1}) est vérifiée, donc, si $n=3$, le spectre essentiel de D_A est le complémentaire de l'intervalle $]-1, +1[$. Ce phénomène est *spécifique* de la dimension 3 car le résultat devient faux en dimension 2, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 1.5. — *Si $n=2$ et si $|B(x)|\to+\infty$ quand $|x|\to+\infty$, le spectre essentiel de D_A ne peut contenir d'autres points que 1 et -1.*

Pour étudier ce spectre essentiel dans d'autres cas, en dimension 2, on introduit un ensemble $\mathscr{B}_\infty$ de réels, analogue à celui de [HE-MO], lui-même inspiré de travaux de Helffer-Nourrigat [HE-NO]. On désigne par $\mathscr{B}_\infty$ l'ensemble des réels l tels qu'il existe une suite (x_n) tendant vers l'infini, telle que $B(x_n)=-(\partial A_1/\partial x_2)$ (x_n) tende vers l. On note S_∞ l'ensemble suivant :

$$S_\infty=\{\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda=\pm\sqrt{1+2k|l|},\ k\in\mathbb{N},\ l\in\mathscr{B}_\infty\} \qquad \text{si} \quad 0\notin\mathscr{B}_\infty$$

$$S_\infty=]-\infty,\ -1]\cup[1,\ +\infty[\qquad \text{si} \quad 0\in\mathscr{B}_\infty$$

qui est évidemment fermé (mais qui peut être vide, par exemple si $|B(x)|\to\infty$).

THÉORÈME 1.6. — *Si $n=2$ et si l'une des fonctions $\varepsilon_0(x)$ ou $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 à l'infini alors le spectre essentiel de D_A est formé de l'ensemble S_∞, ainsi que des points 1 et -1.*

Si $\varepsilon_r(x)$ tend vers 0 à l'infini $(r\geqq 2)$, le spectre essentiel contient les points 1 et -1.

Ce travail a son origine dans les résultats concernant l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique P_A. A la suite des travaux de J. Avron, I. Herbst et B. Simon [AV-HE-SI], A. Dufresnoy [DUF], S. I. Kuroda [KUR], et surtout des plus récents de A. Iwatsuka [IWA] (1), (2), un théorème de [HE-MO], combiné avec une condition nécessaire d'Iwatsuka [IWA], caractérise les champs magnétiques pour lesquels la résolvante de P_A est compacte lorsque le champ électrique est nul, et lorsque la fonction $\varepsilon_r(x)$ définie en (1.8) est bornée. Il faut et il suffit alors, pour que la résolvante soit compacte, que :

$$\sum_{j=0}^{r} m_j(x)\to\infty \quad \text{quand} \quad |x|\to\infty$$

Il était alors naturel de se demander si on avait des résultats analogues pour l'opérateur de Dirac. Le théorème 1.3 montre qu'il n'en est rien, puisque, sous les hypothèses de [HE-MO], la résolvante de D_A n'est jamais compacte. Nous pouvons conjecturer que la résolvante de D_A n'est jamais compacte lorsque le champ électrique est nul.

Nous renvoyons à [BE-GE] pour des résultats sur le spectre ponctuel. Dans certains cas, l'appartenance de $\{1\}$ et $\{-1\}$ au spectre essentiel résulte du fait que Ker $(D_A \pm L)$ est de dimension infinie. Cela est lié au résultat de Aharonov-Casher dont on trouvera une présentation au paragraphe 6.4 de [CFKS]. Pour d'autres calculs dans des cas particuliers ou annexes, nous renvoyons à [GA-LA], [AV-SE], [LO-YA], ... En particulier, on trouvera un noyau de dimension infinie chaque fois qu'on aura trouvé une solution φ de $\Delta\varphi = B$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que e^{φ} ou $e^{-\varphi}$ soit dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ (*cf.* la démonstration de [AH-CA], p. 126-127 dans [CFKS] et [AV-SE]).

Nous tenons à remercier A. Mohamed pour d'utiles conversations autour de la proposition 1.5 et du théorème 1.6, et M. Loss pour d'utiles remarques.

2. Préliminaire

Preuve de la proposition 1.1 — Il suffit de montrer que :

$$u \in L^2 \quad \text{et} \quad (D_A \pm i)u = 0 \Rightarrow u = 0$$

Soit donc $u \in L^2$ tel que $(D_A + i)\, u = 0$. Remarquons que u est C^∞, d'après l'ellipticité locale du système de Dirac. Soit χ une fonction réelle égale à 1 sur la boule $B(0, 1)$, et à support compact. On a, pour tout $n \geqq 1$

$$(D_A + i)\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right)u\right) = -i \sum_{j=1}^{3} \frac{\alpha_j}{n} \frac{\partial \chi}{\partial x_j}\left(\frac{x}{n}\right)u$$

et, par conséquent

$$\left\|\chi\left(\frac{x}{n}\right)u\right\|^2 + \left\|D_A\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right)u\right)\right\|^2 = \left\|(D_A + i)\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right)u\right)\right\|^2 \leqq \frac{C}{n^2}\|u\|^2$$

où $C > 0$ est indépendant de n. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $u = 0$.

Preuve de la proposition 1.2. — On introduit l'opérateur suivant, agissant dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$:

$$D_A^{red} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_j (D_{x_j} - A_j(x)) \tag{2.1}$$

Pour tout $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$, on peut écrire $(D_A - \lambda)\, \Psi = (f_1, f_2)$, avec

$$f_1 = D_A^{red} \Psi_2 + (1 - \lambda)\Psi_1$$
$$f_2 = D_A^{red} \Psi_1 - (1 + \lambda)\Psi_2$$

On en déduit, en intégrant par parties que :

$$(1 - \lambda)\|\Psi_1\|^2 + (1 + \lambda)\|\Psi_2\|^2 = \mathrm{Re}[(f_1, \Psi_1) - (f_2, \Psi_2)]$$

Si $\lambda \in]-1, 1[$, soit $c(\lambda) = \inf(1-\lambda, 1+\lambda) > 0$. On en déduit que :

$$c(\lambda)\|\Psi\| \leqq \|f\|, \qquad \forall \Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$$

de sorte que λ n'est pas dans le spectre de D_A.

Pour prouver la seconde affirmation, il suffit de remarquer que, si l'on pose $\gamma = \alpha_1 \ldots \alpha_4$, on a $D_A \gamma = -\gamma D_A$.

La preuve des théorèmes 1.3 à 1.6 utilisera les deux remarques suivantes :

REMARQUE 2.1. — *Soit λ un réel tel que $|\lambda| \geqq 1$. Si $\sqrt{\lambda^2-1}$* est dans le spectre essentiel de D_A^{red} [*défini en* (2.1)], *alors λ est dans le spectre essentiel de* D_A.

Démonstration. — Si $k = \sqrt{\lambda^2-1}$ est dans le spectre essentiel de D_A^{red}, il existe une suite (φ_n) dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, engendrant un espace de dimension infinie, telle que $\|\varphi_n\| = 1$ et $\|(D_A^{red} - k)\varphi_n\| \to 0$. Si $\lambda > 1$, posons

$$\Psi_n = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda+1}\,\varphi_n \\ \sqrt{\lambda-1}\,\varphi_n \end{bmatrix}$$

On voit facilement que $\|(D_A - \lambda)\Psi_n\|$ tend vers 0. Le raisonnement est identique si $\lambda < -1$.

REMARQUE 2.2. — *Pour montrer qu'un réel λ est dans le spectre essentiel de D_A, il suffit donc de construire une suite de fonctions φ_n dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, à supports dans des boules B_n disjointes, telles que*

$$\|\varphi_n\| = 1 \qquad et \qquad \|(D_A^{red} - \sqrt{\lambda^2-1})\varphi_n\| \to 0 \tag{2.2}$$

Pour prouver que la résolvante de D_A n'est pas compacte, il suffit de construire une suite de fonctions φ_n dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, à supports dans des boules B_n disjointes, telles que

$$\|\varphi\| = 1 \qquad et \qquad \|(D_A^{red} - \sqrt{\lambda^2-1})\varphi_n\| \leqq C \tag{2.2}$$

où $C > 0$ est indépendant de n.

Les démonstrations de (2.2) et (2.2′) étant très voisines, nous ne détaillerons pas la preuve du théorème 1.3.

Preuve du théorème 1.4 *quand $r = 0$.* — Soit λ un réel tel que $|\lambda| \geqq 1$. Soient (B_n) la suite des boules de l'hypothèse (H_0'), et (x_n) leurs centres. Pour tout n, soit $A^n(x)$ le potentiel magnétique défini :

$$A^n(x) = \int_0^1 t\,B(x_n + t(x - x_n)) \wedge (x - x_n)\,dt$$

Le rotationnel de A^n est égal à B. Il existe donc une fonction réelle $\varphi_n(x)$ telle que $\operatorname{grad}\varphi_n = A - A^n$. Pour tout $\rho \geqq 1$, on a évidemment

$$\sup_{B(x_n, \rho)} |A^n(x)| \leqq \rho \sup_{B(x_n, \rho)} |B(x)|$$

Il existe un entier $n_0(\rho)$ tel que, pour $n \geqq n_0(\rho)$, la boule $B(x_n, \rho)$ soit contenue dans B_n et

$$\sup_{B(x_n,\ \rho)} |B(x)| \leqq \frac{1}{\rho^2} \quad \text{donc} \quad \sup_{B(x_n,\ \rho)} |A^n(x)| \leqq \frac{1}{\rho} \tag{2.3}$$

Soit q un vecteur de $\mathbb{C}^2$ tel que $|q| = 1$ et $\sigma_3 = q$. Soit χ une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, à support dans la boule unité, dont la norme L^2 est égale à 1. Posons, pour tout $\rho \geqq 1$ et pour tout $n \geqq n_0(\rho)$

$$\Phi_{n,\rho}(x) = \frac{1}{\rho^{3/2}} \chi\left(\frac{x - x_n}{\rho}\right) e^{i\varphi_n(x) + ikx_3} q$$

où $k = \sqrt{\lambda^2 - 1}$. On vérifie facilement que :

$$\|\Phi_{n,\rho}\| = 1 \quad \operatorname{supp} \Phi_{n,\rho} \subset B_n$$

et, d'après (2.3), il existe $C > 0$, indépendant de ρ et n, tel que :

$$\|(D_A^{\text{red}} - \sqrt{\lambda^2 - 1})\, \Phi_{n,\rho}\| \leqq \frac{C}{\rho}$$

Soit φ_k la fonction obtenue en faisant $\rho = k$ et $n = n_0(k)$. Cette suite de fonctions vérifie (2.2). D'après les remarques 2.1 et 2.2, λ est donc dans le spectre essentiel de D_A.

REMARQUE 2.3. — La même méthode prouve que, si $n = 2$, et si $\varepsilon_0(x)$ tend vers 0 à l'infini, le spectre essentiel est $S_\infty =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$, et aussi que, si $n = 2$ et si l'hypothèse (H'_0) est vérifiée, le spectre essentiel contient les points 1 et -1.

Lorsque $r = 1$, le théorème 1.4 sera démontré au paragraphe suivant. Il s'en déduira facilement pour tout $r \geqq 2$ grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. — *S'il existe $r \geqq 2$ tel que l'hypothèse (H'_r) soit vérifiée, alors l'une des hypothèses (H'_0) ou (H'_1) est vérifiée.*

Démonstration. — On suppose que (H'_r) est vérifiée ($r \geqq 2$) et que (H'_0) ne l'est pas. Soient (B_n) la suite des boules de l'hypothèse (H'_r), x_n leurs centres, et R_n leurs rayons. Puisque (H'_0) n'est pas vérifiée, il existe y_n tel que $|y_n - x_n| \leqq R_n/2$ et tel que la suite $|B(y_n)|$ ne tende pas vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $C_0 > 0$ tel que :

$$|B(y_n)| \geqq C_0 \tag{2.4}$$

Pour tout $\rho \geqq 1$, soit z_n un point tel que :

$$|z_n - y_n| \leqq \rho \quad \text{et} \quad |B(z_n)| = \sup_{|z - y_n| \leqq \rho} |B(z)| \tag{2.5}$$

Nous allons démontrer le lemme suivant:

LEMME 2.5. — *Avec les notations ci-dessus, il existe* $C>0$ *et* $a>0$, *indépendants de* ρ, *et, pour tout* $\rho\geqq 1$, *il existe un entier* $n_0(\rho)$, *tels que*

$$\left.\begin{array}{l} n\geqq n_0(\rho),\quad |\alpha|<r \\ |x-z_n|\leqq a\rho \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(z_n, a_\rho)\subset B_n \qquad et \qquad |\partial_x^\alpha B(x)|\leqq \frac{C}{\rho^{|\alpha|}}|B(x)|$$

Si B'_k est la boule de centre $z_{n_0}(k)$ (pour $\rho=k$) et de rayon a k, on voit que l'hypothèse (H'_1) est vérifiée dans la suite des boules B'_k. La proposition 2.3 est donc une conséquence du lemme.

Preuve du lemme. — Posons:

$$M(x,\rho)=1+\sum_{|\alpha|<r}|\partial_x^\alpha B(x)|\rho^{|\alpha|}$$

Une telle fonction apparaît dans un contexte différent dans [HE-NO] (§ 3, chap. IX).

D'après la définition (1.7), on a:

$$\sum_{|\alpha|=r}|D_x^\alpha B(x)|\leqq \varepsilon_r(x)M(x,\rho), \qquad \forall \rho\geqq 1.$$

La formule de Taylor nous montre que, si $|x-y_n|\leqq 2\rho$, on a

$$M(x,\rho)\leqq C_1 M(y_n,\rho)+C_1\rho^r \sup_{|y-y_n|\leqq 2\rho}\varepsilon_r(y)M(y,\rho)$$

où C_1 est indépendant de ρ. D'après l'hypothèse (H'_r), il existe un entier $n_1(\rho)$ tel que:

$$n\geqq n_1(\rho) \quad \Rightarrow \quad B(y_n, 2\rho)\subset B_n \qquad \text{et} \qquad \sup_{|y-y_n|\leqq 2\rho} C_1\rho^r\varepsilon_r(y)\leqq\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, si $n\geqq n_1(\rho)$, on a l'implication:

$$|y-y_n|\leqq 2\rho \quad \Rightarrow \quad M(y,\rho)\leqq 2C_1 M(y_n,\rho). \tag{2.6}$$

Posons maintenant:

$$T_n(x)=\sum_{|\alpha|<r}\partial_x^\alpha B(y_n)\frac{(x-y_n)^\alpha}{\alpha!}.$$

D'après les équivalences de normes sur l'espace des polynômes de degré $\leqq r$, il existe $C_2>0$ et $C_3>0$ tels que:

$$\sup_{|x-y_n|\leqq\rho}|T_n(x)|\geqq\frac{1}{C_2}\sum_{|\alpha|<r}|\partial_x^\alpha B(y_n)|\rho^{|\alpha|}\geqq\frac{1}{C_3}M(y_n,\rho).$$

On a utilisé (2.4). La formule de Taylor nous montre que:

$$|x-y_n| \leqq \rho \quad \Rightarrow \quad |B(x)-T_n(x)| \leqq C_4 \rho^r \sup_{|y-y_n| \leqq \rho} \varepsilon_r(y) M(y, \rho).$$

Par conséquent, d'après (2.6):

$$\sup_{|x-y_n| \leqq \rho} |B(x)| \geqq \sup_{|x-y_n| \leqq \rho} |T_n(x)| - \sup_{|x-y_n| \leqq \rho} |B(x)-T_n(x)|$$

$$\geqq \frac{1}{C_3} M(y_n, \rho) - C_4 \rho^r \left(\sup_{|y-y_n| \leqq \rho} \varepsilon_r(y) \right) \times 2 C_1 M(y_n, \rho).$$

Il existe un entier $n_0(\rho) \geqq n_1(\rho)$ tel que:

$$n \geqq n_0(\rho) \quad \Rightarrow \quad 2 C_4 C_1 \rho^r \sup_{|y-y_n| \leqq \rho} \varepsilon_r(y) \leqq \frac{1}{2 C_3}.$$

Si $n \geqq n_0(\rho)$, et si z_n est un point vérifiant (2.5), on a donc:

$$|B(z_n)| = \sup_{|x-y_n| \leqq \rho} |B(x)| \geqq \frac{1}{2 C_3} M(y_n, \rho).$$

En utilisant (2.6), on en déduit que:

$$|x-z_n| \leqq \rho \quad \text{et} \quad |\alpha| < r \quad \Rightarrow \quad \rho^{|\alpha|} |\partial_x^\alpha B(x)| \leqq M(x, \rho) \leqq 4 C_1 C_3 |B(z_n)|.$$

Si $a = \inf(1, 1/8 C_1 C_3)$, on obtient:

$$|x-z_n| \leqq a\rho \quad \Rightarrow \quad |\partial_x B(x)| \leqq \frac{8 C_1 C_3}{\rho} |B(x)|$$

La proposition 2.3 est donc démontrée.

3. — Étude en dimension 3

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème 1.4 lorsque $r=1$.

3.1. SITUATION LOCALE. — On considère un potentiel $A_\rho = (A_{1,\rho}, A_{2,\rho}, A_{3,\rho})$, dépendant d'un paramètre $\rho \geqq 1$. On note $B_\rho = (B_{1,\rho}, B_{2,\rho}, B_{3,\rho})$ le champ magnétique associé, défini comme en (1.6). On suppose que B_ρ est aussi de classe C^1, et que:

(H_1) On a $|B_\rho(0)| \geqq 1$!

(H_2) On a, si $|x| \leqq \rho$, l'inégalité $|\partial_x B(x)| \leqq (1/\rho) |B_\rho(0)|$

On pose alors:

$$P_\rho = \sum_{j=1} \sigma_j (D_{x_j} - A_{j,\rho}). \tag{3.1}$$

Lorsque $r=1$, le théorème 1.4 sera une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *ci-dessus. Pour tout* $\lambda\in\mathbb{R}$ *et pour tout* $\rho\geqq 1$, *il existe une fonction* $\Psi_\rho\in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ *telle que:*

$$\|\Psi_\rho\|=1, \qquad \operatorname{supp}\Psi_\rho\subset B(0,\rho) \tag{3.2}$$

$$\|(P_\rho-\lambda)\Psi_\rho\|\leqq\frac{C}{\rho} \tag{3.3}$$

où $C>0$ *est indépendant de* ρ.

La preuve de cette proposition montrera que, si B_ρ est de classe C^∞, Ψ_ρ l'est aussi. Le théorème 1.4 (pour $r=1$) sera déduit de cette proposition dans la section 3.4. Pour prouver la proposition, nous allons effectuer un difféomorphisme pour nous ramener au cas où le potentiel A_ρ vérifie une hypothèse supplémentaire, (3.6).

3.2. UN DIFFÉOMORPHISME

PROPOSITION 3.2. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *de la proposition* 3.1, *pour tout* $\rho\geqq 1$, *il existe un difféomorphisme local de classe* C^2, *noté* $y\to x(y)$, *défini pour* $|y|\leqq a\rho$, *(où* $a>0$ *est indépendent de* ρ), *tel que:*

(1) *On a* $x(0)=0$, *et la différentielle à l'origine de* $y\to x(y)$ *est orthogonale.*

(2) *Il existe* $C>0$, *indépendant de* ρ, *tel que:*

$$|\partial_y^\alpha x_j(y)|\leqq C\rho^{1-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |\alpha|\leqq 2 \quad \text{et} \quad |y|\leqq a\rho \tag{3.4}$$

(3) *Si on pose:*

$$\tilde{A}_{j,\rho}(y)=\sum_{k=1}^{3} A_{k,\rho}(x(y))\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y) \tag{3.5}$$

et si $\tilde{B}_\rho$ *est le champ associé comme en* (1.6), *on a:*

$$\tilde{B}_{1,\rho}(0,0,y_3)=\tilde{B}_{2,\rho}(0,0,y_3)=0 \quad \text{si} \quad |y_3|\leqq a\rho \quad \text{et} \quad |\tilde{B}_{3,\rho}(0)|=|B(0)|\geqq 1. \tag{3.6}$$

Démonstration. — Soit $U(x)=B_\rho(x)/|B_\rho(x)|$. Il existe une application $t\to\varphi(t)$ de classe C^2, définie dans un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[-a\rho, +a\rho]$ (où $a>0$ est indépendant de ρ), à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, telle que:

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt}=U_j(\varphi(t)), \qquad j=1,2,3 \quad \text{et} \quad \varphi(0)=0.$$

Il existe $C>0$, indépendant de ρ, tel que:

$$|\partial_t^\alpha\varphi(t)|\leqq C\rho^{1-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |t|\leqq a\rho \quad \text{et} \quad |\alpha|\leqq 2.$$

On peut trouver des vecteurs $n_1(t)$ et $n_2(t)$ tels que le trièdre $(n_1(t), n_2(t), \varphi'(t))$ soit orthonormé direct. De plus, il existe $C>0$ tel que:

$$|\partial_t^\alpha n_j(t)|\leqq C\rho^{-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |t|\leqq a\rho \quad \text{et} \quad |\alpha|\leqq 1.$$

Il existe une application $y \to x(y)$ définie pour $|y| \leqq a\rho$, de classe C^2, telle que:

(1) On a: $x(0, 0, y_3) = \varphi(y_3)$ si $|y_3| \leqq a\rho$.

(2) On a: $(\partial x/\partial y_j)(0, 0, y_3) = n_j(y_3)$ si $|y_3| \leqq a\rho$ et $j = 1,2$.

(3) Il existe $C > 0$, indépendant de ρ, tel que: (3.4) soit vérifié.

Si $\tilde{B}_\rho$ est le champ magnétique associé au potentiel défini en (3.5), et si (j, k, l) forme une permutation circulaire de (1, 2, 3), on a:

$$\tilde{B}_j = B_1\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_k}\frac{\partial x_3}{\partial y_l} - \frac{\partial x_3}{\partial y_k}\frac{\partial x_2}{\partial y_l}\right) + B_2\left(\frac{\partial x_3}{\partial y_k}\frac{\partial x_1}{\partial y_l} - \frac{\partial x_1}{\partial y_k}\frac{\partial x_3}{\partial y_l}\right) + B_3\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_k}\frac{\partial x_2}{\partial y_l} - \frac{\partial x_2}{\partial y_k}\frac{\partial x_1}{\partial y_l}\right). \tag{3.7}$$

En tout point $(0, 0, y_3)$, la matrice $(\partial x_j/\partial y_k)$ est une matrice de rotation, d'après ce qui précède. Par conséquent:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_j(0, 0, y_3) &= \sum_{k=1}^{3} B_k(\varphi(y_3))\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(0, 0, y_3) \\ &= |B(\varphi(y_3))| \sum_{k=1}^{3} U_k(\varphi(y_3))\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(0, 0, y_3) \\ &= |B(\varphi(y_3))| \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial y_3}(0, 0, y_3)\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(0, 0, y_3).\end{aligned}$$

Les égalités (3.6) s'en déduisent aussitôt. La proposition est démontrée.

On voit que le difféomorphisme inverse, que l'on notera $x \to \theta_\rho(x)$, est défini pour $|x| \leqq b\rho$, où $b \in]0, 1[$ est indépendant de ρ. Posons

$$\tilde{\sigma}_j(y) = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \frac{\partial y_j}{\partial x_k}(x(y)) \tag{3.8}$$

et

$$Q_\rho = \sum_{j=1}^{3} \tilde{\sigma}_j(y)[D_{y_j} - \tilde{A}_{j,\rho}(y)]. \tag{3.9}$$

On voit que, pour tout $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$$(P_\rho - \lambda)(\Psi \circ \theta_\rho) = ((Q_\rho - \lambda)\Psi) \circ \theta_\rho. \tag{3.10}$$

La proposition 3.1 résultera donc de son anologue pour le potentiel $\tilde{A}_\rho$, mais le difféomorphisme ci-dessus remplace aussi les matrices σ_j par les $\tilde{\sigma}_j(y)$ définies en (3.8). Notons les propriétés de ces dernières, qui seront les hypothèses de la proposition

suivante:

(H_3) Il existe $C>0$ tel qu'on ait:

$$|\partial_y^\alpha \tilde{\sigma}_j(y)| \leqq C\rho^{-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |y| \leqq a\rho \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqq 1$$

(H_4) Si $y_1=y_2=0$ et $|y_3| \leqq a\rho$, on a:

$$\tilde{\sigma}_j(y)\tilde{\sigma}_k(y)+\tilde{\sigma}_k(y)\tilde{\sigma}_j(y)=2\delta_{jk} \qquad (1\leqq j,\ k\leqq 3)$$
$$\tilde{\sigma}_1(y)\tilde{\sigma}_2(y)=i\tilde{\sigma}_3(y), \qquad \ldots$$

On a utilisé le fait qu'en ces points, la matrice $(\partial y_j/\partial x_k)(x(y))$ est une matrice de rotation. On démontrera au paragraphe 3.3 la proposition ci-dessous, (où l'on omet les signes $\sim$).

PROPOSITION 3.3. — *Soit A_ρ un potentiel dépendant d'un paramètre $\rho\geqq 1$, dont le rotationnel B_ρ vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2), ainsi que* (3.6). *Soient $\sigma_j(x)$ $(1\leqq j\leqq 3)$ des matrices hermitiennes de type* (2.2), *définies pour $|x| \leqq a\rho$ (où $a>0$ est indépendant de ρ), et vérifiant les hypothèses (H_3) et (H_4). Soit Q_ρ l'opérateur défini en* (3.9). *Alors, pour tous $\lambda\in\mathbb{R}$, $\gamma>0$ et $\rho\geqq 1$, il existe une fonction $\varphi_\rho\in C_0^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ telle que*

$$\|\varphi_\rho\|=1 \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\varphi_\rho \subset B(0,\gamma_\rho) \tag{3.11}$$

$$\|(Q_\rho-\lambda)\varphi_\rho\| \leqq \frac{C}{\rho} \tag{3.12}$$

où $C>0$ dépend de λ et de γ, mais non de ρ.

Fin de la preuve de la proposition 3.1. — D'après les majorations (3.4), il existe $\gamma>0$ et $C_1>1$, indépendants de ρ, tels qu'on ait:

$$|y| \leqq \gamma\rho \ \Rightarrow\ |x(y)| \leqq \frac{b}{2}\rho \quad \text{et} \quad \frac{1}{C_1} \leqq |\det x'(y)| \leqq C_1. \tag{3.13}$$

Soit $\varphi_\rho(\rho\geqq 1)$ une fonction vérifiant (3.11) et (3.12). Le support de la fonction $\Psi_\rho=\varphi_\rho\circ\theta_\rho$ est bien contenu dans $B(0,\rho)$, et, d'après (3.13), on a

$$\frac{1}{C_1} \leqq \|\Psi_\rho\|^2 \leqq C_1.$$

On déduit de (3.10), (3.12) et (3.13) que

$$\|(P_\rho-\lambda)\Psi_\rho\| \leqq \frac{CC_1^{1/2}}{\rho}.$$

La proposition 3.1 est donc démontrée.

3.3. PREUVE DE LA PROPOSITION 3.3. — Dans ce paragraphe, la constante $a>0$ pourra changer d'une inégalité à l'autre, mais sera toujours indépendante de ρ.

LEMME 3.4. — *Sous les hypothèses de la proposition* 3.3, *pour tout* x *tel que* $|x| \leqq a\rho$ *et pour tout* $\rho \geqq 1$, *il existe un vecteur* $q(x)$ *dans* $\mathbb{C}^2$ *tel que:*

(1) *On a* $|q(x)| = 1$ *et*

$$[\sigma_1(0, 0, x_3) + i\sigma_2(0, 0, x_3)]\, q(x) = [\sigma_3(0, 0, x_3) - \mathrm{I}]\, q(x) = 0. \tag{3.14}$$

(2) *Il existe* $C > 0$, *indépendant de* ρ, *tel que:*

$$|\partial_x^\alpha q(x)| \leqq C\rho^{-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |x| \leqq a\rho \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqq 1. \tag{3.15}$$

Preuve du lemme. — Les égalités (H_4) entraînent que, si $|x_3| \leqq a\rho$, on a:

$$[\sigma_1(0, 0, x_3) + i\sigma_2(0, 0, x_3)]^2 = 0 \tag{3.16}$$

$$[\sigma_1(0, 0, x_3) - i\sigma_2(0, 0, x_3)][\sigma_1(0, 0, x_3) + i\sigma_2(0, 0, x_3)] = 2(\mathrm{I} - \sigma_3(0, 0, x_3)) \tag{3.17}$$

et que les valeurs propres de $\sigma_3(0, 0, x_3)$ sont 1 et -1. Par conséquent la norme de la matrice $(\sigma_1 + i\sigma_2)(0, 0, x_3)$ est égale à 2 et son déterminant est nul. Il existe donc un vecteur $q(x)$, de norme 1, qui vérifie les majorations (3.15) et l'égalité $(\sigma_1 + i\sigma_2)(x)\, q(x) = 0$ lorsque $x_1 = x_2 = 0$. La seconde égalité dans (3.14) résulte de (3.17).

Fin de la preuve de la proposition 3.3. — Soit $\tilde{A}_\rho$ le potentiel vecteur défini par:

$$\tilde{A}_{1,\rho}(x) = -x_2 \int_0^1 t\, B_{3,\rho}(t x_1, t x_2, x_3)\, dt$$

$$\tilde{A}_{2,\rho}(x) = +x_1 \int_0^1 t\, B_{3,\rho}(t x_1, t x_2, x_3)\, dt$$

$$\tilde{A}_{3,\rho}(x) = x_2 \int_0^1 B_{1,\rho}(t x_1, t x_2, x_3)\, dt - x_1 \int_0^1 B_{2,\rho}(t x_1, t x_2, x_3)\, dt.$$

Le rationnel de $\tilde{A}_\rho$ est égal à B_ρ. Il existe donc une fonction réelle $\Phi_0(x)$ telle que:

$$\operatorname{grad} \Phi_0(x) = A_\rho(x) - \tilde{A}_\rho(x) \qquad \text{si} \quad |x| \leqq a\rho.$$

On pose:

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{4} B_{3,\rho}(0, 0, x_3)(x_1^2 + x_2^2)$$

Quitte à restreindre a, on peut supposer que:

$$\frac{1}{2}|B_\rho(0)| \leqq B_{3,\rho}(0, 0, x_3) \leqq 2|B_\rho(0)| \qquad \text{si} \quad |x_3| \leqq a\rho$$

Soit χ une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $0 \leqq \chi(x) \leqq 1$ et

$$\chi(x) = 1 \quad \text{si} \quad |x| \leqq \frac{a}{2} \qquad \text{et} \qquad \chi(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geqq a$$

On pose:

$$\varphi_\rho(x)=\left[\frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2}\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)e^{i\Phi_0(x)+\Phi_1(x)+i\lambda x_3}q(x).$$

Il existe des constantes C_1 et C_2, indépendantes de ρ, telles que:

$$(3.18)\qquad \begin{aligned}\|\varphi_\rho\|^2 &\leqq \frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\int_{|x|\leqq a\rho} e^{2\Phi_1(x)}\,dx \leqq \frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\int_{|x|\leqq a\rho} e^{-(1/4)|B_\rho(0)|(x_1^2+x_2^2)}\,dx \leqq C_1\\ \|\varphi_\rho\|^2 &\geqq \frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\int_{|x|\leqq (a/2)0} e^{2\Phi_1(x)}\,dx \geqq \frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\int_{|x|\leqq (a/2)\rho} e^{-|B_\rho(0)|(x_1^2+x_2^2)}\,dx \geqq C_2\end{aligned}$$

Vérifions maintenant l'inégalité (3.12). On a:

$$\begin{aligned}(Q_\rho-\lambda)\varphi_\rho(x)=&\left[\frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2}e^{i\Phi_0(x)+\Phi_1(x)+i\lambda x_3}\\ &+\left\{\lambda\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)(\sigma_3(x)-I)\,q(x)+\sum_{j=1}^{3}\sigma_j(x)\left[D_{x_j}\left(\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)q(x)\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)q(x)\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_j}+\frac{1}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_j}-A_j(x)\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

D'après (3.15), on a, dans le support de φ_ρ:

$$\left|D_{x_j}\left(\chi\left(\frac{x}{\rho}\right)q(x)\right)\right|\leqq\frac{C}{\rho}$$

et aussi, d'après les hypothèses (H_3 et (H_4) et les égalités (3.14)

$$|(\sigma_1(x)+i\sigma_2(x))q(x)|+|(\sigma_3(x)-I)\,q(x)|\leqq\frac{C}{\rho}(|x_1|+|x_2|).$$

D'autre part, on peut écrire:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_1}+\frac{1}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}-A_1&=\frac{i}{2}(x_1-ix_2)B_3(0,\,0,\,x_3)+R_1(x)\\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_2}+\frac{1}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}-A_2&=-\frac{1}{2}(x_1-ix_2)B_3(0,\,0,\,x_3)+R_2(x)\\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_3}+\frac{1}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}-A_3&=R_3(x)\end{aligned}$$

où

$$|R_j(x)|\leqq\frac{C}{\rho}|B_\rho(0)|(x_1^2+x_2^2)\qquad(j=1,\,2,\,3,\,|x|\leqq a\rho)$$

Par conséquent, dans le support de φ_ρ, on a :

$$\left|\sum_{j=1}^{3}\sigma_j(x)\,q(x)\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_j}+\frac{1}{i}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_j}-A_j(x)\right)\right|\leqq\frac{C}{\rho}\,|B_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)$$

On en déduit que :

$$|(Q_\rho-\lambda)\,\varphi_\rho(x)|\leqq C\left[\frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2}\frac{e^{\Phi_1(x)}}{\rho}\,[1+|x_1|+|x_2|+|B_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)]$$

$$\leqq C'\left[\frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2}e^{-1/2-(1/8)\,|B_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)}\,[1+|B_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)]$$

$$\leqq\frac{C''}{\rho}\left[\frac{|B_\rho(0)|}{\rho}\right]^{1/2}e^{-(1/16)\,|B_\rho(0)|\,(x_1^2+x_2^2)}$$

et on conclut comme en (3.18) que la norme L^2 de cette fonction est majorée par C'''/ρ, où C''' est indépendant de ρ.

3.4. *Preuve du théorème* 1.4, *lorsque* $r=1$. — Soient (B_n) la suite des boules de l'hypothèse (H_1'), x_n leurs centres, et R_n leurs rayons. On peut supposer que l'hypothèse (H_0') n'est pas satisfaite, sinon le théorème est déjà démontré. Il existe donc y_n tel que $|y_n-x_n|\leqq R_n/2$, et tel que la suite $|B(y_n)|$ ne tende pas vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $C>0$ tel que :

$$|B(y_n)|\geqq C$$

Pour tout $\rho\geqq 1$, il existe un entier $n_0(\rho)$ tel que $B(y_n,\,\rho)$ soit contenu dans B_n lorsque $n\geqq n_0(\rho)$, et tel que :

$$n\geqq n_0(\rho)\qquad\text{et}\qquad|x-y_n|\leqq a\rho\ \Rightarrow\ |\partial_x B(x)|\leqq\frac{1}{\rho}\,|B(y_n)|$$

Le potentiel $A_{n,\,\rho}(x)=A(x+y_n)$, dépendant des paramètres n et ρ, vérifie les hypothèses de la proposition 3.1. Soit λ un réel tel que $|\lambda|\geqq 1$. D'après la proposition 3.1, il existe des fonctions $\varphi_{n,\,\rho}$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^3,\,\mathbb{C}^2)$ telles que

$$\|\varphi_{n,\,\rho}\|=1,\qquad\operatorname{supp}\varphi_{n,\,\rho}\subset B(0,\,\rho)$$

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{3}\sigma_j(D_{x_j}-A_{j,\,n,\,\rho})-\sqrt{\lambda^2-1}\right)\varphi_{n,\,\rho}\right\|\leqq\frac{C}{\rho}$$

où $C>0$ est indépendant de ρ. Par conséquent, la fonction $\Psi_{n,\rho}(x)=\varphi_{n,\rho}(x-y_n)$ vérifie

$$\|(D_A^{\mathrm{red}}-\sqrt{\lambda^2-1})\,\Psi_{n,\,\rho}\|\leqq\frac{C}{\rho}$$

D'après les remarques 2.1 et 2.2, on en déduit que λ est dans le spectre essentiel de D_A.

REMARQUE 3.5. — En dimension 2, les arguments de ce paragraphe prouvent que, si l'hypothèse (H_1') est vérifiée, alors les points 1 et -1 sont dans le spectre essentiel de D_A.

4. Étude en dimension 2

4.1. PREUVE DE LA PROPOSITION 1.5. — Elle résulte elle-même de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *Si $n=2$, pour tout réel λ tel que $|\lambda|>1$, il existe $C_1(\lambda)>0$ tel qu'on ait :*

$$\|\Psi\| \leqq C_1(\lambda) \|(D_A-\lambda)\Psi\| \tag{4.1}$$

pour tout $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$, pourvu que $B(x)$ soit d'un signe constant sur le support de Ψ, et vérifie :

$$|B(x)| \geqq 4(\lambda^2-1), \qquad \forall x \in \operatorname{supp}\Psi \tag{4.2}$$

Démonstration. — Si l'on pose $\Psi=(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$, on a $(D_A-\lambda)\Psi=(f_1, \ldots, f_4)$, avec :

$$\begin{aligned}
f_1&=(D_{x_1}-A_1+iD_{x_2})\Psi_4+(1-\lambda)\Psi_1\\
f_2&=(D_{x_1}-A_1-iD_{x_2})\Psi_3+(1-\lambda)\Psi_2\\
f_3&=(D_{x_1}-A_1+iD_{x_2})\Psi_2-(1+\lambda)\Psi_3\\
f_4&=(D_{x_1}-A_1-iD_{x_2})\Psi_1-(1+\lambda)\Psi_4
\end{aligned}$$

Des intégrations par parties nous donnent facilement les égalités suivantes :

$$\begin{cases} (1+\lambda)\|\Psi_4\|^2-(\lambda-1)\|\Psi_1\|^2=\operatorname{Re}[(f_1, \Psi_1)-(f_4, \Psi_4)] \\ (1+\lambda)\|\Psi_3\|^2-(\lambda-1)\|\Psi_2\|^2=Re[(f_2, \Psi_2)-(f_3, \Psi_3)] \end{cases} \tag{4.3}$$

D'autre part, on a :

$$\|(D_{x_1}-A_1-iD_{x_2})\Psi_j\|^2=\|(D_{x_1}-A_1)\Psi_j\|^2+\|D_{x_2}\Psi_j\|^2+(B(x)\Psi_j, \Psi_j) \tag{4.4}$$

Si $B(x)>0$ dans le support de Ψ, on applique (4.4) avec $j=1$, puis $j=3$

$$[\inf_{x \in \operatorname{supp}\Psi} B(x)](\|\Psi_1\|^2+\|\Psi_3\|^2) \leqq \|f_2+(\lambda-1)\Psi_2\|^2+\|f_4+(\lambda+1)\Psi_4\|^2 \tag{4.5}$$

L'inégalité (4.1) se déduit facilement de (4.3) et (4.5) lorsque (4.2) est vérifié. Le raisonnement est analogue lorsque $B(x) \leqq 0$ sur le support de Ψ.

4.2. PREUVE DU THÉORÈME 1.6. — Le cas où $\varepsilon_0(x)$ tend vers 0 à l'infini se traite avec les techniques du paragraphe 2. Examinons le cas où $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 à l'infini. La preuve de l'inclusion de $S_\infty \cup \{-1\} \cup \{1\}$ dans le spectre essentiel de D_A est très proche

de celle du résultat analogue de [HE-MO] pour l'opérateur de Schrödinger, et nous ne la détaillerons pas. Nous allons démontrer l'inclusion inverse.

Pour tout $l \in \mathbb{R}$, posons

$$D_l = \alpha_1 (D_{x_1} + l x_2) + \alpha_2 D_{x_2} + \alpha_4$$

C'est l'opérateur de Dirac associé au champ magnétique constant égal à l.

LEMME 4.2. — *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $l \neq 0$, *et pour tout* $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$, *on ait :*

$$\|\Psi\| \inf_{k \in \mathbb{N}} |\lambda \pm \sqrt{1 + 2k|l|}| \leqq C \|(D_l - \lambda)\Psi\|$$

Ce lemme est classique. Il suffit de remarquer que, si $l \neq 0$, le spectre de l'opérateur $l\alpha_1 t + \alpha_2 D_t + \alpha_4$ est l'ensemble des $\pm(1 + 2k|l|)^{1/2}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Soit λ un réel tel que $|\lambda| > 1$, et qui n'est pas dans S_∞, ce qui entraîne que $0 \notin \mathscr{B}_\infty$. Puisque S_∞ est fermé, il existe $C > 0$ tel que

$$|\lambda \pm \sqrt{1 + 2k|l|}| \geqq C, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \mathscr{B}_\infty$$

Par conséquent, il existe $C_2(\lambda) > 0$ tel que

$$\|\Psi\| \leqq C_2(\lambda) \|(D_l - \lambda)\Psi\| \tag{4.6}$$

pour tous $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$ et $l \in \mathscr{B}_\infty$.

Si $C_1(\lambda)$ est la constante de la proposition 4.1, on pose $C_3(\lambda) = \sup(C_1(\lambda), C_2(\lambda))$.

LEMME 4.3. — *Pour tout* $\tau > 0$, *il existe* $R(\tau, \lambda) > 0$ *tel que*

$$\|\Psi\| \leqq 2 C_3(\lambda) \|(D_A - \lambda)\Psi\| \tag{4.7}$$

si $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$ *a son support dans une boule de rayon* τ *et dont le centre* x_0 *vérifie* $|x_0| \geqq R(\tau, \lambda)$.

Preuve du lemme. — Soit (x_n) une suite de points tendant vers l'infini. Il nous suffit de montrer qu'il existe $n_0(\tau, \lambda)$ tel que l'inégalité (4.7) soit vérifiée si le support de Ψ est contenu dans $B(x_n, \tau)$, et si $n \geqq n_0(\tau, \lambda)$. Il suffit même de montrer que la suite x_n contient une sous-suite qui possède cette propriété. Or, après extraction d'une sous-suite, on peut supposer qu'on est dans un des cas suivants :

(1) Ou bien $|B(x_n)| \geqq 8(\lambda^2 - 1)$. Dans ce cas, puisque $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 à l'infini, on aura $|B(x)| \geqq 4(\lambda^2 - 1)$ pour tout x dans la boule $B(x_n, \tau)$ si n est assez grand, et on conclut en appliquant la proposition 4.1.

(2) Ou bien $|B(x_n)| \leqq 8(\lambda^2 - 1)$, et, après une nouvelle extraction de sous-suite, on peut supposer que $B(x_n)$ a une limite $l \neq 0$ (puisque $0 \notin \mathscr{B}_\infty$). Posons :

$$A_n(x) = -\int_{x_{2n}}^{x_2} B(x_1, y_2)\, dy_2 - l x_{2n}$$

On a, si $|x-x_n| \leqq \tau$

$$|A_n(x)+lx_{2n}| \leqq \tau |l-B(x_n)| + \tau^2 \sup_{|y-x_n| \leqq \tau} \varepsilon_1(y)[1+|B(y)|]$$

Par conséquent, il existe $n_0(\tau, \lambda)$ tel que :

$$n \geqq n_0(\tau, \lambda) \quad \text{et} \quad |x-x_n| \leqq \tau \Rightarrow |A_n(x)+lx_{2n}| \leqq \frac{1}{2C_3(\lambda)}$$

L'inégalité (4.6) est vérifiée pour tout $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$. Si le support de Ψ est contenu dans $B(x_n, \tau)$ et si $n \geqq n_0(\tau, \lambda)$, on en conclut que :

$$\|\Psi\| \leqq 2C_3(\lambda) \|(D_{A_n}-\lambda)\Psi\|$$

d'où, après un changement de jauge, l'inégalité (4.7). Le lemme est démontré.

Fin de la preuve du théorème 1.6. — Elle est identique à celle de [HE-MO]. Pour tout $\tau > 0$, il existe une suite de fonctions $\chi_n(x)$ telles que :

(1) Le support de χ_n est contenu dans une boule de rayon τ et dont le centre est noté x_n.

(2) On a $\sum_n \chi_n(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

(3) Il existe $C > 0$ tel que :

$$\sum_n |D_x \chi_n(x)|^2 \leqq \frac{C}{\tau^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \tau \geqq 1$$

Soit $K(\tau)$ la réunion des boules fermées $B(x_n, \tau)$, où $|x_n| \leqq R(\tau, \lambda)$ (la constante du lemme 4.3). Cet ensemble est compact et, pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus K(\tau))$, on a :

$$\|f\|^2 = \sum_{|x_n| \leqq R(\tau, \lambda)} \|\chi_n f\|^2$$

Si $|x_n| \geqq R(\tau, \lambda)$, on applique le lemme 4.3 à la fonction $\Psi = \chi_n f$. En ajoutant toutes les inégalités obtenues (élevées au carré), on obtient :

$$\|f\|^2 \leqq 8C_3(\lambda)^2 \|(D_A-\lambda)f\|^2 + \frac{C}{\tau^2}\|f\|^2$$

pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus K(\tau))$. Si $\tau \geqq (2C)^{1/2}$, on en déduit que :

$$\|f\|^2 \leqq 16C_3(\lambda)^2 \|(D_A-\lambda)f\|^2, \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus K(\tau))$$

ce qui démontre que λ n'est pas dans le spectre essentiel de D_A.

Le théorème 1.6 est donc démontré quand $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 à l'infini. Les autres affirmations du théorème 1.6 résultent des remarques 2.3 (pour $r=0$) et 3.5 (pour $r=1$) et de la proposition 2.4 (pour $r \geqq 2$).

BIBLIOGRAPHIE

[AH-CA] AHARONOV et CASHER, *Ground State of a Spin* 1/2 *Charged Particle in a Two Dimensional Magnetic Field.* (*Physical review*, A vol. 19, n° 6, June 1979, p. 2461-2462).

[AV-HE-SI] J. AVRON, I. HERBST et B. SIMON, *Schrödinger Operators with Magnetic Fields I General Interactions* (*Duke Math. Journal*, vol. 45, 1978, p. 847-884).

[AV-SE] J. AVRON et R. SEILER, *Paramagnetism for Non-Relativistic Electrons and Euclidean Massless Dirac Particles* (*Phys. Rev. Letters*, vol. 42, n° 15, 9 April 1979).

[BE-GE] A. BERTHIER et V. GEORGESCU, *On the Point Spectrum for Dirac Operators* (*Journal of Functional Analysis*, vol. 71, 1987, p. 309-338).

[C-F-K-S] H. L. CYCON, R. G. FROESE, W. KIRSCH et B. SIMON, *Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Texts and monographs in Physics, Springer Verlag.

[DUF] A. DUFRESNOY, *Un exemple de champ magnétique dans* $\mathbb{R}^n$ (*Duke Math. Journal*, vol. 53, (3), 1983, p. 729-734).

[FRO-LI-LO] J. FROHLICH, E. LIEB et M. LOSS, *Stability of Coulomb Systems with Magnetic Fields I the One-Electron Atom* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 104, 1986, p. 251-270).

[GA-LA] B. GAVEAU et G. LAVILLE, *Fonctions holomorphes et particule chargée dans un champ magnétique constant* (*Sem. P. Lelong, H. Skoda, Springer Lecture Notes*, 1980-1981).

[HE-MO] B. HELFFER et A. MOHAMED, *Sur le spectre essentiel des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique* (*Ann. Institut Fourier*, t. 38, 1988, fasc. 2, p. 95-113).

[HE-NO] B. HELFFER et J. NOURRIGAT, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champ de vecteur* (*Progress in Mathematics*, Birkhauser, vol. 58).

[IWA] IWATSUKA, (1) *The Essential Spectrum of two Dimensional Schrödinger Operators with Perturbed Magnetic Fields* (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 23, (3), 1983, p. 475-480). (2) *Magnetic Schrödinger Operators with Compact Resolvent* (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 26, (3), 1986, p. 357-374).

[KL] M. KLAUS, *On the Point Spectrum of Dirac Operators* (*Helv. Phys. Acta*, vol. 53, 1980, p. 453-462).

[KUR] S. T. KURODA, *On the Essential Spectrum of Schrödinger Operators with Vector Potentials* (*Sc. Papers Coll. Gen. Ed. University Tokyo*, 23, 1973, p. 87-91).

[LA-LI] LANDAU et LIFSHITZ, *Mécanique quantique, Théorie non-relativiste.*

[LAV] G. LAVILLE, (1) *Spectre d'opérateurs sur certaines variétés de Cauchy-Riemann et champ magnétique* (*Ann. Univ. Ferrara*, Sez VII-Sc. Math., vol. 28, 1982, p. 31-37). (2) *Changement de jauge de deuxième espèce pour l'équation de Landau et équations de Cauchy-Riemann tangentielle* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 291, série A, 1980, p. 435-437).

[LE] H. LEINFELDER, *Gauge Invariance of Schrödinger Operators and Related Spectral Properties* (*J. Op. Theory*, 1983, p. 163-179).

[LI-LO] E. LIEB et M. LOSS, *Stability of Coulomb Systems with Magnetic Fields II the Many-Electron Atom and the One Electron Molecule* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 104, 1986, p. 271-282).

[LO-YA] M. LOSS et H. T. YAU, *Stability of Coulomb Systems with Magnetic Fields III Zero Energy Bound States of the Pauli Operator* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 104, 1986, p. 283-290).

[MO] A. MOHAMED, *Quelques remarques sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique* [*Comm. in P.D.E.*, 1989 (à paraître)].

[RE-SI] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic press.

[RO] D. ROBERT, *Autour de l'approximation semi-classique. Progress in mathematics*, Birkhauser, 1986.

[WA] X. P. WANG, *Puits multiples pour l'opérateur de Dirac* (*Annales de l'I.H.P. section physique théorique*, vol. 43, n° 3, 1985, p. 269-319).

(Manuscrit reçu le 11 avril 1988,
révisé le 20 janvier 1989).

B. HELFFER,
Département de Mathématiques,
U.R.A. C.N.R.S. n° 758,
Université de Nantes,
44072 Nantes Cedex 03;

J. NOURRIGAT,
Département de Mathématiques,
U.A. C.N.R.S. n° 305,
Université de Rennes,
35042 Rennes Cedex;

X. P. WANG,
Département de Mathématiques,
U.R.A. C.N.R.S. 758,
Université de Nantes,
44072 Nantes Cedex 03
et
Département de Mathématiques,
Université de Pékin,
Pékin, Chine.