ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

THIERRY BOUCHE

Inégalités de Morse pour la d''-cohomologie sur une variété holomorphe non compacte

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 22, n° 4 (1989), p. 501-513

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_4_501_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 501 à 513.

INÉGALITÉS DE MORSE POUR LA d''-COHOMOLOGIE SUR UNE VARIÉTÉ HOLOMORPHE NON COMPACTE

PAR THIERRY BOUCHE

0. Introduction

Soit X une variété analytique de dimension complexe n, L un fibré holomorphe en droites hermitien de classe $\mathscr{C}^\infty$ au-dessus de X, E un fibré holomorphe vectoriel de rang r au-dessus de X. Soit $D = D' + D''$ la connexion canonique de L, $c(L) = D^2$ la forme de courbure associée. Nous ferons l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes sur la géométrie de X et L, m et l étant des entiers $\geqq 1$:

- Hypothèse $P(m, l)$: X est fortement m-convexe [*i. e.* il existe une fonction exhaustive ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X, telle que $id'd''\psi$ ait au moins $(n-m+1)$ valeurs propres >0 hors d'un compact K] et $ic(L)$ admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqq 0$ hors de K.
- Hypothèse $Q(m)$: X est kählérienne hors d'un compact K, et faiblement 1-complète (*i. e.* il existe une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X, exhaustive et plurisousharmonique), en outre, la courbure de L est semi-positive de rang supérieur à $(n-m+1)$ sur $X \setminus K$.

Soit q un entier $\geqq 0$, nous notons $X(q)$ l'ensemble des points de X où $ic(L)$ est non dégénérée et admet exactement q valeurs propres négatives, $X(\geqq q) = \bigcup_{\nu \geqq q} X(\nu)$. Nous notons également $H^q(X, E \otimes L^k)$ le q-ième groupe de cohomologie de Dolbeault à valeur dans $E \otimes L^k$, où L^k est la puissance tensorielle k-ième du fibré L. Nous démontrons les deux thèorèmes suivants :

THÉORÈME 0.1. — *Soient* $m, l \geqq 1$. *Si* X *et* L *vérifient* $P(m, l)$, *on a, pour tout* $q \geqq m+l-1$

(1) *Inégalités de Morse asymptotiques :*

$$\dim H^q(X, E \otimes L^k) \leqq r\frac{k^n}{n!}\int_{X(q)} (-1)^q \left(\frac{i}{2\pi} c(L)\right)^n + o(k^n).$$

Mots clés : inégalités de Morse, d''-cohomologie, fibré linéaire hermitien, variété q-convexe, fonction q-convexe, opérateur de Monge-Ampère.

Classification A.M.S. : 32 L 10, 32 F 10.

(2) *Inégalités de Morse fortes :*

$$\sum_{\nu=q}^{n}(-1)^{\nu-q}\dim H^{\nu}(X, E\otimes L^k)\leqq r\frac{k^n}{n!}\int_{X(\geqq q)}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(L)\right)^n+o(k^n).$$

THÉORÈME 0.2. — *Soit* $m\geqq 1$. *Si* X *et* L *vérifient l'hypothèse* $Q(m)$, *on a, pour tout* $q\geqq m$:

(1) *Inégalités de Morse asymptotiques :*

$$\dim H^{n,q}(X, L^k)\leqq\frac{k^n}{n!}\int_{X(q)}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(L)\right)^n+o(k^n).$$

(2) *Inégalités de Morse fortes :*

$$\sum_{\nu=q}^{n}(-1)^{\nu-q}\dim H^{n,\nu}(X, L^k)\leqq\frac{k^n}{n!}\int_{X(\geqq q)}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(L)\right)^n+o(k^n).$$

Notre méthode utilise pour une part les techniques des articles [D1] et [D2] de Jean-Pierre Demailly : nous majorons la dimension des espaces propres du laplacien antiholomorphe à l'aide du théorème de répartition spectrale de [D1], appliqué à un ouvert relativement compact de X, contenant K; on utilise aussi pour cela l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne [D2] à l'extérieur de cet ouvert. De cette façon, nous obtenons les inégalités des théorèmes 0.1 et 0.2 pour les groupes de cohomologie à croissance qui s'identifient au premier espace propre du laplacien antiholomorphe.

Comme application de ces résultats, nous démontrons une estimation pour l'opérateur de Monge-Ampère sur une variété fortement m-convexe. Notre résultat généralise l'estimation obtenue récemment par Siu pour les domaines m-convexes d'une variété de Stein [S], avec une démonstration différente plus directe.

Je tiens à remercier Jean-Pierre Demailly, dont les conseils m'ont aidé à mettre au point la rédaction définitive de ce travail.

I. Estimation des premières fonctions propres de Δ'' hors d'un compact

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — Soit ω, une métrique hermitienne complète sur X (définie ultérieurement), $\langle .,\ .\rangle$ l'accouplement sesquilinéaire canonique des formes et $\|.\|$ la norme associée. Que nous soyons dans l'une ou l'autre des hypothèses $P(m, l)$, $Q(m)$, nous noterons ψ la fonction d'exhaustion $\mathscr{C}^\infty$ et $X_c=\{x\in X : \psi(x)<c\}$ la famille croissante d'ouverts relativement compacts associée, $a_0<a_1<a_2$, des réels tels que $K\subset X_{a_0}$. Λ est l'adjoint de l'opérateur de multiplication extérieur par ω, $\delta=\delta'+\delta''$ l'adjoint formel de D. Si A et B sont deux endomorphismes de degré resp. δ_1 et δ_2 du module gradué $\mathscr{C}^\infty(X, E\otimes L)=\mathscr{C}^\infty(\Lambda^{\cdot}T^*X\otimes E\otimes L)$, on pose $[A, B]=AB-(-1)^{\delta_1\delta_2}BA$. On définit alors $\Delta'=[D', \delta']$, $\Delta''=[D'', \delta'']$ les laplaciens holomorphe et antiholomorphe. Enfin, $\mathscr{C}$ est

le cône des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ convexes, croissantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ et, si $\chi \in \mathscr{C}$, on note L_χ le fibré hermitien obtenu à partir de L en multipliant la métrique de chaque fibre par le poids $e^{-\chi \circ \psi}$.

Soit $L^2_{n,\,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ l'espace des (n, q)-formes sur $(L_\chi)^{\otimes k}$ de carré intégrable par rapport à l'élément de volume $dV = \omega^n/n!$. D'' définit sur cet espace un opérateur dont l'adjoint hilbertien est δ'' — cela car la métrique ω est complète, en vertu du lemme de Hörmander sur la densité des formes à support compact dans $\mathrm{Dom}(D'')$ pour la norme du graphe (*cf.* [H]). Par conséquent, $\Delta'' = D''\delta'' + \delta'' D''$ est son propre adjoint hilbertien. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*_+$, notons $\mathscr{H}^{n,\,q}(\lambda)$ la somme directe des espaces propres de Δ'', pour les valeurs propres $\leqq k\lambda$ dans $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$. Pour mener de front les démonstrations des théorèmes 0.1 et 0.2, nous ferons la convention suivante sur E : $E = \mathbf{C}$ (fibré hermitien trivial) si X et L vérifient $Q(m)$. Sous l'hypothèse $P(m, l)$, nous démontrerons en fait le théorème 0.1 pour les groupes $H^{n,q}(X, E \otimes L^k)$, l'énoncé que nous en avons donné sera retrouvé en remplaçant E par le fibré $E' = \Lambda^n TX \otimes E$ car

$$H^{n,q}(X, E \otimes L^k) \simeq H^q(X, \Lambda^n T^*X \otimes E \otimes L^k).$$

PROPOSITION 1.1. — *Si* X *et* L *vérifient l'une ou l'autre des hypothèses* $P(m, l)$ *ou* $Q(m)$, *si* $q \geqq m$, *si* X *est muni d'une métrique complète, et si* χ *est suffisamment croissante, on a l'isomorphisme :*

$$\mathscr{H}^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi) \simeq H^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$$

où le groupe de droite désigne le groupe de cohomologie à croissance *associé aux métriques de* X *et de* $E \otimes L^k_\chi$.

En effet, nous avons la décomposition en somme orthogonale de $\ker D''$: $\ker D'' = \ker \Delta'' \oplus \overline{\mathrm{Im}\, D''}$. Or, nous savons que $\ker D''/\mathrm{Im}\, D'' \simeq H^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ est de dimension finie si χ est à croissance assez forte (la méthode du théorème de finitude de [D3] s'applique ici sans difficulté). Par utilisation du théorème de l'application ouverte, il est facile d'en déduire que $\mathrm{Im}\, D''$ est fermée et que $\ker D''/\mathrm{Im}\, D'' \simeq \ker \Delta''$. ■

Le lemme suivant exprime intuitivement le fait que les éléments de $\mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ sont assez précisément connus par leur restriction à un compact assez grand, si λ reste petit.

LEMME 1.2. — *Il existe* k_0, *un entier positif, et* $\chi_0 \in \mathscr{C}$ *tels que, si* $h \in \mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ *avec* $\lambda < 1/4$, *on ait :*

$$\int_{X \setminus X_a} \|h\|^2 \leqq \int_{X_a} \|h\|^2$$

dès que $a > a_1$, $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$, *et* $k \geqq k_0$.

Ce résultat est une conséquence d'une étude assez poussée de la courbure de $E \otimes L^k_\chi$, combinée avec l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne de [D2], que nous

rappelons ci-dessous :

PROPOSITION 1.3. — *Soient* $\tau=[\Lambda, d'\omega]$, τ^* *son adjoint formel,* $\Delta'_\tau=[D'+\tau, \delta'+\tau^*]$, $T_\omega=[\Lambda, [\Lambda, (i/2)d'd''\omega]]-[d'\omega, (d'\omega)^*]$; *alors*

$$\Delta''=\Delta'_\tau+[ic(E\otimes L_\chi^k), \Lambda]+T_\omega. \tag{1.5}$$

Démonstration du lemme 1.2. — (1) Supposons que X *vérifie* $P(m, l)$. — $id'd''\psi$ ayant $(n-m+1)$ valeurs propres strictement positives hors de $K\subset X_{a_0}$, il existe une métrique ω_1, sur X, de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que les valeurs propres ε_j de $id'd''\psi$ par rapport à ω_1 vérifient sur $X\setminus X_{a_0}$: $-1/2m\leqq\varepsilon_j\leqq 1, j=1, \ldots, n$, et $\varepsilon_m=\ldots=\varepsilon_n=1$, les ε_j étant rangées par ordre croissant. On peut alors choisir $\rho\in\mathscr{C}$, suffisamment croissante pour que $\omega=e^{\rho\circ\psi}\omega_1$ soit une métrique complète sur X. Par rapport à ω, les valeurs propres de $id'd''\psi$ sont $\varepsilon'_j=e^{-\rho\circ\psi}\varepsilon_j$.

D'autre part, soit $\chi\in\mathscr{C}$;

$$\begin{aligned} ic(L_\chi)&=ic(L)+id'd''\chi\circ\psi\\ &=ic(L)+i(\chi''\circ\psi)d'\psi\wedge d''\psi+i(\chi'\circ\psi)d'd''\psi\\ &\geqq ic(L)+i(\chi'\circ\psi)d'd''\psi. \end{aligned}$$

Soient λ_j, α_j les valeurs propres de $ic(L_\chi)$ et $ic(L)$, respectivement, par rapport à ω, rangées par ordre croissant. Nous avons :

$$\alpha_n\geqq\ldots\geqq\alpha_1$$

et

$$\lambda_j\geqq\alpha_1+\chi'\circ\psi e^{-\rho\circ\psi}\varepsilon_j.$$

Soit $u\in\mathscr{C}^\infty_{n,q}(X, E\otimes L_\chi^k)$, un calcul explicite donne :

$$\begin{aligned} \langle[ic(L_\chi), \Lambda]u, u\rangle&\geqq(\lambda_1+\ldots+\lambda_q)\|u\|^2 \qquad (cf.\ [D2] \text{ par exemple})\\ &\geqq[(q\alpha_1)+\chi'\circ\psi e^{-\rho\circ\psi}(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_q)]\|u\|^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_q\geqq-((m-1)/2m)+1\geqq 1/2$ si $q\geqq m$.

Soit χ_0, une fonction de $\mathscr{C}$, supposée nulle sur $\psi(K)$, choisie assez croissante pour que

$$\chi'_0\circ\psi\geqq[1+2|[ic(E), \Lambda]|_\omega+2|T_\omega|_\omega+|2n\alpha_1|]e^{\rho\circ\psi}$$

sur $X\setminus X_{a_0}\subset X\setminus K$; alors, si $\chi\in\chi_0+\mathscr{C}$ (dans la suite, nous choisirons $\chi-\chi_0$ nulle sur $]-\infty, a_0[$), $\chi'\geqq\chi'_0$, et, par conséquent, d'après (1.3)

$$\begin{aligned} \langle\Delta''u, u\rangle&=\langle\Delta'_\tau u, u\rangle+k\langle[ic(L_\chi), \Lambda]u, u\rangle+\langle[ic(E), \Lambda]u, u\rangle+\langle T_\omega u, u\rangle\\ &\geqq\langle\Delta'_\tau u, u,\rangle+\frac{k}{2}\|u\|^2 \qquad \text{sur} \quad X\setminus X_{a_0} \end{aligned}$$

donc

$$\int_X \langle \Delta'' u, u\rangle \geqq \frac{k}{2}\int_{X\setminus X_{a_0}} \|u\|^2 - k\,C_1 \int_{X_{a_0}} \|u\|^2 \tag{1.5}$$

Comme $a_1 > a_0$, il existe $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(X, [0, 1])$, telle que $\varphi(X_{a_0}) = \{0\}, \varphi(X\setminus X_{a_1}) = \{1\}$. Soit $\lambda < 1/4$, $h \in \mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$; le lemme 1.2 va résulter de la minoration (1.5) appliquée à φh. Pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $C = 1 + (1/\varepsilon)$, on a la majoration : pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $(x+y)^2 \leqq (1+\varepsilon)x^2 + Cy^2$. Donc

$$\begin{aligned}\int_X \langle \Delta''(\varphi h), (\varphi h)\rangle &= \int_X (\|D''\varphi \wedge h + \varphi D'' h\|^2 + \|d'\varphi \lrcorner h + \varphi \delta'' h\|^2) \\ &\leqq (1+\varepsilon)\int_X (\|D'' h\|^2 + \|\delta'' h\|^2) + C_2 \int_X \|h\|^2 \\ &\leqq (k\lambda(1+\varepsilon) + C_2)\int_X \|h\|^2\end{aligned} \tag{1.6}$$

et

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\quad k\int_{X\setminus X_{a_1}} \|h\|^2 \leqq k\lambda\left(1+\varepsilon+\frac{C_3}{k}\right)\int_X \|h\|^2 \\ &\Rightarrow\quad k\int_{X\setminus X_{a_1}} \|h\|^2 \leqq \frac{2\lambda(1+2\varepsilon)}{1-2\lambda(1+2\varepsilon)}\int_{X_{a_1}} \|h\|^2\end{aligned} \tag{1.5}$$

si $k_0 \geqq C_3/\varepsilon$, une fois ε choisi de sorte que $\lambda(1+2\varepsilon) < 1/4$, le lemme 1.2 est démontré. ■

(2) *Supposons que* X *vérifie* Q(m). — Soit α, une métrique hermitienne, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X, kählérienne sur $X\setminus K$, où $ic(L)$ est semi-positive; soit $\varphi \in \mathscr{C}$, nous posons :

$$\omega = ic(L_\chi) + e^{-\rho\circ\psi}\alpha$$

LEMME 1.7. — *Pour tout* $\chi_1 \in \mathscr{C}$, $\chi_1 \not\equiv 0$, *si* $\chi \in \chi_1^2 + \mathscr{C}$, *alors* ω *est complète.*

En effet,

$$\begin{aligned}\omega &\geqq i d'd''(\chi_1^2 \circ \psi) = 2i(\chi_1\circ\psi\,.\,\chi_1''\circ\psi\, d'd''\psi + (\chi_1'\circ\psi)^2 d'\psi \wedge d''\psi) \\ &\geqq 2i d'(\chi_1\circ\psi) \wedge d''(\chi_1\circ\psi).\end{aligned}$$

Ainsi, si χ_1 est une fonction de $\mathscr{C}$ non bornée (*i. e.* non nulle), $\chi_1 \circ \psi$ est une fonction exhaustive sur X et $|\chi_1\circ\psi(x) - \chi_1\circ\psi(y)|$ minore la distance géodésique $\delta(x, y)$. ■

Notons λ_j(resp. λ_j', λ_j''), les valeurs propres de $ic(L_\chi)$ [resp. $ic(L_\chi)$, $ic(L)$] par rapport à la métrique ω(resp. α, α), rangées par ordre croissant, on a les relations $\lambda_j' \geqq \lambda_j''$ par le minimax, donc

$$\lambda_j = \frac{\lambda_j'}{\lambda_j' + e^{-\rho\circ\psi}} \geqq \frac{\lambda_j''}{\lambda_j'' + e^{-\rho\circ\psi}}.$$

L'hypothèse sur le rang de $ic(L)$ signifie que $\lambda''_m > 0$ sur $X \setminus X_{a_0}$. Choisissons ρ suffisamment grand pour que $e^{-\rho\circ\psi} \leqq \lambda''_m/2$ sur $X \setminus X_{a_0}$.

Soit $u \in \mathscr{C}^\infty_{n,q}(X, L^k_\chi)$; la minoration (1.4) s'écrit ici

$$\langle [ic(L_\chi), \Lambda]u, u\rangle \geqq \lambda_m \|u\|^2 \qquad \text{si} \quad q \geqq m \tag{1.8}$$

car $\forall j = 1, \ldots, n$, $\lambda_j \geqq 0$, et $\lambda_m \geqq (\lambda''_m/\lambda''_m + e^{-\rho\circ\psi}) \geqq 2/3$.

1.9 LEMME. — *ρ étant fixée, il existe $\chi_0 \in \chi_1^2 + \mathscr{C}$, telle que, si $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$,*

$$|T_\omega|_\omega \leqq \frac{1}{6} \qquad \textit{sur} \quad X \setminus X_{a_0}$$

Ceci est démontré dans [D3] (lemme 1.5), il suffit de voir que comme $d\alpha = 0$, T_ω ne fait apparaître que des dérivées de $\rho \circ \psi$, que l'on peut contenir par la croissance de $\chi \circ \psi$ sur $X \setminus X_{a_0}$.

L'inégalité (1.5) est une conséquence immédiate de l'inégalité (1.8) et du lemme 1.9 grâce à l'identité 1.3. La fin de la démonstration du lemme 1.2, dans ce cas, est donc similaire au cas précédent. ■

II. Application du théorème de répartition spectrale et conclusion

Nous notons $\mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda)$ la somme directe des espaces propres du laplacien antiholomorphe Δ'' sur X_{a_2}, avec conditions de Dirichlet au bord, pour les valeurs propres $\leqq k\lambda$; soit $W^{n,q}_0(X_{a_2}, E \otimes L^k_\chi)$ l'adhérence dans $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ de l'espace des (n, q)-formes $\mathscr{C}^\infty$ à support compact inclus dans X_{a_2}, et soit P_λ le projecteur orthogonal de $W^{n,q}_0(X_{a_2}, E \otimes L^k_\chi)$ sur $\mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda)$. Soit κ une fonction tronquante $\mathscr{C}^\infty$ nulle sur $X \setminus X_{a_2}$, valant 1 sur X_{a_1}. On note $C = 4 \sup_{X_{a_2}} \|d\kappa\|^2$.

THÉORÈME 2.1. — *Soit $0 < \lambda < 1/4$. Si X vérifie l'une ou l'autre des hypothèses $P(m, l)$, $Q(m)$, et si $q \geqq m$, l'endomorphisme de $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$, $\tilde{\kappa}(h) = P_{3(\lambda + (C/k))}(\kappa . h)$ définit une injection de $\mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ dans $\mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(3(\lambda + (C/k)))$ dès que $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$, $k \geqq k_0$.*

COROLLAIRE 2.2. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, $\mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ est un espace de dimension finie, et l'on a : si $k \geqq k_1 = k_1(\lambda)$,*

$$\dim \mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda) \leqq \dim \mathscr{H}^{n,q}(\lambda) \leqq \dim \mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(4\lambda).$$

Démonstration du corollaire 2.2. — L'elliplicité de Δ'' garantit par le lemme de Rellich la finitude de l'espace $\mathscr{H}^{n,q}_{a_2}(4\lambda)$, et la première inégalité est conséquence immédiate du principe du minimax; il suffit de choisir $k_1 \geqq \sup(k_0, 3C/\lambda)$.

Démonstration du théorème 2.1. — Si $h \in \mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$, d'après le lemme 1.2, nous avons :

$$\int_X \|h\|^2 \leqq 2 \int_{X_{a_1}} \|h\|^2 = 2 \int_{X_{a_1}} \|\kappa . h\|^2$$

et, par le calcul (1.6) :

$$\int_{X_{a_2}} \langle \Delta''(\kappa.h), \kappa.h \rangle \leqq \frac{3}{2}k\left(\lambda \int_X \|h\|^2 + \frac{C}{k}\int_{X_{a_2}} \|h\|^2\right)$$
$$\leqq \frac{3}{2}k\left(\lambda + \frac{C}{k}\right)\int_X \|h\|^2$$
$$\leqq 3k\left(\lambda + \frac{C}{k}\right)\int_{X_{a_2}} \|\kappa.h\|^2.$$

Ceci montre que pour $h \neq 0$ (*donc* $\kappa.h \neq 0$), les composantes de $\kappa.h$ sur les espaces propres de Δ'' de valeur propre $\leqq 3k(\lambda+(C/k))$ ne peuvent être toutes nulles [*i. e.* $P_{3(\lambda+(C/k))}(\kappa.h) \neq 0$]. ■

Définissons $\mathrm{Dom}^q D'' \subset L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ le domaine de l'opérateur D'' au sens des distributions [*i. e.* l'ensemble des éléments u de $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ tels que $D''u$ (calculé au sens des distributions) soit dans $L^2_{n,q+1}(X, E \otimes L^k_\chi)$].

PROPOSITION 2.3. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, $\mathscr{H}^{n,\cdot}(\lambda)$ *est un sous-complexe du complexe de Dolbeault* D'' : $\mathrm{Dom}^\cdot D''$, *ayant même cohomologie.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{H}^{n,q}(\lambda)$ est un complexe de rang fini si $\lambda < 1/4$, en degré $q \geqq m$, le spectre de Δ'' est discret au voisinage de 0. Par conséquent, l'opérateur de Green $G = \int_{\lambda>0} (1/\lambda)\, dP_\lambda$ est un opérateur borné de $L^2_{n,\cdot}(X, E \otimes L^k_\chi)$ (de norme $1/\lambda_1$ si λ_1 est la première valeur propre non nulle de Δ''). Il vérifie les relations :

$$\Delta'' G = G\Delta'' = \mathrm{Id} - P_0, \qquad [G, D''] = 0.$$

L'opérateur $\delta'' G$ est donc un opérateur fermé dans $L^2_{n,\cdot}(X, E \otimes L^k_\chi)$ et, comme la métrique ω est complète, pour $u \in L^2_{n,\cdot}(X, E \otimes L^k_\chi)$, on a :

$$\int_X \|\delta'' G u\|^2\, dV \leqq \int_X \langle \Delta'' G u, G u \rangle\, dV$$
$$\leqq \frac{1}{\lambda_1}\int_X \|u\|^2\, dV$$

Il en résulte que $\delta'' G$ est un opérateur borné de $L^2_{n,\cdot}(X, E \otimes L^k_\chi)$. D'autre part,

$$\mathrm{Id} - P_\lambda = \Delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda) + P_0(\mathrm{Id} - P_\lambda)$$
$$= \Delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda)$$
$$= D''(\delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda)) + \delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda) D''$$

si bien que $\delta'' G(\mathrm{Id} - P_\lambda)$ définit une homotopie entre Id et P_λ sur $\mathrm{Dom}^\cdot D''$. ■

LEMME 2.4. — *Soit*

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \to C^n \xrightarrow{d^n} 0$$

un complexe d'espaces vectoriels de dimensions c^q, finies si $q \geqq m$, sur un corps K. *Soit $h^q = \dim H^q(C^\cdot)$. On a les inégalités suivantes, si $m \leqq q \leqq n$:*

(1) *Inégalités de Morse :*

$$h^q \leqq c^q.$$

(2) *Inégalités de Morse fortes :*

$$h^q - h^{q+1} + \ldots + (-1)^{n-q} h^n \leqq c^q - c^{q+1} + \ldots + (-1)^{n-q} c^n.$$

Démonstration. — Si $Z^q = \ker d^q$, et $B^q = \operatorname{Im} d^{q-1}$, ont pour dimension z^q et b^q, les inégalités (1) et (2) résultent des formules

$$c^q = z^q + b^{q+1}, \qquad h^q = z^q - b^q.$$

$$h^q - h^{q+1} + \ldots + (-1)^{n-q} h^n = -b^q + c^q - c^{q+1} + \ldots + (-1)^{n-q} c^n. \quad \blacksquare$$

Notons λ_j^χ les valeurs propres de $ic(L_\chi)$ sur X, rangées par ordre décroissant de la valeur absolue, $s = s(x)$ le rang de $ic(L_\chi)_x$. Soit J un multiindice de longueur q dans $\{1, \ldots, n\}$, $\lambda > 0$, nous définissons les C_n^q fonctions semi-continues supérieurement suivantes :

$$\nu_J(\lambda) = \frac{2^{s-2n}\pi^{-n}}{\Gamma(n-s+1)} |\lambda_1^\chi \ldots \lambda_s^\chi| \sum_{(p_1, \ldots, p_s) \in \mathbf{N}^s} \left(2\lambda + \lambda_{\complement J}^\chi - \lambda_J^\chi - \sum_{j=1}^{s} (2p_j + 1) |\lambda_j^\chi| \right)_+^{n-s}$$

avec les conventions $\lambda_J^\chi = \sum_{j \in J} \lambda_j^\chi$,

$$x_+^0 = 0 \quad \text{si} \quad x < 0$$
$$x_+^0 = 1 \quad \text{si} \quad x \geqq 0.$$

Nous allons maintenant utiliser un théorème de répartition spectrale dû à J.-P. Demailly. D'après ce résultat (avec les changements de notations adéquats), le spectre de l'opérateur $(1/k)\Delta''$ pour le problème de Dirichlet sur X_{a_2} admet la répartition spectrale asymptotique décrite par le théorème 2.5.

THÉORÈME 2.5 (*cf.* [D1], th. 2.16 et 3.14, calculs des parties III et IV). — *Il existe un ensemble dénombrable* $N \subset \mathbf{R}$ *tel que, si* $\lambda \in \mathbf{R}_+^* \setminus N$,

$$\dim \mathscr{H}_{a_2}^{n,q}(\lambda) = rk^n \sum_{|J|=q} \int_{X_{a_2}} \nu_J(\lambda)\, dV + o(k^n).$$

Soit $I(q, \lambda)=\sum_{|J|=q}\int_{X_{a_2}} \nu_J(\lambda)\,dV$. Le lemme 2.4 appliqué au complexe $\mathscr{H}^{n,\cdot}(\lambda)$, moyennant le corollaire 2.2, la proposition 2.3 et le théorème 2.5, implique le

COROLLAIRE 2.6. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *on a : si* $\lambda\in]0, 1/4[\setminus N$ *et* $q\geqq m$, *il existe* $k_1=k_1(\lambda)$ *tel que, si* $k\geqq k_1$:

(1) $\dim H^{n,q}(X, E\otimes L_\chi^k)\leqq rk^n I(q, 4\lambda)+o(k^n)$.

(2) $$\sum_{\nu=q}^{n}(-1)^{\nu-q}\dim H^{n,\nu}(X, E\otimes L_\chi^k)$$
$$\leqq rk^n[I(q, 4\lambda)-I(q+1, \lambda)+\ldots+(-1)^{n-q}I(n, \tilde{\lambda})+o(k^n)$$

(*avec* $\tilde{\lambda}=\lambda$ *si* $n-q$ *est impair*, $\tilde{\lambda}=4\lambda$ *si* $n-q$ *est pair*).

Faisons maintenant tendre λ vers 0 par valeurs dans $]0, 1/4[\setminus N$ et k vers l'infini. La limite de $I(q, \lambda)$ [resp. $I(q, 4\lambda)$] est, par la convention faite sur x_+^0, $I(q, 0)$. Notons $X(q, \chi)$ l'ensemble des points de X où $ic(L_\chi)$ est non dégénérée d'indice q.

LEMME 2.7. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *on a :*

$$I(q, 0)=\frac{1}{n!}\int_{X_{a_2}\cap X(q,\chi)}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(L_\chi)\right)^n.$$

Démonstration. — La quantité $\lambda_{\mathfrak{t}J}^\chi-\lambda_J^\chi-\sum(2p_j+1)|\lambda_j^\chi|$ est toujours $\leqq 0$, nulle aux seuls points $x\in X(q, \chi)$ où $ic(L_\chi)$ est non dégénérée d'indice q, avec $(p_1, \ldots, p_n)=0$, et $J=\{j=1, \ldots, n\,|\,\lambda_j^\chi<0\}$. En un tel point,

$$\nu_J(\lambda)=2^{-n}\pi^{-n}(-1)^q(\lambda_1^\chi\ldots\lambda_n^\chi)$$
$$\nu_J(\lambda)\,dV=\frac{1}{n!}(-1)^q\left(\frac{i}{2\pi}c(L_\chi)\right)^n. \quad \blacksquare$$

Nous retrouvons maintenant les groupes sans conditions de croissance que nous voulons estimer par la

PROPOSITION 2.8 ([D3], lemme 1.9). — *On a la décomposition en réunion filtrante croissante :* $L^2_{n,\cdot}(X, E\otimes L^k, \mathrm{loc})=\bigcup_{\chi\in\chi_0+\mathscr{C}} L^2_{n,\cdot}(X, E\otimes L_\chi^k)$ où χ *est choisie égale à* χ_0 *sur* X_{a_2}.

Ceci résulte du fait que le poids $e^{-\chi\circ\psi}$ sur les fibres permet de rendre toute forme L^2_{loc} sur X globalement de carré intégrable dès lors que $e^{-\chi\circ\psi}$ est à décroissance assez rapide à l'infini.

De plus, d'après [D3], on a le

LEMME 2.9. — *Pour* χ *à croissance assez rapide et* $k\geqq k_0$, $q\geqq m$,

$$\dim H^{n,q}(X, E\otimes L^k)=\dim H^{n,q}(X, E\otimes L_\chi^k).$$

Ce lemme résulte des propositions (3.12) et (3.13) de [D3], où l'on a pris garde de choisir χ suffisamment croissante, permettant de vérifier le lemme 2.9 indépendamment de k.

Fin de la démonstration des théorèmes 0.1 *et* 0.2. — Le corollaire 2.6, combiné avec les lemmes 2.7 et 2.9, permet d'obtenir maintenant les théorèmes 0.1 et 0.2. Observons tout d'abord que le majorant $I(q, 0)$ est en fait uniforme par rapport à χ (car χ est toujours choisie égale à χ_0 sur X_{a_2}). D'autre part :

• sous l'hypothèse $P(m, l)$, $ic(L)$ admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqq 0$ hors de K, et $id'd''(\chi_0 \circ \psi)$ au moins $(n-m+1)$ valeurs propres >0 hors de K; donc $ic(L_{\chi_0}) = ic(L) + id'd''\chi_0 \circ \psi$ est positive sur l'intersection des sommes directes des espaces propres attachés aux valeurs propres $\geqq 0$ de $ic(L)$ et $id'd''\chi_0 \circ \psi$ respectivement. Cette intersection est de codimension $\leqq m-1+l-1$, donc de dimension $\geqq n-(m+l-1)+1$. Par conséquent, si $q \geqq m+l-1$, on a $X(q, \chi_0) \subset K$, et $\chi_0 \circ \psi$ a été choisie nulle sur K donc $X(q, \chi_0) = X(q)$ et $ic(L_\chi) = ic(L)$ sur $X(q)$.

• *sous l'hypothèse* $Q(m)$, $ic(L_\chi) \geqq ic(L)$ sur X et $ic(L)$ admet au moins $n-m+1$ valeurs propres $\geqq 0$ sur $X \setminus K$, donc $ic(L_\chi)$ aussi. Par conséquent, si $q \geqq m$, on a $X(q, \chi) \subset K$, donc $X(q, \chi) = X(q)$ et $ic(L) = ic(L_\chi)$ sur $X(q)$. ■

Remarques sur le théorème 0.1. — (2.10) : les inégalités (1) et (2) du théorème 0.1 sont valides pour $q \geqq m$, sans hypothèse sur la courbure de L, pour le fibré L_{χ_0}.

(2.11) : les inégalités (1) et (2) du théorème 0.1 sont valides pour $q \geqq \sup(m, l)$ si l'on admet l'hypothèse supplémentaire suivante :

$R(m, l)$: X est très fortement m-convexe [*i.e.* il existe une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, exhaustive, *plurisousharmonique*, dont le hessien complexe admet au moins $(n-m+1)$ valeurs propres >0 hors d'un compact, et $ic(L)$ possède au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqq 0$ hors d'un compact].

En effet, sous cette hypothèse, $id'd''\chi_0 \circ \psi$ est semi-positive hors de K, et par conséquent $ic(L_{\chi_0})$ possède au moins l valeurs propres $\geqq 0$ hors de K. Par conséquent $X(q, \chi_0) \subset K$ dès que $q \geqq l$; d'autre part les inégalités du corollaire 2.6 sont valides dès que $q \geqq m$.

(2.12) Enfin, remarquons que nous avons en fait la proposition suivante sensiblement plus forte que le corollaire 2.2 :

PROPOSITION 2.12. — *Si* X *est fortement m-convexe, avec les notations précédentes, il existe un choix de* $\chi_0 \in \mathscr{C}$, *tel que, pour* $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$, *on ait, si* $q \geqq m$:

$$\dim \mathscr{H}^{n,q}_\chi(\lambda) = rk^n \sum_{|J|=q} \int_X \nu_J(\lambda)\, dV + o(k^n)$$

pour tout λ *en dehors d'une partie dénombrable* $N \subset \mathbf{R}$.

Démonstration. — Avec les notations de la démonstration du lemme 1.2, choisissons χ_0 assez croissante pour que :

$$\chi_0' \circ \psi \geqq [2j+1+2\,|\,[ic(E), \Lambda]|_\omega + 2\,|\,T_\omega|_\omega + 2n\,|\,\alpha_1\,|]\,e^{\rho\circ\psi} \tag{2.13}$$

sur $X \setminus X_{a_0+j}$.

Alors, si $\chi \in \chi_0 + \mathscr{C}$, $\chi' \geqq \chi_0'$, et par conséquent, d'après le calcul (1.6), on a :

$$\text{si } h \in \mathscr{H}^{n,q}_{\chi}(\lambda), \quad \int_{X\setminus X_{a_0+j+1}} \|h\|^2 \leqq \frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{j-\lambda(1+2\varepsilon)} \int_{X_{a_0+j+1}} \|h\|^2 \tag{1.6)'}$$

d'où l'on déduit :

$$\int_{X_{a_0+j+2}} \langle \Delta''(\kappa.h), \kappa.h\rangle \leqq \frac{j}{j-\lambda(1+2\varepsilon)}\left(\frac{C}{k}+\lambda\right)(1+2\varepsilon)\int_{X_{a_0+j+2}} \|\kappa.h\|^2 \tag{2.2)'}$$

si κ est une fonction tronquante nulle sur $X\setminus X_{a_0+j+2}$, égale à 1 sur X_{a_0+j+1}. Pour j assez grand, cela démontre l'inégalité :

$$\text{si } q \geqq m, \quad \dim \mathscr{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda) \leqq \dim \mathscr{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda(1+3\varepsilon)) \tag{2.14}$$

qui permet de conclure en faisant tendre ε vers 0 et j, k vers l'infini. En effet, par le théorème 2.5, nous savons que

$$\dim \mathscr{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda) = \frac{rk^n}{n!}\int_{X_{a_0+j+2}} \nu_J(\lambda)\, dV + o(k^n)$$

où $\nu_J(\lambda) = 2^{-n}\pi^{-n}\,|\,\lambda_1^\chi \ldots \lambda_s^\chi\,|\,(2\lambda - \lambda_j^\chi + \lambda_{\complement J}^\chi - \sum_{(p_j)}(2p_j+1)\,|\,\lambda_j^\chi\,|)_+^{n-s}$.

Notons que, si $q \geqq m$, il existe un $s \geqq m$ tel que $s \in J$. Dans ce cas, et d'après (2.13), $\lambda_s^\chi \geqq \lambda_m^\chi \geqq 2j$ sur $X\setminus X_{a_0+j}$. Par conséquent

$$2\lambda - \lambda_j^\chi + \lambda_{\complement J}^\chi - \sum(2p_j+1)\,|\,\lambda_j^\chi\,| \leqq 2(\lambda - \lambda_m^\chi) \leqq 2(\lambda - 2j)$$

sur $X\setminus X_{a_0+j}$.

En définitive, pour tout multiindice J de longueur q, $\nu_J(\lambda)$ est nul sur $X\setminus X_{a_0+j}$ dès que $j > \lambda/2$, donc les majorants intégraux restent à support dans un compact fixe lorsque j tend vers l'infini, et ε vers 0. ■

III. Estimations pour l'opérateur de Monge-Ampère sur une variété fortement m-convexe

Nous dirons qu'une fonction φ est faiblement l-convexe sur une variété X de dimension n sur $\mathbf{C}$ si son hessien complexe admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqq 0$. Les fonctions faiblement 1-convexes sont donc les fonctions plurisousharmoniques.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* X *une variété* **C***-analytique de dimension n, fortement m-convexe,* φ *une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* X, *faiblement l-convexe hors d'un compact* K *de* X. *Pour* $0 \leqq \nu \leqq n$, *soit* G_ν *l'ensemble des points de* X *où* $id'd''\varphi$ *est non dégénérée et admet* ν *valeurs propres* <0. *Alors, pour tout* $q \geqq m+l-1$, *on a :*

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \geqq 0 \qquad si \quad q \text{ est pair}$$

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \leqq 0 \qquad si \quad q \text{ est impair}$$

Démonstration. — Notons $\mathbf{C}_\varphi$ le fibré hermitien trivial $X \times \mathbf{C}$ muni de la métrique $e^{-\varphi}$ sur les fibres. Ce fibré vérifie l'hypothèse $P(m, l)$ car sa courbure est exactement $id'd''\varphi$. Si nous appliquons le théorème 0.1 à ce fibré, les inégalités de Morse fortes se retranscrivent comme suit :

$$(3.2) \qquad \sum_{\nu=q}^{n} (-1)^{q-\nu} \dim H^\nu(X, \mathbf{C}) \leqq \frac{k^n}{(n!)(2\pi)^n} (-1)^q \sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n + o(k^n)$$

car $\mathbf{C}^{\otimes k} \simeq \mathbf{C}$. Divisons l'inégalité (3.2) par k^n, et faisons tendre k vers l'infini, nous obtenons le théorème 3.1 car le membre de gauche est fini et ne dépend pas de k. Celui-ci généralise les théorèmes 3 et 4 de [S], qui n'étaient valables que pour des domaines m-convexes d'une variété de Stein.

De façon analogue, le théorème 0.2 implique le

THÉORÈME 3.2. — *Soit* X, *une variété faiblement* 1*-complète, kählérienne hors d'un compact, et* φ, *une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* X, *dont le hessien est semi-positif de rang au moins* $(n-m+1)$ *hors d'un compact* (φ *plurisousharmonique et fortement m-convexe hors d'un compact*). *Alors, pour tout* $q \geqq m$, *on a :*

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \geqq 0 \qquad si \quad q \text{ est pair}$$

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \leqq 0 \qquad si \quad q \text{ est impair}$$

BIBLIOGRAPHIE

[D1] J.-P. DEMAILLY, *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie* [*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. XXXV, n° 4, 1985, p. 189-229].

[D2] J.-P. DEMAILLY, *Sur l'identité de Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne* [*Séminaire P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda (Analyse)*, 1983/1984, p. 88-97, *Lecture Notes in Math.*, n° 1198, Springer, 1986].

[D3] J.-P. DEMAILLY, *Sur les théorèmes d'annulation et de finitude de T. Ohsawa et O. Abdekader* [*Séminaire P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda (Analyse)*, 1985/1986, *Lecture Notes in Math.*, n° 1295, Springer, 1987].

[H] L. HÖRMANDER, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Publishing Company, 2nd edition, 1973.

[S] Y.-T. SIU, *Calculus Inequalities Derived from Holomorphic Morse Inequalities*, Prépublication, 1987 [*Math. Annalen* (à paraître)].

(Manuscrit reçu le 3 mars 1988).

Thierry BOUCHE,
Institut Fourier,
Laboratoire de Mathématiques,
B.P. 74,
38402 Saint-Martin d'Hères