ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

D. BARLET

Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 17, n° 2 (1984), p. 293-315

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_2_293_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 293 à 315.

CONTRIBUTION EFFECTIVE DE LA MONODROMIE AUX DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

PAR D. BARLET

Introduction

Soit X un polydisque de centre 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$, et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur X vérifiant $f(0)=0$. Pour $h \in C_c^\infty(X)$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z)>0$ posons :

$$\langle T_z, h \rangle = \int_X |f(x)|^{2z} h(x)\, dm(x),$$

où dm désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^{n+1}$. Ceci définit une distribution T_z sur X qui dépend analytiquement de z (au sens que pour h fixée, $\langle T_z, h \rangle$ est une fonction holomorphe de z) et qui admet un prolongement méromorphe au plan complexe tout entier ; ceci est une conséquence facile de l'existence du polynôme de Bernstein-Sato de f (voir [1]). Les pôles de ce prolongement méromorphe apparaissant en des translatés par des entiers négatifs des zéros de ce polynôme.

Nous nous proposons de montrer ici que si la monodromie de f en zéro admet un bloc de Jordan de taille (k, k) pour la valeur propre $e^{-i\pi r}$ (où $r \in \mathbb{C}$ vérifie $0 \leqq \mathrm{Re}(r) < 2$) alors T_z admet un pôle d'ordre au moins k en un point de la forme $-r/2-\nu$ où $\nu \in \mathbb{N}$.

Ceci permet de voir, grâce aux résultats de B. Malgrange sur le lien entre la monodromie de f et le polynôme de Bernstein-Sato de f, que toute racine de ce dernier produit effectivement une série de pôles dans le prolongement méromorphe de T_z. Ceci donne également une nouvelle démonstration du fait que les valeurs propres de la monodromie sont des racines de l'unité en utilisant le théorème d'existence des développements asymptotiques de [1] pour les intégrales du type :

$$\int_{f=s} \varphi,$$

où $\varphi \in C_c^\infty(X)$ est une forme de type (n, n) sur X, et une transformation de Mellin.

0. Soit $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe, non nul et notons par

$f : X \to D$ un représentant de Milnor de ce germe, c'est-à-dire que D est un disque de centre 0 assez petit et que X est la trace sur $f^{-1}(D)$ d'une boule de centre 0 assez petite dans $\mathbb{C}^{n+1}$, pour que f induise une fibration C^∞ localement triviale de $X - f^{-1}(0)$ sur $D^* = D - \{0\}$. Nous nous proposons dans cette situation de prouver le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit $r \in \mathbb{C}$ et supposons que $e^{-i\pi r}$ soit valeur propre pour la monodromie de $H^*(X(s)\mathbb{C})$ (1) avec un bloc de Jordan de taille $k \geqq 1$. Alors pour tout voisinage Δ de 0 dans X, il existe une forme φC^∞ de type (n, n) sur X et à support compact contenu dans Δ telle que la fonction $F_\varphi : D \to \mathbb{C}$ définie par*

$$F_\varphi(s) = \int_{f=s} \varphi,$$

ait un terme non nul de la forme $s^m \bar{s}^{m'} |s|^r (\mathrm{Log}|s|)^j$ dans son développement asymptotique en $s=0$, avec m et m' entiers et $j \geqq k-1$.

On remarquera qu'une formulation équivalente consiste à dire que le prolongement méromorphe au plan complexe de la fonction holomorphe définie pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ par

$$G_\psi(z) = \int_X |f|^{2z} \psi,$$

a un pôle d'ordre $\geqq k$ en un point de la forme $-r/2 - \nu$ avec $\nu \in \mathbb{N}$, pour une forme ψC^∞ de type $(n+1, n+1)$ sur X et à support compact dans Δ (prendre $\psi = f^{m'} \bar{f}^m \varphi \, df \wedge \overline{df}$) (2).

La démonstration de ce théorème occupera tout le reste de cet article.

Elle sera organisée de la manière suivante :

Au paragraphe 1 nous fixerons les notations pour l'étude du prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ et de la connexion de Gauss-Manin. Nous terminerons par le lemme A qui permet de traduire en terme de p-formes holomorphes sur X l'hypothèse que la monodromie agissant sur $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ admet un bloc de Jordan de taille (k, k) pour la valeur propre $e^{-i\pi r}$.

Au paragraphe 2 nous donnerons les ingrédients essentiels de la preuve du théorème : les lemmes B_1, C_1 et C_2, ainsi que les lemmes D et E. Ceci nous permettra de donner la démonstration du théorème pour $k = 1$.

---

(1) Ici $X(s) = f^{-1}(s)$ et $s \in D - \{0\}$.

(2) Pour la réciproque, considérer $l \in \mathbb{N}$ tel que $f^l \Omega^{n+1} \subset \Omega^n_X \wedge df$ et si $\psi \in C_c^\infty(X)^{n+1, n+1}$ produit un pôle d'ordre $\geqq k$ en $-r/2 - \nu$, poser :

$$\psi = \varphi \frac{df \wedge \overline{df}}{f^l \bar{f}^l} \quad \text{avec} \quad \varphi \in C_c^\infty(X)^{n,n}.$$

Alors $\int_{f=s} \varphi$ admettra dans son développement asymptotique en $s=0$ un terme non nul de la forme $s^{\nu+l-1} \bar{s}^{\nu+l-1} |s|^r (\mathrm{Log}|s|)^j$ pour un $j \geqq k-1$.

Au paragraphe 3 nous prouverons le lemme B_2 qui, avec la variante vectorielle des lemmes C_1 et C_2 permettra de prouver le théorème dans le cas général avec une démarche analogue au cas $k=1$.

Nous terminerons par quelques remarques.

1. *a.* Commençons par rappeler que l'existence du polynôme de Bernstein-Sato de f permet de montrer (*voir* [1] § 2 prop. 5) que pour toute forme θ dans $C_c^\infty(X)$ de type $(n+1, n+1)$, la fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(z)>0$, définie par :

$$G_\theta(z)=\int_X |f|^{2z}\theta$$

admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, avec des pôles éventuels en les translatés par des entiers négatifs ou nuls des racines du polynôme de Bernstein-Sato de f et de leurs conjugués (si on ne sait pas que ces racines sont réelles [K]).

LEMME 1. — *Considérons une forme différentielle* ω C^∞ *de type* $(p, 0)$ *sur* X. *Soit* $a\in\mathbb{Z}$ *et* $u\in\mathbb{C}$; *pour* F *méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *notons par* $P_a(z=u, F(z))$ *le coefficient de* $(z-u)^{-a}$ *dans le développement de Laurent de* F *au point* $z=u$. *Alors la forme linéaire sur les formes* C^∞ *à support compact et de type* $(n-p+1, n+1)$ *sur* X *qui est définie par :*

$$\langle T, \psi\rangle = P_a\left(z=u, \int_X |f|^{2z}\omega\wedge\psi\right)$$

est un courant de type $(p, 0)$ *sur* X. *Pour* $a>0$ *on aura* $Supp(T)\subset\{f=0\}$, *et pour* $a=0$ *la restriction de* T *à* $X-f^{-1}(0)$ *coïncide avec la forme* $|f|^{2u}.\omega$ *qui est* C^∞ *sur cet ouvert.*

Démonstration. — Soit b le polynôme de Bernstein-Sato de f et posons $B(z)=b(z).\overline{b(\bar{z})}$. En reprenant la démonstration du prolongement méromorphe de G_θ donnée dans [1] § 2 prop. 5, on obtient pour chaque entier $M\in\mathbb{N}$ un opérateur différentiel Q_M, dépendant polynomialement de z tel que l'on ait, pour $\mathrm{Re}(z)>0$:

$$\int_X |f|^{2z}.\theta=\frac{1}{B(z)B(z+1)\ldots B(z+M-1)}\int_X |f|^{2(z+M)}.Q_M(\theta)\,(z).$$

Soit K un compact de l'ouvert $\mathrm{Re}(z+M)>0$ sur lequel le polynôme $B_M(z)=B(z)B(z+1)\ldots B(z+M-1)$ ne s'annule pas. On aura alors, si $\|\ \|_K$ désigne la norme « sup » sur K :

$$\|G_\theta\|_K\leqq C.\,[\operatorname*{Inf}_K|B_M|]^{-1}.\left\|\operatorname*{Sup}_{z\in K}|Q_M(\theta)\,(z)|\right\|_{L^1(K)}$$

où la constante C ne dépend que de K.

Ceci montre que dans ces conditions, l'application linéaire qui à θ dans $C_c^\infty(X)^{(n+1,\,n+1)}$ associe $G_\theta|K$ est continue de l'espace $C_c^\infty(X)^{(n+1,\,n+1)}$ muni de sa topologie standard à valeurs dans l'espace de Banach $C^0(K, \mathbb{C})$. Si $u\in\mathbb{C}$ on peut choisir $M\in\mathbb{N}$

assez grand pour avoir $\mathrm{Re}(u+\mathrm{M})>0$. Prenons alors pour K un cercle de centre u et de rayon $\varepsilon>0$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\mathrm{K}\subset\{\mathrm{Re}(z+\mathrm{M})>0\}$;

(ii) le polynôme $\mathrm{B_M}(z)$ ne s'annule pas dans $\overline{\mathrm{D}(u,\varepsilon)}-\{u\}$ où $\mathrm{D}(u,\varepsilon)$ désigne le disque de centre u et de rayon ε. Alors on a pour chaque $a\in\mathbb{Z}$:

$$\mathrm{P}_a(z=u,\mathrm{G}_\theta(z))=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{K}}\mathrm{G}_\theta(t).(t-u)^{a-1}\,dt$$

d'après la formule de Cauchy, ce qui prouve que T est bien un courant de type $(p,0)$ sur X, puisque $h\to\int_{\mathrm{K}}h(t).(t-u)^{a-1}\,dt$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{C}^0(\mathrm{K},\mathbb{C})$, et que $\psi\to\omega\wedge\psi$ est linéaire continue de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})^{(n-p+1,\,n+1)}$ dans $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})^{(n+1,\,n+1)}$ pour leurs topologies standards.

Les assertions $\mathrm{Supp}(\mathrm{T})\subset\{f=0\}$ pour $a>0$ et $\mathrm{T}/\mathrm{X}-f^{-1}(0)=|f|^{2u}.\omega$ découlent immédiatement du fait que pour θ dans $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ de type $(n+1,n+1)$ et vérifiant $\mathrm{Supp}(\theta)\cap\{f=0\}=\varnothing$ la fonction G_θ est entière. Ceci achève la démonstration du lemme 1.

Remarque. — Pour $j\in\mathbb{N}$ donné, le lemme 1 montre aussi que les formules :

$$\langle\mathrm{T}_j,\psi\rangle=\mathrm{P}_a\left(z=u,\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\omega\wedge\psi\right)$$

définissent également des courants de type $(p,0)$ sur X. En effet, on a :

$$\langle\mathrm{T}_j,\psi\rangle=\mathrm{P}_a\left(z=u,\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z-2j}f^j\omega\wedge\psi\right)=\mathrm{P}_a\left(z=u-j,\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}(f^j\omega)\wedge\psi\right)$$

qui relève du cas traité dans le lemme 1.

b. Dans la situation de Milnor $f:\mathrm{X}\to\mathrm{D}$, pour $p\in[0,n]$ nous noterons par $\mathbf{GM}^p$ le faisceau :

$$\mathbf{H}^p(f_*(\Omega^\cdot_{\mathrm{X}/f},d_{/f}))$$

où $(\Omega^\cdot_{\mathrm{X}/f},d_{/f})$ désigne le complexe de De Rham relatif de f; rappelons que par définition on a :

$$\Omega^i_{\mathrm{X}/f}=\Omega^i_{\mathrm{X}}/\Omega^{i-1}_{\mathrm{X}}\wedge df$$

et que la différentielle relative $d_{/f}$ est induite par la différentielle ordinaire. Les faisceaux $\mathbf{GM}^p$ sont cohérents sur D et munis d'une connexion méromorphe en 0, appelée connexion de Gauss-Manin, qui est à singularité régulière (*voir* par exemple [D] ou [M. 1]), et que l'on peut décrire de la manière suivante : si $w\in f_*\Omega^p_{\mathrm{X}/f}$ vérifie $d_{/f}w=0$, alors on a $dw=v\wedge df$ où $v\in f_*\Omega^{p-1}_{\mathrm{X}}$. En général on n'a pas $d_{/f}v=0$, mais la relation $dv\wedge df=0$ implique l'existence de $l\in\mathbb{N}$ avec $d_{/f}(f^lv)=0$. La connexion (méromorphe) de Gauss-Manin est alors définie par :

$$\nabla(w)=(f^lv)\otimes\frac{1}{s^l}\in\mathbf{GM}^p\underset{\mathscr{O}_{\mathrm{D}}}{\otimes}\mathscr{O}_d\left[\frac{1}{s}\right].$$

Sur $D-\{0\}$ le faisceau cohérent $\mathbf{GM}^p$ est associé au fibré vectoriel $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ où $X(s)=f^{-1}(s)$: en effet le complexe de De Rham holomorphe est une résolution acyclique du faisceau $\underline{\mathbb{C}}$ sur une variété de Stein, et permet donc de calculer la cohomologie à coefficients complexes. Or la fibre en s du complexe de De Rham relatif de f est précisément le complexe de De Rham holomorphe sur $X(s)$ qui est une variété de Stein pour $s \neq 0$.

Comme $f : X - f^{-1}(0) \to D - \{0\}$ est une fibration C^∞ localement triviale (*voir* [*M*]) $s \to H_p(X(s), \mathbb{Z})$ est un système local sur D^*. Si $\tilde{H}_p(X(s), \mathbb{Z})$ désigne l'image de $H_p(X(s), \mathbb{Z})$ dans $H_p(X(s), \mathbb{C})$, la collection des $\tilde{H}_p(X(s), \mathbb{Z})$ définit une connexion holomorphe sur le fibré $s \to H_p(X(s), \mathbb{C})$, d'où une connexion duale sur la restriction de $\mathbf{GM}^p$ à $D-\{0\}$ ([3]). Cette connexion coïncide avec la connexion de Gauss-Manin définie plus haut. La régularité de ∇ sur $\mathbf{GM}^p$ nous permettra de passer du point de vue « topologique » au point de vue « holomorphe » en utilisant l'unicité méromorphe des extensions cohérentes d'un fibré muni d'une connexion ∇ pour lesquelles ∇ est à point singulier régulier [*voir* par exemple (D)]. De manière précise elle nous donnera que toute section holomorphe de $\mathbf{GM}^p$ uniforme sur D^* qui admet des composantes à croissance modérée en 0 dans la base horizontale multiforme, est la restriction à D^* d'une section méromorphe de $\mathbf{GM}^p$.

Fixons $s_0 \in D^*$, et soit $p \in [0, n]$ tel que la monodromie :

$$T : H^p(X(s_0), \mathbb{C}) \to H^p(X(s_0), \mathbb{C})$$

admette un bloc de Jordan (k, k) pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ où $u \in \mathbb{C}$ vérifie $0 \leqq \mathrm{Re}(u) < 1$. Notons par $e(s_0)$ un élément de $H^p(X(s_0), \mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}^k$ vérifiant

$$(T \otimes 1) . e(s_0) = e^{-2i\pi u} . e(s_0) + (1 \otimes N_0) . e(s_0)$$

où N_0 est un endomorphisme nilpotent principal (c'est-à-dire de polynôme minimal égal à x^k) de $\mathbb{C}^k$. On supposera de plus que le sous-espace vectoriel de $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ qui est engendré par les composantes de $e(s_0)$ est de dimension égale à k. Notons par e la section horizontale multiforme du fibré $s \to H^p(X(s), \mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}^k$ qui prend la valeur $e(s_0)$ en s_0 (pour donner un sens précis à cette assertion on doit se placer sur le revêtement universel de D^*). On aura alors pour tout $s \in D^*$ la relation :

$$(T \otimes 1) . e(s) = e^{-2i\pi u} . e(s) + (1 \otimes N_0) . e(s).$$

Considérons alors l'endormorphisme nilpotent N de $\mathbb{C}^k$ qui vérifie

$$e^{-2i\pi u} \mathrm{Id} + N_0 = \exp[-2i\pi(u . \mathrm{Id} + N)].$$

Alors N est également un nilpotent principal dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^k)$. Considérons alors la section

([3]) Pour le « dictionnaire » entre systèmes locaux et connexion, *voir* (D).

multiforme sur D* suivante de $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$:

$$\varepsilon(s) = \exp[(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).\mathrm{Log}\, s].e(s) \quad (4)$$

elle est uniforme sur D* puisque la monodromie agissant sur $e(s)$ par $\exp[-2i\pi(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N})]$ on aura :

$$\mathrm{T}.\varepsilon(s) = \exp[(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).(\mathrm{Log}\, s + 2i\pi)].\exp[-2i\pi(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N})].e(s) = \varepsilon(s).$$

Comme ε est à croissance modérée dans la base horizontale multiforme (ε_j est définie comme combinaison linéaire des e_i avec des coefficients du type $s^u.\mathrm{P}(\mathrm{Log}\, s)$ où P est un polynôme) il existe un entier $\tilde{m}$ tel que $s^{\tilde{m}}.\varepsilon(s)$ soit la restriction à D* d'une section holomorphe globale du faisceau $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$.

Il existe donc $w \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_{\mathrm{X}}^p) \otimes \mathbb{C}^k$, vérifiant $d_{/f}\, w = 0$, et dont la classe dans $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$ coïncide sur D* avec $s \to s^{\tilde{m}}.\varepsilon(s)$. Comme on a, par horizontalité de e

$$s.(\nabla\varepsilon)(s) = s.\frac{d}{ds}(\exp[(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).\mathrm{Log}\, s]).e(s) = (u.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).\varepsilon(s)$$

si $l \in \mathbb{N}^*$ est tel que $s^l.\nabla$ envoie $\mathbf{GM}^p$ dans $\mathbf{GM}^p$, alors la section $s^l.(\nabla w)(s) - (\hat{u}.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).s^{l-1}\, w(s)$ sera de torsion dans $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$, où l'on a posé $\hat{u} = u + \tilde{m}$; et si s^q annule cet élément de torsion de $\mathbf{GM}^p$ on aura :

$$s^{l+q}.(\nabla w)(s) - (\hat{u}.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).s^{l+q-1}\, w(s) = 0$$

dans $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$.

On peut alors trouver a et b dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_{\mathrm{X}}^{p-1}) \otimes \mathbb{C}^k$ vérifiant

$$f^{l+q}.(\nabla w) - f^{l+q-1}.(\hat{u}.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).w = da + df \wedge b \quad \text{sur X},$$

grâce à l'annulation des $\mathrm{R}^i f_* \Omega^{\cdot}_{\mathrm{X}/f}$ pour $i \geqq 1$ qui assure que les sections globales de $\mathbf{GM}^p$ sur D sont données par le quotient de

$$\{ w \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega^p_{\mathrm{X}/f}) / d_{/f}\, w = 0 \} \quad \text{par} \quad d_{/f}[\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega^{p-1}_{\mathrm{X}/f})].$$

Par définition de ∇ sur $\mathbf{GM}^p$, on obtient alors :

$$f^{l+q}.dw = \frac{df}{f}(\hat{u}.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).f^{l+q}\, w + df \wedge da \quad \text{sur X}.$$

En posant $\omega = f^{l+q}.w + df \wedge a$, $m = \tilde{m} + l + q$, on obtient :

$$d\omega = \frac{df}{f} \wedge ((m+u).\mathrm{Id}+\mathrm{N}).\omega \quad \text{sur X}.$$

Dans $\mathbb{C}^k$ effectuons un changement de base mettant N sous forme canonique (des 1

(4) Avec la convention qu'un endomorphisme M de $\mathbb{C}^k$ agit sur $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}(s), \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^k$ par $1 \otimes \mathrm{M}$.

au-dessus de la diagonale et des zéros ailleurs). Alors les composantes $\omega_1, \ldots, \omega_k$ de ω dans cette nouvelle base vérifient

$$d\omega_j = (m+u)\frac{df}{f} \wedge \omega_j + \frac{df}{f} \wedge \omega_{j-1} \quad \text{sur } X \qquad \forall j \in [1, k]$$

avec la convention $\omega_0 = 0$; de plus on a $d_{/f}\omega_j = 0$ pour chaque $j \in [1, k]$ et ω_1 ne définit pas un élément de torsion de $\mathbf{GM}^p(D)$, puisque les $\omega_j(s_0)$ engendrent un sous espace de dimension k dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$.

Rassemblons ce qui vient d'être obtenu :

LEMME A. — *Dans la situation de Milnor* $f : X \to D$, *si la monodromie* T *agissant sur* $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ *pour* $s_0 \in D^*$ *et* $p \in [0, n]$, *admet un bloc de Jordan de taille* (k, k) *relatif à la valeur propre* $e^{-2i\pi u}$ (*où* $0 \leqq \mathrm{Re}(u) < 1$), *il existe des p-formes holomorphes* $\omega_1, \ldots, \omega_k$ *sur* X *et un entier m, tels que l'on ait :*

(i) $$d\omega_j = (m+u)\frac{df}{f} \wedge \omega_j + \frac{df}{f} \wedge \omega_{j-1} \quad \text{sur } X \qquad \textit{pour} \quad j \in [1, k]$$

avec la convention $\omega_0 = 0$;

(ii) $d_{/f}\omega_1 = 0$ *et l'image de* ω_1 *dans* $\mathbf{GM}^p(D)$ *n'est pas de torsion.*

2. Soit u un nombre complexe fixé vérifiant $0 \leqq \mathrm{Re}(u) < 1$. Toujours dans la situation de Milnor, supposons qu'il existe une p-forme holomorphe w sur X (avec $p \in [0, n]$) et un entier m tels que l'on ait :

(i) $$dw = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w \quad \text{sur} \quad X$$

(ii) $d_{/f}w = 0$ et w n'induit pas un élément de torsion de $\mathbf{GM}^p(D)$.

Supposons alors que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et toute forme différentielle $\psi \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n+1)$ le prolongement méromorphe de la fonction (holomorphe pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$) :

$$z \to \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w \wedge \psi$$

n'a pas de pôle en $z = -m-u$ et $z = -m-u-1$.

LEMME B_1. — *Sous ces hypothèses, pour* $j \in \mathbb{Z}$ *et* $\psi \in C_c^\infty(X)$ *de type* $(n-p+1, n+1)$ *posons :*

$$\langle T_j, \psi \rangle = Pf\left(z = -m-u, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w \wedge \psi \right)$$

où on a préféré la notation P f *à* P_0 *pour désigner le terme constant dans le développement*

de Laurent. Alors les courants sur X *ainsi définis (voir le lemme* 1 *et la remarque qui le suit) vérifient :*

$$d\mathrm{T}_j = -(j+m+u).\,\bar{df} \wedge \mathrm{T}_{j+1} \quad \textit{sur } \mathrm{X} \quad \textit{pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

Preuve du lemme B_1. — Soit φ une forme $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ de degré total $2n+1-p$; par définition de la différentielle extérieure d'un courant on aura :

$$\langle d\mathrm{T}_j, \varphi \rangle = (-1)^{p-1} \langle \mathrm{T}_j, d\varphi \rangle = (-1)^{p-1}\, \mathrm{P}f\left(z=-m-u, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w \wedge d\varphi \right)$$

Pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ la forme différentielle $|f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge \varphi$ de classe C^1 à support compact dans X et sa différentielle est donnée par :

$$\begin{aligned} d[|f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge \varphi] &= d[|f|^{2z}\bar{f}^{-j} w] \wedge \varphi + (-1)^p |f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge d\varphi \\ &= (z+m+u)|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge w \wedge \varphi + (z-j)|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge w \wedge \varphi \\ &\qquad + (-1)^p |f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stokes, on obtient pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$:

$$\begin{aligned} (-1)^{p-1}\int_{\mathrm{X}} |f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge d\varphi &= (z+m+u)\int_{\mathrm{X}} |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge w \wedge \varphi \\ &\quad + (z+m+u)\int_{\mathrm{X}} |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge w \wedge \varphi - (j+m+u)\int_{\mathrm{X}} |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{\bar{df}}{\bar{f}} \wedge w \wedge \varphi. \end{aligned}$$

Par prolongement analytique cette identité sera vraie pour les prolongements méromorphes à $\mathbb{C}$ des fonctions considérées. De plus l'absence (supposée) de pôle en $z=-m-u$ et $z=-m-u-1$ pour les prolongements méromorphes des intégrales de la forme

$$\int_{\mathrm{X}} |f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge \psi \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z} \quad \text{et tout } \psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$$

montrent que les parties finies en $z=-m-u$ des deux premiers termes du second membre de l'égalité ci-dessus sont nulles. En effet, on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}f\left(z=-m-u, (z+m+u)\int_{\mathrm{X}} |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge w \wedge \varphi \right) \\ &\qquad = \mathrm{Res}\left(z=-m-u, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2(z-1)}\bar{f}^{-j+1}\, df \wedge w \wedge \varphi \right) \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{P}f\left(z=-m-u,\,(z+m+u)\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\wedge w\wedge\varphi\right)$$
$$=\mathrm{Res}\left(z=-m-u,\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-(j+1)}\,d\bar{f}\wedge w\wedge\varphi\right).\quad(*)$$

On obtient donc :

$$\langle d\mathrm{T}_j,\varphi\rangle=-\,(j+m+u)\,\mathrm{P}f\left(z=-m-u,\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\wedge w\wedge\varphi\right)$$

ce qui donne la relation

$$d\mathrm{T}_j=-\,(j+m+u)\,d\bar{f}\wedge\mathrm{T}_{j+1}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme B_1.

Remarque. — Il apparaît clairement dans la démonstration du lemme B_1 que pour prouver l'identité $d\mathrm{T}_j=-(j+m+u)\,d\bar{f}\wedge\mathrm{T}_{j+1}$ pour un j donné, il suffit de savoir que pour tout $\psi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ le prolongement méromorphe de

$$\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-(j+1)}\,w\wedge\psi$$

n'a pas de pôle en $z=-m-u$ et que le prolongement méromorphe de

$$\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j+1}\,w\wedge\psi$$

n'a pas de pôle en $z=-m-u-1$.

Le lemme suivant va nous permettre d'utiliser les courants T_j considérés ci-dessus :

LEMME C_1. — *Soit* $(\mathrm{T}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *des courants de type* $(p,0)$ *sur* X, *et supposons qu'il existe des nombres complexes* $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *vérifiant :*

$$d\mathrm{T}_j=u_j\,d\bar{f}\wedge\mathrm{T}_{j+1}\quad\textit{pour tout } j\in\mathbb{Z}.$$

Alors il existe des p-formes holomorphes $(\mathrm{S}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *sur* X *et des courants* $(\mathrm{U}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *de degré* $p-1$ *sur* X *vérifiant :*

$$\mathrm{T}_j=(-1)^p\,\bar{\mathrm{S}}_j+d\mathrm{U}_j-u_j\,d\bar{f}\wedge\mathrm{U}_{j+1}\quad\textit{pour tout } j\in\mathbb{Z}.$$

les formes S_j *vérifiant de plus*

$$d\mathrm{S}_j=\bar{u}_j\,df\wedge\mathrm{S}_{j+1}\quad\textit{pour tout } j\in\mathbb{Z}.$$

(*) Ici on a préféré la notation Res à P_1 pour désigner le résidu !

Preuve du lemme C_1. -- Commençons par remarquer que le résultat est trival pour $p=0$ ([5]).

Soit $p\geqq 1$; supposons construits des courants $U_j^{p-k,k-1}$ sur X de type $(p-k, k-1)$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$, pour tout $k=1, 2, \ldots, l$ avec $l\leqq p$ et vérifiant :

$$(*) \qquad d' U_j^{p-k,k-1} = d'' U_j^{p-k+1,k-2} - u_j \bar{df} \wedge U_{j+1}^{p-k+1,k-2} \quad \text{pour } k\geqq 2$$

et $d' U_j^{p-1,0} = T_j$ pour $k=1$. On remarquera que la relation imposée aux T_j combinée avec le fait qu'ils soient de type $(p, 0)$ montre que l'on a $d' T_j = 0$ pour chaque j; en appliquant le théorème B de H. Cartan combiné avec le lemme de Dolbeault-Grothendieck, on en déduit que l'on peut trouver des courants $U_j^{p-1,0}$ sur X qui permettent d'amorcer notre récurrence.

Calculons

$$d' [d'' U_j^{p-l,l-1} - u_j \bar{df} \wedge U_{j+1}^{p-l,l-1}]$$

d'abord pour $l=1$; on obtient :

$$-d'' T_j + u_j \bar{df} \wedge T_{j+1} = 0$$

puisque, pour des raisons de type,

$$d'' T_j = dT_j = u_j \bar{df} \wedge T_{j+1}.$$

Pour $l\geqq 2$ on obtient :

$$-d'' [d'' U_j^{p-l+1,l-2} - u_j \bar{df} \wedge U_{j+1}^{p-l+1,l-2}] + u_j \bar{df} \wedge d' U_{j+1}^{p-l,l-1}$$
$$= -u_j \bar{df} \wedge d'' U_{j+1}^{p-l+1,l-2} + u_j \bar{df} \wedge d'' U_{j+1}^{p-l+1,l-2} = 0$$

en utilisant la relation $(*)$ pour $k=l$.

Si on a $p-l\geqq 1$ alors on peut trouver (toujours grâce au théorème B de H. Cartan et au lemme de Dolbeault-Grothendieck) des courants $U^{p-l-1,l}$ pour $j\in\mathbb{Z}$, de type $(p-l-1, l)$ sur X et vérifiant :

$$d' U_j^{p-l-1,l} = d'' U_j^{p-l,l-1} - u_j \bar{df} \wedge U_{j+1}^{p-l,l-1} \quad \text{sur X.}$$

Pour $l=p$ on aura :

$$d' [d'' U_j^{0,p-1} - u_j \bar{df} \wedge U_{j+1}^{0,p-1}] = 0 \quad \text{sur X.}$$

Posons alors $\bar{S}_j = d'' U_j^{0,p-1} - u_j \bar{df} \wedge U_{j+1}^{0,p-1}$; c'est un courant de type $(0, p)$ sur X d'-fermé. D'après le lemme de Dolbeault-Grothendieck (conjugué) c'est le conjugué d'une p-forme holomorphe S_j sur X. De plus on a :

$$d'' \bar{S}_j = u_j \bar{df} \wedge d'' U_{j+1}^{0,p-1} = u_j \bar{df} \wedge S_{j+1}$$

ce qui prouve la relation

$$dS_j = \bar{u}_j \, df \wedge S_{j+1}.$$

([5]) D'après Dolbeault-Grothendieck les T_j sont des fonctions antiholomorphes!

Posons maintenant :

$$U_j = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} U_j^{p-i,\,i-1}$$

pour chaque j; alors U_j est un courant de degré $p-1$ sur X et on a :

$$dU_j = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} dU_j^{p-i,\,i-1}$$

ce qui donne en regroupant par types :

$$dU_j = d'U_j^{p-1,\,0} + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i [d'U_j^{p-i-1,\,i} - d''U_j^{p-i,\,i-1}] + (-1)^{p-1} d''U_j^{0,\,p-1}$$

ce qui donne, en utilisant la relation (*) :

$$dU_j = T_j + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} u_j \bar{df} \wedge U_{j+1}^{p-i,\,i-1} + (-1)^{p-1} (\bar{S}_j + u_j \bar{df} \wedge U_{j+1}^{0,\,p-1})$$

et donc

$$dU_j = T_j + u_j \bar{df} \wedge U_{j+1} + (-1)^{p-1} \bar{S}_j$$

ce qui achève la preuve du lemme C_1.

LEMME C_2. — *Dans la situation du lemme* C_1, *supposons que l'on ait de plus les relations*

$$\bar{f}.T_{j+1} = T_j \quad \textit{pour tout } j \leqq j_0 + p - 1$$

et

$$u_{j+1} = u_j - 1 \quad \textit{pour tout } j \leqq j_0 + p - 1.$$

Alors dans la conclusion du lemme C_1 *on peut choisir les p-formes holomorphes* S_j *de manière à satisfaire la relation :*

$$f.S_{j+1} = S_j \quad \textit{pour tout } j \leqq j_0.$$

Démonstration. — Pour tout $a \geqq 0$ on a donc l'égalité

$$T_{j_0+p-a} = \bar{f}^a . T_{j_0+p}.$$

Si on a choisi les courants $U_j^{p-1,\,0}$ arbitrairement pour $j \geqq j_0 + p$ vérifiant $d'U_j^{p-1,\,0} = T_j$, on peut poser $U_{j_0+p-a}^{p-1,\,0} = \bar{f}^a . U_{j_0+p}^{p-1,\,0}$ pour $a \geqq 0$, puisque l'on a :

$$d'(\bar{f}^a . U_{j_0+p}^{p-1,\,0}) = \bar{f}^a . d'U_{j_0+p}^{p-1,\,0} = \bar{f}^a . T_{j_0+p} = T_{j_0+p-a}.$$

Supposons construits les courants $U_j^{p-k,\,k-1}$ pour $k = 1, 2, \ldots, l < p$ et $j \in \mathbb{Z}$ vérifiant la condition supplémentaire suivante :

$$U_{j_0+p-a}^{p-k,\,k-1} = \bar{f}^{a-k+1} . U_{j_0+p-k+1}^{p-k,\,k-1} \quad \text{pour tout } a \geqq k-1$$

nous voulons montrer que l'on peut choisir le courant $U^{p-l-1,l}_{j_0+p-a}$ pour $a \geqq l$ comme étant égal à $f^{a-l}.\, U^{p-l-1,l}_{j_0+p-l}$.

Ceci étant une tautologie pour $a=l$, il suffit de considérer le cas où $a \geqq l+1$. Comme la seule condition qui a présidé au choix de $U^{p-l-1,l}_j$ est la relation :

$$d'U^{p-l-1,l}_j = d''U^{p-l,l-1}_j - u_j\, \bar{df} \wedge U^{p-l,l-1}_{j+1}$$

il nous suffit de vérifier que $d'[\bar{f}^{a-l}.\, U^{p-l-1,l}_{j_0+p-l}]$ prend la bonne valeur. On a :

$$d'[\bar{f}^{a-l}.\, U^{p-l-1,l}_{j_0+p-l}] = \bar{f}^{a-l}.[d''\, U^{p-l,l-1}_{j_0+p-l} - u_{j_0+p-l}\, \bar{df} \wedge U^{p-l,l-1}_{j_0+p-l+1}]$$
$$-d''[\bar{f}^{a-l}\, U^{p-l,l-1}_{j_0+p-l}] - (a-l).\bar{f}^{a-l-1}\, \bar{df} \wedge U^{p-l,l-1}_{j_0+p-l} - u_{j_0+p-l}\, \bar{df} \wedge \bar{f}^{a-l}\, U^{p-l,l-1}_{j_0+p-l+1}$$

et comme on a, pour $a \geqq l+1$, grâce à notre hypothèse de récurrence les relations

$$\bar{f}^{a-l-1}\, U^{p-l,l-1}_{j_0+p-l} = \bar{f}^{a-l}\, U^{p-l,l-1}_{j_0+p-l+1} = U^{p-l,l-1}_{j_0+p-a+1}$$

et de plus $u_{j_0+p-l} = u_{j_0+p} + l$, on trouve :

$$d'[\bar{f}^{a-l}\, U^{p-l-1,l}_{j_0+p-l}] = d''\, U^{p-l,l-1}_{j_0+p-a} - (u_{j_0+p}+a)\, \bar{df} \wedge U^{p-l,l-1}_{j_0+p-a+1}$$

ce qui est la relation désirée puisque $u_{j_0+p-a} = u_{j_0+p} + a$.

Pour $l=p$ on aura donc $\bar{f}^{a-p+1}\, U^{0,p-1}_{j_0+1} = U^{0,p-1}_{j_0+p-a}$ pour $a \geqq p-1$. Comme S_j est définie par la relation :

$$\bar{S}_j = d''\, U^{0,p-1}_j - u_j\, \bar{df} \wedge U^{0,p-1}_{j+1}$$

donc pour $j = j_0 + p - a$ avec $a \geqq p$ on aura simultanément :

$$\bar{f}^{a-p}\, U^{0,p-1}_{j_o} = U^{0,p-1}_{j_0+p-a} \qquad \text{et} \qquad \bar{f}^{a-p}\, U^{0,p-1}_{j_0+1} = U^{0,p-1}_{j_0+p-a+1}$$

ce qui donnera, toujours pour $a \geqq p$:

$$\bar{S}_{j_0+p-a} = d''[\bar{f}^{a-p}\, U^{0,p-1}_{j_0}] - u_{j_0+p-a}\, \bar{df} \wedge \bar{f}^{a-p}\, U^{0,p-1}_{j_0+1}$$
$$= (a-p).\, \bar{f}^{a-p-1}\, \bar{df} \wedge U^{0,p-1}_{j_0} + \bar{f}^{a-p}\, d''\, U^{0,p-1}_{j_0} - U_{j_0+p-a}\, \bar{df} \wedge \bar{f}^{a-p}\, U^{0,p-1}_{j_0+1}.$$

Si maintenant on suppose $a \geqq p+1$, on aura

$$\bar{f}^{a-p-1}\, U^{0,p-1}_{j_0} = \bar{f}^{a-p}\, U^{0,p-1}_{j_0+1}$$

ce qui, compte tenu de la relation $u_{j_0+p-a} = u_{j_0} + a - p$ donne $\bar{S}_{j_0+p-a} = \bar{f}^{a-p}\, \bar{S}_{j_0}$ pour $a \geqq p+1$; mais comme cette égalité est évidente pour $a=p$, on en déduit que pour tout $j < j_0$ on a $S_j = f.\, S_{j+1}$.

Ceci prouve que sous les hypothèses ci-dessus, on aura pour tout $j < j_0$ $d\bar{S}_j = \bar{u}_j\, df/f \wedge S_j$.

Il est évident que les S_j construites au lemme C_2 définissent des sections globales sur D de $\mathbf{GM}^p$. Le lemme suivant permet (entre autres choses) de montrer que ces sections

ne dépendent pas, modulo la torsion de $\mathbf{GM}^p$, des choix effectués dans la construction.

LEMME D. — *Soit w une p-forme holomorphe sur* X, *soit u un nombre complexe, et soit* $m \in \mathbb{N}$. *On suppose que l'on ait :*

$$dw = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w \quad \textit{sur} \quad X - f^{-1}(0).$$

S'il existe des courants U *et* V *sur* X *vérifiant* $f^{-m}|f|^{-2u}w = dU + \bar{df} \wedge V$ *comme courants sur* $X - f^{-1}(0)$ *alors fw définit un élément de torsion dans* $\mathbf{GM}^p$.

Preuve du lemme. — Commençons par remarquer que, en vertu des assertions ci-dessus (*) sur $\mathbf{GM}^p$, pour qu'une section globale de $\mathbf{GM}^p$ soit de torsion il faut et il suffit que pour chaque $s \in D^*$ elle induise 0 dans $H^p(X(s), \mathbb{C})$. Fixons $s_0 \in D^*$ arbitraire, et soit D_0 un disque de centre s_0 contenu dans D^* assez petit pour l'application

$$f/f^{-1}(D_0) \to D_0$$

admette une trivialisation C^∞. Fixons alors un C^∞-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(D_0) & \xrightarrow[\sim]{F} & X(s_0) \times D_0 \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle pr_2} & \\ & D_0 & \end{array}$$

Considérons une forme C^∞ φ à support compact et de degré $2n-p$ sur $X(s_0)$, vérifiant $d\varphi = 0$, représentant dans $H_c^{2n-p}(X(s_0), \mathbb{C})$ l'image d'un p-cycle $c(s_0) \in \tilde{H}_p(X(s_0), \mathbb{Z})$ (6)

via la dualité de Poincaré $H_p(X(s_0), \mathbb{C}) \tilde{\to} H_c^{2n-p}(X(s_0), \mathbb{C})$. Alors pratiquement par définition de la connexion de Gauss-Manin (au sens de l'horizontalité dans le fibré $s \to H_p(X(s), \mathbb{C})$) la restriction de $F^*(pr_1^*(\varphi))$ à $X(s)$ pour $s \in D_0$ (qui est une forme C^∞ à support compact dans $X(s)$ et qui est d-fermée) induit dans $H_c^{2n-p}(X(s), \mathbb{C})$ l'image (*via* la dualité de Poincaré) de $c(s) \in \tilde{H}_p(X(s), \mathbb{Z})$, où c désigne l'unique section horizontale du fibré $s \to H_p(X(s), \mathbb{C})$ sur D_0 qui vaut $c(s_0)$ en s_0.

Considérons maintenant une fonction $g \in C_c^\infty(D_0)$ vérifiant :

$$\int_{D_0} g(s)\, ds \wedge \bar{ds} = 1,$$

et posons $\psi = f^*(g(s)\, ds \wedge \bar{ds}) \wedge F^*(pr_1^*(\varphi))$. Alors ψ est une forme C^∞ à support compact dans $f^{-1}(D_0)$ qui est d-fermée. De plus on a $\psi \wedge df = 0$ et $\psi \wedge \bar{df} = 0$ sur $f^{-1}(D_0)$, et ψ est de degré $2n+2-p$. Montrons que ψ représente dans $H_c^{2n+2-p}(f^{-1}(D_0), \mathbb{C})$ l'image

(*) *Voir* **1** b.

(6) $\tilde{H}_p(X(s), \mathbb{Z})$ désigne ici l'image de $H_p(X(s), \mathbb{Z})$ dans $H_p(X(s), \mathbb{C})$.

(*via* la dualité de Poincaré) de $c(s_0)$. En effet si θ est une p-forme C^∞ d-fermée sur $f^{-1}(D_0)$ on aura :

$$\int_{f^{-1}(D_0)} \psi \wedge \theta = \int_{D_0} g(s)\, ds \wedge \bar{ds} \int_{X(s)} F^*(pr_1^*(\varphi)) \wedge \theta$$

d'après le théorème de Fubini (pour un produit!). Comme $c(s)$ est homologue à $c(s_0)$ dans $f^{-1}(D_0)$ pour $s \in D_0$, on aura

$$\int_{c(s)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta$$

pour tout $s \in D_0$ (puisque $d\theta = 0$) et comme $F^*(pr_1^*(\varphi))$ représente l'image de $c(s)$ dans $H_c^{2n-p}(X(s), \mathbb{C})$ on aura :

$$\int_{X(s)} F^*(pr_1^*(\varphi)) \wedge \theta = \int_{c(s)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta$$

pour tout $s \in D_0$. On obtient donc finalement :

$$\int_{f^{-1}(D_0)} \psi \wedge \theta = \int_{D_0} g(s)\, ds \wedge \bar{ds} \int_{c(s_0)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta$$

ce qui prouve notre assertion.

Calculons maintenant $\int_{c(s_0)} f^{-m-u}.w$ où l'on suppose que l'on a fixé une détermination de $\operatorname{Log} s$ sur D_0 (ce qui permet de définir f^{-u} sur $f^{-1}(D_0)$). Comme l'hypothèse faite sur w implique que la p-forme $f^{-m-u}.w$ est d-fermée sur $f^{-1}(D_0)$, on aura, d'après ce qui précède :

$$\int_{c(s_0)} f^{-m-u}.w = \int_{f^{-1}(D_0)} f^{-m} |f|^{-2u} w(\bar{f}^u \psi) = \langle dU + \bar{df} \wedge V, \bar{f}^u \psi \rangle.$$

et comme on a $d\psi = 0$, $\psi \wedge df = 0$ et $\psi \wedge \bar{df} = 0$ sur $f^{-1}(D_0)$ on en déduit que w induit 0 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$. Ceci achève la preuve du lemme D.

LEMME E. — *Soit u un nombre complexe donné vérifiant $0 \leqq \operatorname{Re}(u) < 1$. Alors il existe un entier $\tilde{M}(u) \in \mathbb{Z}$ tel que pour toute p-forme holomorphe w sur X qui vérifie :*

$$dw = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w \qquad \text{où} \quad m \in \mathbb{Z}$$

avec $m < \tilde{M}(u)$, la section (globale) du faisceau $\mathbf{GM}^p$ définie par $f.w$ soit de torsion.

Démonstration. — Soit $s_0 \in D^*$ fixé, et soit $e_1(s_0), \ldots, e_\varkappa(s_0)$ une base du sous-espace propre de la monodromie $T^p : H^p(X(s_0), \mathbb{C}) \to H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ pour la valeur propre $\exp(-2i\pi u)$. Notons par $e_1, \ldots, e_\varkappa$ les sections horizontales multiformes de $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ qui prennent les valeurs $e_1(s_0), \ldots, e_\varkappa(s_0)$ respectivement en s_0 (cette

assertion ne prend un sens précis qu'en considérant le revêtement universel de D*). Notons par $c_1(s_0), \ldots, c_h(s_0)$ une $\mathbb{Z}$-base de $\tilde{H}_p(X(s_0), \mathbb{Z})$ (rappelons que cette notation désigne l'image de $H_p(X(s_0), \mathbb{Z})$ dans $H_p(X(s_0), \mathbb{C})$), et notons par $c_1, \ldots, c_h$ les sections horizontales multiformes de $s \to H_p(X(s), \mathbb{C})$ qui prennent les valeurs $c_1(s_0), \ldots, c_h(s_0)$ respectivement en s_0. Notons aussi par $w_1, \ldots, w_l$ un système générateur du sous-faisceau de $\mathbf{GM}^p$/torsion dont la restriction à D* est engendrée (fibre par fibre) par les $e_j(s)$. En fait, on pourrait facilement montrer que ce sous-faisceau est libre de rang κ sous les hypothèses considérées, mais nous n'utiliserons pas ce point.

Pour tout $i \in [1, \kappa]$ et tout $j \in [1, h]$ les fonctions sur D* :

$$s \to \int_{c_j(s)} e_i(s)$$

sont constantes (par horizontalité), et nous noterons par $I_{i,j}$ leurs valeurs. Si $w_a(s) = \sum_{b=1}^{\kappa} w_{a,b}(s) . e_b(s)$ est l'écriture des w_a dans la base horizontale multiforme $e_1, \ldots, e_\kappa$, alors les $w_{a,b}$ sont des fonctions holomorphes multiformes à croissance modérée quand $s \to 0$; et le fait que pour chaque $i \in [1, \kappa]$ on ait

$$e_i(s . e^{2i\pi}) = s^{-u} . e_i(s) \quad (*)$$

ainsi que l'uniformité des w_a, montre que les fonctions holomorphes $s^{-u} . w_{a,b}(s) = \tilde{w}_{a,b}(s)$ sont uniformes sur D* et également à croissance modérée à l'origine. Il existe donc un entier relatif $M(u) \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $a \in [1, l]$ et tout $b \in [1, \kappa]$ la fonction $s^{M(u)} . w_{a,b}(s)$ soit holomorphe sur D. On a alors pour $a \in [1, l]$ et $j \in [1, h]$:

$$\int_{c_j(s)} w_a(s) = \sum_{b=1}^{\kappa} w_{a,b}(s) \int_{c_j(s)} e_b(s) = \sum_{b=1}^{\kappa} I_{b,j} . s^{u - M(u)} (s^{M(u)} . \tilde{w}_{a,b}(s)),$$

ce qui prouve que pour tout $a \in [1, l]$ et tout $j \in [1, h]$, on a

$$\int_{c_j(s)} w_a(s) = s^{u - M(u)} . g_{j,a}(s)$$

où $g_{j,a}$ est une fonction holomorphe sur D tout entier. Considérons maintenant une p-forme holomorphe w sur X qui vérifie $dw = (m+u)\, df/f \wedge w$ sur X ; on aura $d(f . w) = (m+u+1)\, df \wedge w$ et donc $d_{/f}(f . w) = 0$ et $f . w$ définit donc une section globale du faisceau $\mathbf{GM}^p$ sur D. De plus, la section multiforme $f^{-m-u} . w$ est horizontale sur D*. On a donc, pour tout $j \in [1, h]$:

$$\int_{c_j(s)} f . w = s^{m+u+1} \int_{c_j(s)} f^{-m-u} . w = A_j . s^{m+u+1}$$

(*) Ceci signifie que comme section sur le revêtement universel de D* défini par $t = \operatorname{Log} s$, on a

$$e_i(t + 2i\pi) = e^{-ut} . e_i(t).$$

où $A_j \in \mathbb{C}$, puisque la fonction $s \to \int_{c_j(s)} f^{-m-u}.w$ est constante par horizontalité. Comme $f^{-m-u}.w$ induit dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ soit zéro, soit un vecteur propre de la monodromie T^p pour la valeur propre $\exp(-2i\pi u)$, il existe des nombres complexes $z_1, \ldots, z_\varkappa$ tels que la classe induite par $f^{-m-u}.w$ dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ soit $z_1 e_1(s_0) + \ldots + z_\varkappa e_\varkappa(s_0)$. Alors la section horizontale multiforme du fibré $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ donnée par $f^{-m-u}.w - \sum_{i=1}^{\varkappa} z_i.e_i$ s'annule en s_0 ; elle est donc identiquement nulle sur le disque pointé D*. Ceci montre que la section de $\mathbf{GM}^p$/torsion induite par $f.w$ est dans le sous-faisceau engendré par $w_1, \ldots, w_h$. D'après ce qui précède, on aura donc pour chaque $j \in [1, h]$:

$$\int_{c_j(s)} f.w = s^{u-M(u)}.h_j(s)$$

où h_j est une fonction holomorphe sur le disque D tout entier. On en déduit alors l'égalité :

$$A_j.s^{m+u+1} = s^{u-M(u)}.h_j(s)$$

ce qui donne

$$h_j(s) = A_j.s^{1+M(u)+m} \qquad \text{(rappelons que } A_j \in \mathbb{C}\text{)}.$$

Pour $m < -(1+M(u))$ on aura donc (puisque h_j est holomorphe en $s=0$) $A_j = 0$ pour tout $j \in [1, h]$, ce qui signifie que pour tout $s \in D^*$ la classe induite par $f.w$ dans $H^p(X(s), \mathbb{C})$ est nulle. Donc $f.w$ est de torsion dans $\mathbf{GM}^p$, ce qui achève la démonstration du lemme E, avec $\tilde{M}(u) = -(1+M(u))$.

COROLLAIRE. — *Pour $u \in \mathbb{C}$ donné vérifiant $0 \leqq \mathrm{Re}(u) < 1$, il existe $\tilde{M}(u) \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $w \in H^0(X, \Omega_X^p)$ vérifiant :*

$$dw = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w \quad \textit{sur } X \textit{ avec } m < \tilde{M}(u) \quad \textit{et} \quad m \in \mathbb{Z}$$

il existe a et b dans $H^0(X^*, \Omega_X^{p-1})$ vérifiant :

$$w = a \wedge df + db \quad \textit{sur } X^* = X - f^{-1}(0).$$

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement du fait que le sous-faisceau de torsion de $\mathbf{GM}^p$ est de support l'origine sous nos hypothèses, pour chacune de ses sections il existe donc une puissance de f qui l'annule, ce qui donne le corollaire.

Démonstration du théorème si $k=1$. — D'après le lemme A il existe $\omega_1 \in H^0(X, \Omega_X^p)$ vérifiant $d_{/f}\omega_1 = 0$ $d\omega_1 = (m+u)\,df/f \wedge \omega_1$ et qui n'induit pas un élément de torsion dans $\mathbf{GM}^p(D)$. Si pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $\psi \in C_c^\infty(X)$ forme différentielle de type $(n-p+1, n+1)$, le prolongement méromorphe de la fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ donnée par

$$z \to \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega_1 \wedge \psi$$

n'admet jamais de pôle en $z=-m-u$ et $z=-m-u-1$, alors le lemme B 1 nous montre que les courants sur X définis par :

$$\langle T_j, \psi \rangle = Pf\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega_1 \wedge \psi \right)$$

vérifient les relations

$$dT_j = -(j+m+u).\, d\bar{f} \wedge T_{j+1}$$

et

$$\bar{f}.\, T_{j+1} = T_j \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

Les lemmes C_1 et C_2 associent aux courants T_j des formes holomorphes S_j de degré p sur X qui satisferont aux relations

$$dS_j = -(j+m+\bar{u}).\, \frac{df}{f} \wedge S_j \quad \text{pour tout } j \leqq j_0. \quad (7)$$

Le corollaire du lemme E donne alors que pour j_0 assez grand (en fait $j_0 > -m-\tilde{M}(-\bar{u})$ avec les notations de ce corollaire) il existe a et b dans $H^0(X^*, \Omega_X^{p-1})$ vérifiant :

$$S_{j_0} = a \wedge df + db \quad \text{sur } X^*.$$

On en déduit que

$$T_{j_0} = (-1)_p [\bar{a} \wedge d\bar{f} + d\bar{b}] + dU_{j_0} - (j_0+m+u).\, d\bar{f} \wedge U_{j_0+1}$$

Comme le courant T_{j_0} coïncide sur $X - f^{-1}(0)$ avec la forme différentielle $|f|^{-2m-2u} \bar{f}^{-j_0} \omega_1$, le lemme D donne que ω_1 induit un élément de torsion dans $GM^p(D)$ ce qui contredit notre hypothèse. Il est donc impossible que pour chaque $j \in \mathbb{Z}$ et pour chaque ψ forme différentielle de type $(n-p+1, n+1)$ dans $C_c^\infty(X)$ le prolongement méromorphe de $z \to \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega_1 \wedge \psi$ n'ait jamais de pôle en $z=-m-u$ et $z=-m-u-1$, ce qui achève la démonstration du théorème dans le cas $k=1$.

Remarque importante. — Supposons que l'on n'ait pas de pôle pour le prolongement analytique de

$$\int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega \wedge \psi$$

pour $j < j_0 + p$ en $z=-m-u-1$ où ω satisfait

$$d\omega = (m+u) \frac{df}{f} \wedge \omega \qquad \text{et} \qquad \omega / H^p(X(s_0), \mathbb{C}) \neq 0 \qquad \text{pour} \quad s_0 \in D^*.$$

(7) De manière précise ceci signifie que pour chaque $j_0 \in \mathbb{Z}$, on peut choisir les S_j vérifiant ces relations pour $j \leqq j_0$.

Alors on peut construire les T_j pour $j<j_0+p$ et les S_j pour $j<j_0$ avec les mêmes relations que plus haut. La preuve ci-dessus donnera alors une contradiction dès que l'on aura $j_0>-\tilde{M}(-\bar{u})-m$. On peut donc affirmer que pour une telle ω on aura nécessairement un pôle pour le prolongement de

$$\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j_1}\omega\wedge\psi$$

pour un $\psi\in C_c^\infty(X)^{n-p+1,n+1}$ bien choisi en $z=-m-u-1$ avec

$$j_1=-\tilde{M}(-\bar{u})-m+p+1.$$

3. La difficulté principale pour étendre la démonstration du cas $k=1$ au cas général est résolue dans le lemme B_2 ci-dessous qui sera un bon substitut pour le lemme B_1 qui est manifestement insuffisant pour $k\geqq 2$.

LEMME B_2. — *Soit $\hat{u}\in\mathbb{C}$ et $k\in\mathbb{N}$; soient $w_1,\ldots,w_k$ des p-formes holomorphes sur X vérifiant*

$$dw_j=\hat{u}\frac{df}{f}\wedge w_j+\frac{df}{f}\wedge w_{j-1}$$

pour $j\in[1,k]$ (avec la convention $w_0=0$). On suppose que pour tout $j\in\mathbb{Z}$ et toute forme différentielle $\psi\in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1,n+1)$ et tout $l\in[1,k]$ le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ de la fonction holomorphe définie pour $\mathrm{Re}(z)\gg 0$ par

$$z\to\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}w_l\wedge\psi$$

n'admet pas, pour $z=-\hat{u}$ et $z=-\hat{u}-1$ de pôle d'ordre $\geqq k$. Alors les courants T_j^i sur X de type $(p,0)$ définis par :

$$\langle T_j^i,\psi\rangle=\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^a P_{a+i}\left(z=-\hat{u},\int_X|f|^{2z}\bar{f}^{-j}w_{a+1}\wedge\psi\right)$$

où $P_a(z=-\hat{u},F(z))$ pour F méromorphe sur $\mathbb{C}$ désigne le coefficient de $(z+\hat{u})^{-a}$ dans le développement de Laurent de F en $z=-\hat{u}$, vérifient

$$dT_j^i=T_{j+1}^{i+1}-(\hat{u}+j).d\bar{f}\wedge T_{j+1}^i$$

pour tout $j\in\mathbb{Z}$ et tout $i\in\mathbb{N}$ (on remarquera que notre hypothèse implique la nullité de T_j^i pour $i\geqq k$).

Démonstration. — Commençons déjà par montrer que l'on a $d'T_j^i=0$ pour tout i et j. Soit φ une forme différentielle de type $(n-p,n+1)$ dans $C_c^\infty(X)$; par définition du d' d'un courant on a :

$$\langle d'T_j^i,\varphi\rangle=(-1)^{p-1}\langle T_j^i,d'\varphi\rangle.$$

Or pour $\mathrm{Re}(z)\gg 0$ on a, d'après la formule de Stokes pour $a\in[0,\ k-1]$ (toujours avec la convention $w_0=0$) :

$$\int_X d[|f|^{2z}\bar{f}^{-j}w_{a+1}\wedge\varphi]=0$$

$$=(z+\hat{u})\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge w_{a+1}\wedge\varphi+\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge w_a\wedge\varphi$$

$$+(-1)^p\int_X |f|^{2z}w_{a+1}\wedge d'\varphi$$

ce qui donne :

$$\mathrm{P}_{a+i}\Big(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}w_{a+1}\wedge d'\varphi\Big)$$

$$=(-1)^{p-1}\,\mathrm{P}_{a+i+1}\Big(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge w_{a+1}\wedge\varphi\Big)$$

$$+(-1)^{p-1}\,\mathrm{P}_{a+i}\Big(z=-\hat{u}.\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge w_a\wedge\varphi\Big)$$

et donc

$$\langle d'\mathrm{T}^i_j,\ \varphi\rangle=(-1)^{p-1}\langle \mathrm{T}^i_j,\ d'\varphi\rangle$$

$$=\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^{a+p-1}\,\mathrm{P}_{a+i}\Big(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}w_{a+1}\wedge d'\varphi\Big)$$

$$=\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^{a}\,\mathrm{P}_{a+i+1}\Big(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge w_{a+1}\wedge\varphi\Big)$$

$$+\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^{a}\,\mathrm{P}_{a+i}\Big(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f}\wedge w_a\wedge\varphi\Big)=0$$

puisque $w_0=0$ et que $\mathrm{P}_b(z=-\hat{u},\ \ldots)=0$ pour $b\geqq k$.

Calculons maintenant $d''\mathrm{T}^i_j$; soit $\chi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathrm{X})$ une forme différentielle de type $(n-p+1,\ n)$. On a, par définition du d'' d'un courant

$$\langle d''\mathrm{T}^i_j,\ \chi\rangle=(-1)^{p-1}\langle \mathrm{T}^i_j,\ d''\chi\rangle.$$

Comme plus haut, pour $\mathrm{Re}(z)\gg 0$ on a, d'après la formule de Stokes :

$$\int_X d[|f|^{2z}\bar{f}^{-j}w_{a+1}\wedge\chi]=0$$

$$=(z-j)\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j-1}\,\bar{df}\wedge w_{a+1}\wedge\chi+(-1)^p\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}w_{a+1}\wedge d''\chi$$

ce qui donne, en écrivant $z-j=(z+\hat{u})-(\hat{u}+j)$:

$$P_{a+i}\left(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\,w_{a+1}\wedge d''\chi\right)=$$

$$(-1)^{p-1}\,P_{a+i+1}\left(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j-1}\,\bar{df}\wedge w_{a+1}\wedge\chi\right)$$

$$+(-1)^p(\hat{u}+j).\,P_{a+i}\left(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j-1}\,\bar{df}\wedge w_{a+1}\wedge\chi\right).$$

et donc

$$\langle d''T^i_j,\ \chi\rangle=(-1)^{p-1}\langle T^i_j,\ d''\chi\rangle$$

$$=\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^{a+p-1}\,P_{a+i}\left(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\,w_{a+1}\wedge d''\chi\right)$$

$$=\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^a\,P_{a+i+1}\left(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j-1}\,\bar{df}\wedge w_{a+1}\wedge\chi\right)$$

$$+\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^{a+1}(\hat{u}+j).\,P_{a+i}\left(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j-1}\,\bar{df}\wedge w_{a+1}\wedge\chi\right).$$

On en déduit l'égalité suivante entre courants sur X :

$$dT^i_j=\bar{df}\wedge T^{i+1}_{j+1}-(\hat{u}+j).\,\bar{df}\wedge T^i_{j+1}.$$

Remarque. — En notant par $\tilde{T}_j$ le courant à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^k$ dont les composantes sont $T^{k-1}_j,\ldots,T^0_j$, et en définissant l'endomorphisme $\tilde{u}_j$ (*) de $\mathbb{C}^k$ par $\tilde{u}_j(e_l)=-(\hat{u}+j).\,e_l+e_{l-1}$ où $e_1,\ldots,e_k$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^k$ avec la convention $e_0=0$, le résultat du lemme précédent se formule de la manière suivante :

$$d\tilde{T}_j=\tilde{u}_j.\,\bar{df}\wedge\tilde{T}_{j+1}.$$

On constate alors en relisant les démonstrations des lemmes C_1 et C_2, qu'elles s'appliquent également pour une suite de courants vectoriels.

On remarquera également que les courants vectoriels $\tilde{T}_j$ que l'on vient de définir satisfont à la relation $\bar{f}.\,\tilde{T}_{j+1}=\tilde{T}_j$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$, ce qui permettra effectivement d'appliquer le lemme C_2 à la suite des courants vectoriels déduite du lemme B_2 (grâce à la remarque plus haut).

Démonstration du théorème pour k quelconque. — D'après le lemme A il existe des

(*) Remarquez que l'on a $\tilde{u}_{j+1}=\tilde{u}_j-\mathrm{Id}$ pour $j\in\mathbb{Z}$.

p-formes holomorphes $\omega_1, \ldots, \omega_k$ sur X, $d_{/f}$-fermées et vérifiant :

$$d\omega_j = (m+u).\frac{df}{f}\wedge\omega_j + \frac{df}{f}\wedge\omega_{j-1} \qquad \text{pour} \quad j\in[1,\,k]$$

avec la convention $\omega_0=0$; on a de plus que ω_1 n'induit pas un élément de torsion de $\mathbf{GM}^p(D)$. Posons $\hat{u}=m+u$.

Si l'on suppose que pour tout $j\in\mathbb{Z}$ et toute forme différentielle $\psi\in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1,\,n+1)$ le prolongement méromorphe de $z\to\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\,\omega_h\wedge\psi$ n'admette pas de pôle d'ordre $\geqq k$ pour $z=-\hat{u}$ et $z=-\hat{u}-1$ $\forall h\in[1,\,k]$, il existe des courants vectoriels $\tilde{T}_j$ dont les composantes $T_j^{k-1},\ldots,T_j^0$ sont données par :

$$\langle T_j^i,\psi\rangle = \sum_{a=0}^{k-1}(-1)^a P_{a+i}\left(z=-\hat{u},\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\,\omega_{a+1}\wedge\psi\right)$$

et qui vérifient, d'après le lemme B_2 et la remarque qui le suit :

$$d\tilde{T}_j=\tilde{u}_j.\bar{df}\wedge\tilde{T}_{j+1} \qquad \text{et} \qquad \bar{f}.\tilde{T}_{j+1}=\tilde{T}_j \quad \text{pour tout } j\in\mathbb{Z}$$

où $\tilde{u}_j$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ donné par :

$$\tilde{u}_j(e_a)=-(j+\hat{u}).e_a+e_{a+1}$$

où $e_1,\ldots,e_k$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^k$ (avec la convention $e_0=0$). Comme de plus pour $i>0$ la restriction de T_j^i à $X-f^{-1}(0)$ est nulle (car si $\mathrm{supp}(\theta)\cap\{f=0\}=\varnothing$ la fonction $z\to\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\theta$ est entière), la restriction de T_j^0 à $X-f^{-1}(0)$ coïncide avec la forme différentielle $|f|^{-2u}\bar{f}^{-j}\omega_1$. En appliquant la variante vectorielle des lemmes C_1 et C_2 (*voir* la remarque qui suit le lemme B_3) aux $\tilde{T}_j$, on obtient des p-formes holomorphes vectorielles $\tilde{S}_j$ vérifiant :

$$d\tilde{S}_j=\tilde{\bar{u}}_j.\frac{df}{f}\wedge\tilde{S}_j \quad \text{pour tout } j\leqq j_0,$$

où $\tilde{\bar{u}}$ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ conjugué de $\tilde{u}_j$. On aura en particulier :

$$dS_j^0=-(j+\bar{\hat{u}}).\frac{df}{f}\wedge S_j^0 \quad \text{pour tout } j\leqq j_0.$$

Pour j_0 assez grand le corollaire du lemme E permet de trouver des $(p-1)$-formes holomorphes a et b sur X* vérifiant $S_{j_0}^0=a\wedge df+db$.

On aura alors, en utilisant les courants (vectoriels) $\tilde{U}_j$ qui relient les $\tilde{T}_j$ au $\tilde{S}_j$ (*voir* le lemme C_1) :

$$T_{j_0}^0=(-1)^p[\bar{a}\wedge\bar{df}+\bar{db}]+dU_{j_0}^0-(j_0+\hat{u}).\bar{df}\wedge U_{j_0+1}^0.$$

Ceci montre que sur $X-f^{-1}(0)$ il existe deux courants U et V vérifiant :

$$|f|^{-2u}\bar{f}^{-j_0}\omega_1 = dU + d\bar{f}\wedge V \quad \text{sur } X-f^{-1}(0).$$

Le lemme D nous montre alors que ω_1 induit un élément de torsion de $\mathbf{GM}^p(D)$, ce qui contredit notre hypothèse. Il existe donc $j_1\in\mathbb{Z}$ $\psi\in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n+1)$ et $h\in[1, k]$ tels que le prolongement méromorphe de $z\to\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j_1}\omega_h\wedge\psi$ admette un pôle d'ordre au moins égal à k en $z=-\hat{u}$ ou $z=-\hat{u}-1$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. — Comme dans le cas $k=1$ on peut dire plus précisément qu'il existe $h\in[1, k]$ et $\psi\in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n+1)$ tels que le prolongement analytique de $\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j_1}\omega_h\wedge\psi$ ait un pôle d'ordre $\geqq k$ en $z=-m-u-1$ pour $j_1=-\tilde{M}(-\bar{u})-m+p+1$.

Remarque 1. — En utilisant le théorème 1 de [1] et un argument classique de transformation de Mellin (*voir* [1] prop. 5), on obtient une nouvelle démonstration du fait que, sous les hypothèses du théorème ci-dessus, on a $r\in\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que toute valeur propre de la monodromie est racine de l'unité dans le cas analytique local.

Remarque 2. — En utilisant les résultats récents de B. Malgrange sur le lien entre polynôme de Bernstein-Sato et monodromie (*voir* [M.2]) on obtient, comme corollaire du théorème démontré plus haut, que toute racine du polynôme de Bernstein-Sato de f produit effectivement une série de pôles dans le prolongement analytique de $|f|^{2z}$.

Pour terminer, nous allons montrer comment le théorème prouvé ici permet de montrer le résultat suivant, dû à B. Malgrange (*voir* [M 1]) :

Dans la situation du théorème, si $b\in\mathbb{C}[z]$ désigne le polynôme de Bernstein-Sato de f, et si l'on pose :

$$b^{\exp}(z) = \prod_j (z-\exp 2i\pi a_j)$$

où $b(z)=\prod_j (z-a_j)$, alors $(z-\exp(-i\pi r))^k$ divise $b^{\exp}$.

Démonstration. — Le prolongement analytique de $|f|^{2z}$ fait apparaître des facteurs du type $b(z)b(z+1)\ldots b(z+q)\bar{b}(z)\bar{b}(z+1)\ldots\bar{b}(z+q)$ pour $\mathrm{Re}(z+q)>0$, où l'on a posé $\bar{b}(z)=\overline{b(z)}$ (*voir* [1] prop. 5). Il s'agit de se débarrasser des facteurs $\bar{b}(z+j)$! En fait ceci repose sur la remarque suivante : pour faire le prolongement méromorphe pour $\mathrm{Re}(z+m+2)>0$ de

$$\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\theta \qquad \text{où} \quad \theta\in C_c^\infty(X)^{n+1, n+1}$$

il suffit d'introduire un facteur $b(z)b(z+1)\ldots b(z+M)$; en effet, en utilisant $(M+1)$-fois l'identité de Bernstein pour f on obtiendra :

$$b(z)b(z+1)\ldots b(z+M)\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\theta = \int_X |f|^{2z} f^{M+1}\bar{f}^{-j} Q_z^{M+1}(\theta)$$

où Q_z^{M+1} désigne l'adjoint de l'opérateur P_z^{M+1} qui vérifie

$$P_z^{M+1} f^{z+M+1} = b(z)\, b(z+1)\ldots b(z+M)\, f^z$$

(P_z^{M+1} est un opérateur différentiel holomorphe sur X qui dépend polynomialement de z, et il en est de même pour Q_z^{M+1}).

Si on prend $M > j+2m+3$ le membre droite sera holomorphe sur l'ouvert $\mathrm{Re}(z+m+2)>0$ et donc l'existence d'un pôle d'ordre $\geqq k$ en $z=-r/2-m-1$ pour $\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\theta$ qui est prouvée (pour θ bien choisie) montre que $b^{\exp}$ est divisible par $(z-\exp(-i\pi r))^k$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BARLET, *Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur les fibres* (*Inv. Math.*, vol. 68, 1982).

[D] P. DELIGNE, *Equations différentielles à points singuliers réguliers* (*Lecture Notes* n° 163, Springer-Verlag, 1970).

[K] M. KASHIWARA, B-*functions and Holonomic Systems* (*Inv. Math.*, vol. 38-1, 1976).

[M 1] B. MALGRANGE, *Polynôme de Bernstein-Sato*, (Publication de l'IRMA de Strasbourg, vol. 28, RCP 25, 1980).

[M 2] B. MALGRANGE, *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente* [*Colloque d'Analyse et Topologie sur les espaces singuliers*, Luminy, 1981 (à paraître)].

[*M*] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces* (*Ann. of Math. Studies* 61, Princeton, 1968).

(Manuscrit reçu le 14 février 1983, révisé le 28 avril 1983)

D. BARLET
Université Nancy-I,
U.E.R. Sciences Mathématiques,
E.R.A., n° 839, B.P. n° 239,
54506 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex.