ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. DERRIDJ

Le problème de Cauchy pour $\overline{\partial}$ et application

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 17, n° 3 (1984), p. 439-449
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_3_439_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 439-449.

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR $\bar{\partial}$ ET APPLICATION

PAR M. DERRIDJ

1. Introduction

Des résultats d'extension de formes $\bar{\partial}_b$ fermées, en particulier de fonctions C.R, peuvent être déduits à partir de la résolution d'un problème de Cauchy pour $\bar{\partial}$; plus précisément, soit U un ouvert, voisinage de l'origine 0, dans $\mathbb{C}^n$ et S un morceau d'hypersurface régulière passant par 0, définie par $\{\varphi = c\}$. On cherche à résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$(1)_q \qquad \begin{cases} \bar{\partial}u = f \quad \text{dans U}, \qquad f \text{ étant une } (0, q+1) \text{ forme}, \qquad \bar{\partial}f = 0, \\ u\,|_S = 0. \end{cases}$$

Dans [5], nous avons donné des conditions suffisantes pour résoudre le problème suivant :

$$(2)_q \qquad \begin{cases} \bar{\partial}u = \lambda f \quad \text{dans U}, \qquad f \in L^2_{(0,\,q+1)}(U), \qquad \bar{\partial}f = 0 \ \text{Supp}\,(f) \subset \overline{U}^+, \\ \text{Supp}\,(u) \subset \overline{U}^+; \qquad U^+ = U \cap \{\varphi < c\}. \end{cases}$$

où λ est une certaine fonction holomorphe.

De plus nous avons montré comment de la résolution du problème $(2)_q$, on peut déduire des résultats d'extension de fonctions holomorphes dans $U^- = \{\varphi > c\} \cap U$, en fonctions holomorphes dans un voisinage de 0. Dans un article en collaboration avec J. E. Fornaess [6], nous en avons déduit des résultats d'extension de fonctions C.R sur S en fonctions holomorphes dans un voisinage de 0, dans U^+ moyennant une hypothèse reliant S à l'ensemble des zéros de la fonction holomorphe λ. Nous utilisons des résultats de division (*voir* [6]) particuliers au cas des fonctions.

Il est toutefois clair que si l'on sait résoudre $(1)_q$, alors (*voir* la fin de cet article), on déduira des résultats d'extension dans le cas des formes $\bar{\partial}_b$-fermées.

Nous montrons ici, que si f est de classe C^∞ sur $\overline{U}$ (ou tout au moins suffisamment régulière) et si l'on sait résoudre $(2)_q$, alors on sait résoudre $(1)_q$ moyennant une hypothèse

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/84/03 439 11/$ 3.10
© Gauthier-Villars

reliant S à λ. La formulation de cette hypothèse est différente de celle faite dans [6]; cependant elles nous semblent voisines. Il est cependant important de noter que cette hypothèse est inutile pour $q=0$.

Pour passer du problème $(2)_q$ au problème $(1)_q$, il y a deux sortes d'obstacles: le premier est de résoudre en trouvant une solution ayant, en un sens convenable, une trace sur S qui soit nulle; le deuxième obstacle est de se débarrasser du facteur λ dans le second membre de $(2)_q$. Rappelons que le problème $(2)_q$ a été étudié en utilisant les estimations L^2 avec poids et les inégalités de Carleman (L. Hörmander [7], A. Andreotti, E. Vesentini [2]). En fin de cet article nous rappelons comment de la résolution du problème $(1)_q$, on déduit des résultats d'extension de formes $\bar{\partial}_b$-fermées, en particulier de fonctions C.R ainsi qu'une classe d'exemples.

Il est utile de remarquer que notre méthode pour déduire la résolution du problème $(1)_q$ de la résolution du problème $(2)_q$ est purement une méthode d'équations aux dérivées partielles; on aurait pu considérer un complexe de systèmes différentiels à coefficients constants:

$$C^\infty(E_0) \xrightarrow{A_1} C^\infty(E_1) \xrightarrow{A_2} C^\infty(E_2) \to \ldots \xrightarrow{A_n} 0,$$

avec une fonction λ, admettant une dérivée non nulle en 0 et telle que:

$$A_i(\lambda u)=\lambda A_i(u), \qquad u \in C^\infty(E_{i-1}), \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dans le cas de variétés C.R de codimension supérieure Baouendi-Trèves [3], et Baouendi-Chang-Trèves [4] ont introduit de nouveaux outils qui permettent d'attaquer le problème de l'extension de fonctions C.R. Il est concevable que ces outils donnent aussi des résultats dans le cas des formes $\bar{\partial}_b$-fermées. D'ailleurs, dans son cours à l'école Polytechnique [12], F. Trèves a donné un théorème d'approximation valable pour des formes.

2. Quelques notations

Soient U un ouvert voisinage de l'origine, et S une hypersurface dans U, passant par l'origine, définie par $\{\varphi=C\}$, avec $d\varphi \neq 0$ sur S. On notera:

$$U^+=\{U \cap \varphi < C\},$$
$$U^-=\{U \cap \varphi > C\},$$

Ici U est un ouvert de C^n, où les coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ sont écrites $z_j=x_j+ix_{n+j}$. Nous pouvons toujours supposer que dans U, quitte à le rendre plus petit, S est définie par:

$$x_{2n}=F(x_1, \ldots, x_{2n-1}).$$

Nous définissons alors dans U le nouveau système de coordonnées suivant :

$$x'_{2n}=x_{2n}-\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_{2n-1}),$$
$$x'_j=x_j, \qquad 1 \leqq j \leqq 2n-1.$$

Alors S est aussi définie par $x'_{2n}=0$; on suppose $\mathrm{F}\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})$.

Maintenant soit λ une fonction holomorphe dans un voisinage de U. Il existe un multi-indice γ tel que $\lambda^{(\gamma)}(0)\neq 0$. Alors si U est, de nouveau, assez petit, on peut supposer :

$$\lambda^{(\gamma)}(z)\neq 0, \qquad z\in\overline{\mathrm{U}},$$

Dorénavant, nous partons de l'hypothèse suivante :

(H_q) Il existe au voisinage V de 0 tel que :
Pour toute $(0, q+1)$ forme f dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{U})$, $\bar{\partial}$-fermée dans U telle que supp $(f)\subset\bar{\mathrm{U}}^+$, il existe une $(0, q)$ forme u dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{V})$ telle que :

$$\bar{\partial}u=\lambda f \quad \text{dans V} \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(u)\subset\overline{\mathrm{V}}^+,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_{2n}} \text{ divisible par } \lambda \text{ dans U} \quad (\text{lorsque } q\geqq 1).$$

Nous avons donné dans [5], des conditions suffisantes sur le hessien complexe de φ, qui permettent d'avoir (H_q). [La fonction λ donne en fait une idée sur la façon dont le Hession de φ dégénère dans U; lorsqu'il y a suffisamment de valeurs propres strictement positives, on peut prendre $\lambda=1$ (ce qui n'a aucun intérêt pour nous, ici).]

Dans le système de coordonnées (x_j), l'opérateur $\bar{\partial}$ considéré comme opérateur des $(0, q)$ formes sur U dans les $(0, q+1)$ formes sur U, est un système différentiel à coefficients constants qu'on note :

$$\bar{\partial}=(\mathrm{P}_{i,j})_{i,j}.$$

Dans les coordonnées (x'_j), l'opérateur devient un système différentiel à coefficients variables que nous notons :

$$\bar{\partial}=(\tilde{\mathrm{P}}_{ij}).$$

Remarque. — Dans la suite, nous travaillerons en prenant $\mathrm{V}=\mathrm{U}$, pour faire une économie de notation, quitte à prendre f dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{U}')$, où U′ est un voisinage convenable de U.

3. Les résultats

THÉORÈME 3.1. — *Supposons* (H_q) *vérifiée, soit* f *une* $(0, q+1)$ *forme de classe* C^{s+1} *dans* U, $\bar{\partial}$*-fermée dans* U, *à support dans* $\overline{\mathrm{U}}^+$.

Il existe une $(0, q)$ forme u, à coefficients distributions, qui admet une valeur au bord nulle sur S, telle que $\bar{\partial} u = f$ dans U.

Si $q=0$, u peut être choisie de classe C^s dans U, sans hypothèse de divisibilité de $\partial\lambda/\partial x'_{2n}$ par λ dans U.

Remarque. — Les propositions qui suivront donneront un sens plus précis à la valeur au bord de u.

LEMME 3.2. — *Les opérateurs* $\tilde{P}_{ij}$, *ont la forme suivante :*

$$\tilde{P}_{ij} = \sum_{k=1}^{2n-1} \tilde{a}_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x'_k} + \tilde{a}_{2n}^{ij}(x'_1, \ldots, x'_{2n-1}) \frac{\partial}{\partial x'_{2n}}. \tag{3.1}$$

où $\tilde{a}_k^{ij}$ *sont des coefficients constants pour* $k \leqq 2n-1$.

Démonstration. — Dans les coordonnées de départ, $\bar{\partial}$ est un opérateur à coefficients constants i. e.

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{2n} a_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

l'opérateur $\partial/\partial x_k$ se transforme en :

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} - F'_{x_k}(x_1, \ldots, x_{2n-1}) \frac{\partial}{\partial x'_{2n}},$$

pour $k \leqq 2n-1$ et en $\partial/\partial x'_k$ si $k=2n$. Par suite on obtient :

$$\tilde{P}_{ij} = \sum_{k=1}^{2n-1} a_k^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x'_k} - F'_{x_k}(x_1, \ldots, x_{2n-1}) \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \right) + a_{2n}^{ij} \frac{\partial}{x'_{2n}},$$

qui est de la forme voulue.

COROLLAIRE 3.3. — *On a :*

$$\left[\bar{\partial}, \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \right] = 0. \tag{3.2}$$

Dans un premier temps, nous montrons la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. — *Supposons satisfaite l'hypothèse* (H_q). *Soit* f *une* $(0, q+1)$ *forme,* $\bar{\partial}$*-fermée dans* U, $f \in C^l(U)$, *supp* $(f) \subset \overline{U^+}$, $l \geqq 1$.

Il existe une $(0, q)$ *forme* u_k *telle que :*

$$\tilde{P} u_k = \lambda f \quad \text{dans U},$$

$$\text{Supp}(u_k) \subset \overline{U^+},$$

$$u_k \in C^k(x_{2n}, L^2(x'_1, \ldots, x'_{2n-1})); \qquad k \leqq l-1.$$

Démonstration. — Nous commencerons par faire les remarques suivantes : soit g_i une fonction dans $C^l(U)$, $l \geqq 1$, à support dans $\overline{U}^+$, et soient h_k des fonctions telles que :

$$\sum_j \tilde{P}_{ij} h_j = g_i, \qquad h_j \in L^2(U), \qquad \text{supp}(h_j) \subset \overline{U}^+.$$

On en déduit aisément que :

$$\frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \left(\sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n} h_j\right) \in L^2_{x'_{2n}} \quad (H^{-1}_{x''}),$$

en notant $x'' = (x'_1, \ldots, x'_{2n-1})$ (en rappelant que $\tilde{a}^{ij}_{2n}$ ne dépend pas de x'_{2n}). Il s'ensuit que la fonction $\sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n} h_j$ admet une trace sur $\{x'_{2n} = 0\} = S$.

D'après les conditions de support faites sur h_j et g_i, cette trace est nulle. De cela on déduit l'égalité suivante :

$$\int_0^{x'_{2n}} \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \left(\sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n} h_j\right)(x'_1, \ldots, x'_{2n-1})\, t)\, dt = \left(\sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n} h_j\right)(x'). \tag{3.4}$$

Considérons maintenant la forme $(\lambda f)'_{x'_{2n}}$; elle est dans $L^2(U)$, car $f \in C^l(U)$ avec $l \geqq 1$; de plus, comme λ est holomorphe et que $[\bar{\partial}, \partial/\partial x'_{2n}] = 0$, elle est $\bar{\partial}$-fermée. En outre on garde la condition $\text{supp}(\lambda f)'_{x'_{2n}} \subset \overline{U}^+$. D'après l'hypothèse (H_q), il existe une $(0, q)$ forme u dans $L^2(U)$ telle que :

$$\begin{cases} \tilde{P}\, u = (\lambda f)'_{x'_{2n}}, \\ \text{Supp}(u) \subset \overline{U}^+. \end{cases} \tag{3.5}$$

Posons alors :

$$v(x'_1, \ldots, x'_{2n}) = \int_0^{x'_{2n}} u(x'_1, \ldots, x'_{2n-1}, t)\, dt.$$

Nous commençons par remarquer que l'on obtient immédiatement que :

$$v \in C^0(x'_{2n}, L^2(x'_1, \ldots, x'_{2n-1})),$$
$$\text{supp}(v) \subset \overline{U}^+.$$

Maintenant notre but est de montrer que $\tilde{P} v = \lambda f$.

$$\sum_j \tilde{P}_{ij} v_j(x') = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ j}}^{2n-1} \tilde{a}^{ij}_k \frac{\partial}{\partial x'_k} + \tilde{a}^{ij}_{2n}(x'') \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \right) v_j(x')$$

$$= \int_0^{x'_{2n}} \sum_{\substack{k=1 \\ j}}^{2n-1} \tilde{a}^{ij}_k \frac{\partial u_j}{\partial x'_k}(x'', t)\, dt + \sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n}(x'') \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \int_0^{x'_{2n}} u_j(x'', t)\, dt$$

$$= \int_0^{x'_{2n}} \sum_{\substack{k=1 \\ j}}^{2n-1} \tilde{a}^{ij}_k \frac{\partial u_j}{\partial x'_k}(x'', t)\, dt + \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \int_0^{x'_{2n}} \sum_j a^{ij}_{2n}(x'')\, u_j(x'', t)\, dt,$$

d'après (3.4), c'est égal à :

$$\sum_j \left\{ \int_0^{x'_{2n}} \sum_{k=1}^{2n-1} \tilde{a}_k^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x'_k}(x'', t)\, dt + \tilde{a}_{2n}^{ij}(x'')\, u_j(x') \right\}$$

$$= \sum_j \left\{ \int_0^{x'_{2n}} \sum_{k=1}^{2n-1} \tilde{a}_k^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x'_k}(x'', t)\, dt + \int_0^{x'_{2n}} \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} (\tilde{a}_{2n}^j(x'')\, u_j(x'', t))\, dt \right\}$$

$$= \int_0^{x'_{2n}} \sum_j \mathrm{P}_{ij}\, u(x'', t)\, dt = \int_0^{x'_{2n}} (\lambda f_i)'_{x'_{2n}}(x'', t)\, dt = (\lambda \tilde{} f_i)(x').$$

Donc on a obtenu $v \in \mathrm{C}^0(x'_{2n}, \mathrm{L}^2(x''))$ tel que :

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} \tilde{\mathrm{P}}\, v = \lambda f, \\ \mathrm{supp}\,(v) \subset \mathrm{U}^+. \end{cases}$$

Un procédé itératif, montre alors que l'on a la proposition 3.3.

Remarque. — Dans le cas $q=0$, la proposition précédente est évidemment inutile, car dans ce cas l'hypoellipticité du $\bar{\partial}$ entraîne que si $f \in \mathrm{C}^l(\mathrm{U})$, alors u solution de $\bar{\partial} u = \lambda f$ dans U entraîne aussi que $u \in \mathrm{C}^l(\mathrm{U})$.

Parvenus à ce stade, nous aimerions maintenant nous débarrasser de la fonction λ qui apparaît dans l'équation $\bar{\partial} u = \lambda f$.

PROPOSITION 3.5. — *Supposons* (H_q) *satisfaite. Supposons que f est une* $(0, q+1)$ *forme,* $\bar{\partial}$*-fermée dans* U, *de classe* $\mathrm{C}^{s+l}(\mathrm{U})$, $l \geqq 1$, *à support dans* $\overline{\mathrm{U}}^+$. *Il existe une* $(0, q)$ *forme u dans* U *telle que :*

$$\text{(3.7)} \qquad \begin{gathered} \bar{\partial} u = f \quad \text{dans U}, \\ u \in \mathrm{C}^{l-1} \qquad (x'_{2n}, \mathrm{H}^{-s}(x'')), \\ \mathrm{supp}\,(u) \subset \overline{\mathrm{U}}^+. \end{gathered}$$

Pour démontrer la proposition 3.5, nous utilisons le lemme suivant, en rappelant que l'on a $\lambda^{(\gamma)} \neq 0$ dans U, $|\gamma| = s$.

LEMME 3.6. — *Soit h une distribution dans* U, *on a :*

$$\text{(3.8)} \qquad h = \frac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \mathrm{C}_{\alpha\beta} (\lambda\, h^{(\alpha)})^{(\beta)} \quad \textit{dans U},$$

où le signe $^{(\alpha)}$ *désigne la dérivée d'ordre* α, *dans le système* (x_j).

Démonstration du lemme 3.6. — Nous procédons par récurrence : si (θ) est une dérivation d'ordre 1 on a trivialement :

$$\text{(3.9)} \qquad \lambda^{(\theta)} h = (\lambda\, h)^{(\theta)} - \lambda\, h^{(\theta)}.$$

Supposons qu'on ait montré (3.8) pour $|\theta| \leqq p$ et soit θ un multi-indice de longueur $p+1$: on écrit :

$$\theta = \theta' + \theta'' \qquad \text{où} \quad |\theta'| = p, \quad |\theta''| = 1;$$

alors :

$$\lambda^{(\theta)} h = (\lambda^{\theta'})^{\theta''}, \qquad h = ((\lambda^{(\theta')} h)^{(\theta'')} - \lambda^{\theta'} h^{(\theta'')},$$

mais, par récurrence, nous savons que :

$$\lambda^{(\theta')} h = \sum_{\alpha+\beta=\theta'} C_{\alpha\beta}^{\theta'} (\lambda h^{(\alpha)})^{(\beta)},$$

ce qui implique :

$$\lambda^{(\theta)} h = \sum_{\alpha+\beta=\theta'} C_{\alpha\beta}^{\theta'} (\lambda h^{(\alpha)})^{(\beta+\theta'')} - \lambda^{(\theta')} h^{(\theta'')},$$

d'autre part, toujours par récurrence :

$$\lambda^{(\theta')} h^{(\theta'')} = \sum_{\alpha+\beta=\theta'} C_{\alpha\beta}^{\theta'} (\lambda h^{(\alpha+\theta'')})^{(\beta)}.$$

Si nous regroupons les termes, on obtient bien :

$$\lambda^{(\theta)} h = \sum_{\alpha+\beta=\theta} C_{\alpha\beta} (\lambda h^{(\alpha)})^{(\beta)}.$$

Démonstration de la proposition 3.5. — D'après la proposition 3.4, il existe, pour $k \leqq l-1$, une $(0, q)$ forme dans $C^k(x'_{2n}, L^2(x'_1, \ldots, x'_{2n-1}))$ telle que, si h est C^l, $\bar{\partial}$-fermée et à support dans $\overline{U}^+$:

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = \lambda h, \\ \operatorname{supp}(u) \subset \overline{U}^+. \end{cases}$$

Comme $f \in C^{s+l}(\overline{U})$, d'après le lemme 3.6, on peut écrire :

$$f = \frac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{\alpha\beta} (\lambda f^{(\alpha)})^{(\beta)} \qquad \text{avec} \quad \lambda f^{(\alpha)} \in C^{1+s-|\alpha|}(\overline{U}).$$

Soit alors u_α une solution dans :

$$C^{l-1+s-|\alpha|}(x'_{2n}, L^2(x'_1, \ldots, x'_{2n-1})),$$

de :

$$\begin{cases} \bar{\partial} u_\alpha = \lambda f^{(\alpha)}, \\ \operatorname{supp} u_\alpha \subset \overline{U}^+. \end{cases}$$

Si nous posons :

$$u = \frac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{\alpha\beta} u_\alpha^{(\beta)}.$$

On a bien :

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f, \\ \operatorname{supp}(u) \subset \overline{U}^+, \\ u \in C^{l-1}(x'_{2n}, H^{-s}(x'_1, \ldots, x'_{2n-1})). \end{cases}$$

La proposition 3.5 entraîne et précise le théorème 3.1.

Cas particulier des fonctions ($q=0$). — Dans ce cas, il s'avère que nous n'avons pas besoin de l'hypothèse $\partial\lambda/\partial x_{2n} \neq \lambda$ sur U. Une application du lemme 3.6 et de l'hypoellipticité de $\bar{\partial}$ entraîne la :

PROPOSITION 3.7. — *Supposons que* (2) *est résoluble. Soit f une* (0,1) *forme,* $\bar{\partial}$*-fermée dans* U, *supp* $(f) \subset \overline{U}^+$, *de classe* C^∞ (*ou* C^N, N *assez grand*). *Il existe u solution de :*

$$\bar{\partial} u = f \quad \text{dans } V,$$
$$u \in C^\infty(V) \quad (\text{ou } C^N(V)),$$
$$\text{Supp}(u) \subset \overline{V}^+ \quad (\text{en particulier } u|_S = 0).$$

Démonstration. — En utilisant le lemme 3.6 on résoud de nouveau $\bar{\partial} u_\alpha = \lambda f^{(\alpha)}$, avec $\operatorname{supp}(u_\alpha) \subset \overline{V}^+$.

On pose :

$$u = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{\alpha\beta}\, u_\alpha^{(\beta)};$$

alors :

$$\bar{\partial} u = f \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp}(u) \subset \overline{V}^+, \quad u \in \mathscr{D}'(V).$$

Mais comme :

$$f \in C^\infty(V) \quad (\text{ou } C^N(V)), \qquad u \in C^\infty(V) \quad (\text{ou } C^N(V)),$$

ce qui donne la proposition 3.7.

Remarque. — Ceci montre que pour $f \in C^N$, N assez grand on peut se passer, dans le cas d'extension des fonctions, de l'hypothèse liant $Z(\lambda)$ à S. Cependant notons que dans [6] avec l'hypothèse $Z(\lambda)$, on considère des fonctions de classe C^4, pour l'extension.

4. Extension de formes $\bar{\partial}_b$-fermées sur ∂U^+

Nous commençons par énoncer le résultat d'extension pour des fonctions, dans la mesure où la notion de valeur au bord est plus précise dans ce cas. La démonstration est standard; nous la donnons pour la commodité du lecteur.

PROPOSITION 4.1. — *Supposons* (H_0) *vérifiée.*

Soit f une fonction C.R. sur ∂U^+, *de classe* C^∞. *Il existe une fonction holomorphe* F *dans* U^+, *de classe* C^∞ *dans* U^+ *telle que* $F|_S = f$.

Démonstration. — Comme f est C.R. sur ∂U^+, on peut (*voir* [1]) trouver une extension de f en une fonction $\tilde{f}$ de classe C^∞ sur U^+ telle que $\bar{\partial}\tilde{f}$ s'annule à l'ordre infini sur ∂U^+. Soit :

$$g=\begin{cases} \bar{\partial}\tilde{f} & \text{sur } U^+, \\ 0 & \text{sur } U \setminus U^+, \end{cases}$$

g est une (0, 1) forme de classe C^∞ sur U, $\bar{\partial}$-fermée à support dans U^+. Il existe d'après les résultats précédents une fonction h de classe C^∞ dans U telle que :

$$\begin{cases} \bar{\partial}u=g & \text{dans } U, \\ \operatorname{supp}(u) \subset \overline{U}^+. \end{cases}$$

Il s'en suit que $\tilde{f}-u$ est holomorphe dans U^+, de classe $C^\infty(\overline{U}^+)$ et sa restriction à ∂U^+ est f.

PROPOSITION 4.2. — *Supposons* (H_q) *vérifiée. Soit* f *une* (0, q) *forme* $\bar{\partial}_b$*-fermée sur* S, *de classe* C^∞. *Pour tout entier* k, *il existe une* (0, q) *forme* f, $\bar{\partial}_b$*-fermée dans* U^+, *telle que :*

$$\tilde{f} \in C^k_{x_{2n}}(H^{-s}_{x'}), \qquad \tilde{f}\,|_s = f.$$

La démonstration est la même que celle de la proposition 4.1.

Remarque 4.3. — Les résultats précédents montrent qu'il n'est pas nécessaire de supposer que f soit de classe C^∞, ni même que S soit de classe C^∞. Il suffit que f et S soient de classe C^N, N assez grand, son ordre de grandeur étant lié à l'entier s.

5. Une classe de domaines vérifiant (H_q)

Considérons dans C^n, avec $n \geqq q+2$, la classe d'hypersurfaces suivante, qui sera notée $(\mathscr{S})$:

$$\begin{cases} S \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow S \text{ est définie par } \{r=0\} \text{ avec :} \\ r = 2\,\mathrm{Re}\, z_n + \Phi(z') \qquad \text{où} \quad z'=(z_1, \ldots, z_{n-1}), \\ \Phi(z') \geqq 0, \\ \mathrm{Hess}(\Phi) \geqq |h| \text{ où } h \text{ est une fonction holomorphe, } \not\equiv 0, \\ \Phi(z') \to 0 \Rightarrow z' \to 0. \end{cases}$$

PROPOSITION. — *L'hypothèse* (H_q) *est satisfaite par la classe* $\mathscr{S}$, *en posant* $\lambda=h^2$.

Démonstration. — U^+ peut être définie par $\{\varphi < 1\}$, avec $\varphi=\exp(r)$. Comme :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_n\, \partial \bar{z}_n} = \varphi, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j} = \varphi\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_j}\right), \qquad i, j \leqq n-1$$

et :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_n} = 0 \qquad \text{si} \quad i \leqq n-1;$$

on voit que, au voisinage de 0, Hess $(\varphi) \geqq |h|$.

Montrons que si V est un voisinage de 0, il existe une fonction φ_V telle que :

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \varphi_V(0) > 1, \\ \{\varphi < 1\} \cap \{\varphi_V > 1\} \subset V, \\ \text{Hess}\,(\varphi_V) \geqq |h|. \end{cases}$$

Soit $\varphi_V = \exp(r_1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ à choisir, $r_1 = 2\,\mathscr{R}\, ez_n + \Phi/2 - \dfrac{|z_n|^2}{2}$.

On a bien $\varphi_V(0) = \exp(\varepsilon) > 1$.

Soit $z \in \{\varphi < 1\} \cap \{\varphi_V > 1\}$; cela donne :

$$\text{(5.2)} \qquad \begin{cases} 2\,\mathscr{R}\, ez_n + \varphi(z') < 0, \\ 2\,\mathscr{R}\, ez_n + \dfrac{\Phi}{2}(z') > -\varepsilon_1, \text{ avec } \varepsilon_1 \text{ petit avec } \varepsilon. \end{cases}$$

Cela entraîne $\Phi/2(z') \leqq \varepsilon_1$; donc si ε est assez petit, on a $|z'| \leqq \eta$, η petit, d'après une des conditions que satisfait Φ.

Combiné avec (5.2), cela entraîne que $|z| \leqq \eta_1$, η_1 petit. D'après [5], [6] et (5.1) entraîne qu'on peut résoudre le problème $(2)_q$. Il nous reste, pour satisfaire à la condition (H_q), si on prend $\lambda = h^2$, à montrer que $\partial h/\partial x'_{2n} = 0$; ceci découle du fait que :

$$h(z) = h(z') \qquad (\text{ici } x'_{2n} = \mathscr{R}\, ez_n + \varphi(z')/2).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI et C. D. HILL, E. E. CONVEXITY, and H. LEWY, *Problem; Part I: reduction to vanishing theorems* (*Ann. Scuola Normale Pisa*, vol. 26, 1972); *Part II: Vanishing theorems* (*Ann. Scuola Normale*, Pisa, vol. 26, 1972).

[2] A. ANDREOTTI et E. VESENTINI, *Carleman Estimates for the Laplace-Beltrani Equation on Complex Manifolds*, Publ. I.H.E.S., vol. 24-25.

[3] M. S. BAOUENDI et F. TREVES, *A Property of the Functions* (*Ann. Maths.*, vol. 113, 1981, p. 387-421).

[4] M. S. BAOUENDI, C. H. CHANG et F. TREVES, *Microlocal Hypo-analyticity and Extension of C.F. Function:* preprint.

[5] M. DERRIDJ, *Inégalités de Carleman et Extension locale des fonctions holomorphes* (*Ann. Scuola Normale*, Pisa, vol. IX-4, 1982.

[6] M. DERRIDJ et J. E. FORNAESS, *A Result on Extension of C.R. Functions* (*Ann. Inst. Fourier*, Fasc. 3, tome 33, 1983).

[7] L. HÖRMANDER, *L^2-estimates and Existence Theorems for the $\bar{\partial}$-operator* (*Acta Math.*, vol. 113, 1965).

[8] L. HÖRMANDER, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand.

[9] J. J. KOHN et H. ROSSI, *On the Extension of Holomorphic Functions from the Boundary of a Complex Manifold* (*Ann. Math.*, vol. 81, 1965).
[10] H. LEWY, *On the Local Character* (*Ann. Math.*, vol. 64, 1956).
[11] R. NIRENBERG, *On the H. Lewy Extension Phenomenon* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 168, 1972).
[12] F. TREVES, *Cours à l'École Polytechnique*, mai 1981.

(Manuscrit reçu le 18 mars 1983,
révisé le 6 juillet 1983.)

M. DERRIDJ,
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay,
Mathématique,
Bât. n° 425,
91405 Orsay Cedex.