ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. P. HENRY
M. MERLE
C. SABBAH

Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 17, n° 2 (1984), p. 227-268
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_2_227_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 227 à 268.

SUR LA CONDITION DE THOM STRICTE POUR UN MORPHISME ANALYTIQUE COMPLEXE

PAR J. P. HENRY, M. MERLE et C. SABBAH

Introduction

On sait qu'un espace analytique complexe réduit X est topologiquement constructible : le type topologique du germe (X, x) est constant le long des strates d'une stratification de Whitney de X, d'après le premier lemme d'isotopie de Thom-Mather. De même, ainsi que l'a démontré H. Hironaka [H_2], un morphisme f: $X \to S$ avec dim $S = 1$ est topologiquement constructible : le type topologique du germe (f, x) est constant le long des strates d'une stratification de Whitney de X qui satisfait la condition A_f de Thom, d'après le deuxième lemme d'isotopie, et une telle stratification existe car dim $S = 1$. Il n'en n'est plus de même si dim $S \geqq 2$, car une telle stratification n'existe pas nécessairement.

H. Hironaka a donné une condition suffisante pour que l'on puisse commencer à construire une telle stratification [H_2]. En la modifiant un peu, elle devient nécessaire, et nous l'appelons condition de non-éclatement en codimension 0 (*voir* § 4). Si on veut caractériser numériquement une telle stratification, il faut, comme dans le cas absolu, renforcer la condition A_f. Nous ne savons pas s'il existe une bonne définition relative de la condition b de Whitney. Par contre, la condition W (*voir* [H_1], [V]) peut être rendue relative simplement, et on obtient la condition W_f dite condition de Thom stricte (*voir* § 1). Peut-on alors commencer à construire une stratification satisfaisant à la condition W_f sous la condition de non-éclatement en codimension 0? Un de résultats principaux de ce travail est de montrer que c'est possible (résultat qui avait été annoncé trop rapidement dans [S_1]). Quand dim $S = 1$, ce résultat a déja été démontré par V. Navarro [N_2], de même que les conditions numériques que nous obtenons pour définir une telle stratification (*voir* [H-M_2] et [T_2] pour le cas absolu).

L'utilisation des sections planes, contrairement au cas absolu, n'est pas appropriée pour démontrer ces résultats. Les variétés polaires relatives, introduites par B. Teissier, sont plus adaptées à cette question. Elles sont définies comme adhérence d'un lieu critique d'une projection relative de la partie où le morphisme est lisse. L'image par cette projection de la variété polaire relative, qu'on appelle dirimant relatif, peut être considérée comme une section plane duale relative. En effet, les dirimants ont beaucoup de points

communs avec les sections planes, entre autres la transitivité, contrairement aux variétés polaires. Cette notion de dirimant a été introduite par D. T. Lê sous le nom de diagramme de Cerf [L].

Les multiplicités des variétés polaires relatives, ou de dirimants relatifs, sont des invariants analytiques du morphisme. Nous reprenons ici une démarche inaugurée par H. Hironaka [H_3] qui consiste à comparer, et si possible à rendre équivalentes une condition d'incidence, une condition de constance d'invariants numériques, et une condition d'équidimensionalité des fibres d'un éclatement au-dessus du lieu de ramification (*). La liaison entre les deux dernières conditions provient du résultat suivant :

Un espace analytique réduit et équidimensionnel X est de multiplicité constante le long d'une sous-variété lisse Y, si et seulement si il est normalement ouvert le long de Y (pseudo normalement plat au sens de [H_1]), c'est-à-dire si les fibres réduites du cône normal $C_Y X$ sont de dimension constante.

Nous renvoyons à [Li] et aux références qui y sont données pour une démonstration de ce résultat. De ce fait, les démonstrations que nous faisons consistent en général à calculer des dimensions, à l'aide du théorème de transversalité de Kleiman [K_1] ou de résultats de transversalité plus fins.

Rappelons que dans le cas des familles d'hypersurfaces à singularités isolées, la condition A_f de Thom intervient comme la condition d'équisingularité "nombre de Milnor constant" [LS] tandis que la condition W_f, sous le pseudonyme de C-cosécance, intervient comme la condition « μ^* constant » [T_1].

1. La condition W_f

Soit $f : X \to S$ un morphisme entre espaces analytiques réduits. On supposera toujours dans la suite qu'il existe un ouvert de Zariski dense X^0 de X, sur lequel le morphisme f est lisse et de corang d, où d est un entier positif ou nul.

Soit Y une sous-variété analytique de X, sur laquelle f est de corang constant, et soit x_0 un point de Y.

1.1. DÉFINITION. — *On dira que le couple* (X^0, Y) *satisfait la propriété* W_f *au point* x_0 *s'il existe un plongement du germe* (X, x_0) *dans* $(\mathbb{C}^N, 0)$, *au voisinage* U *de* x_0 *dans* X, *et une constante* $C>0$ *tels que pour tout* $y \in U \cap Y$ *et tout* $x \in U \cap X^0$, *on ait*

$$\delta(T_y Y_{f(y)}, T_x X_{f(x)}) \leqq C d(x, y)$$

où $T_x X_{f(x)}$ *désigne l'espace tangent en x à la fibre de* $f|_{X^0}$, *d est la distance euclidienne (ou une distance équivalente) dans* $\mathbb{C}^N$, *et* δ *est la distance de sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{C}^N$ *définie par*

$$\delta(E, F) = \sup_{\substack{u \in E \setminus \{0\} \\ v \in F^{\perp} \setminus \{0\}}} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \, \|v\|}.$$

(*) Dans ce qui suit, les espaces analytiques seront toujours munis de leur structure réduite. En particulier, nous disons qu'un morphisme est à fibres équidimensionnelles si le réduit des fibres est de dimension constante.

Rappelons que la condition A_f au point x_0 pour le couple (X^0, Y) s'exprime de la manière suivante : Pour toute suite (x_n) *de* X^0, tendant vers x_0, on a, quand la limite existe,

$$\lim_{n \to +\infty} \delta(T_{x_0} Y_{f(x_0)}, T_{x_n} X_{f(x_n)}) = 0.$$

On dira que le couple (X^0, Y) satisfait la propriété W_f s'il la satisfait en tout point de Y.

On obtient la condition W (*cf.* [V]) en prenant pour S un point.

1.2. *Remarques.* — (*a*) On vérifie d'abord que cette condition est indépendante du plongement choisi. Pour ce faire, on commence par montrer que les conditions obtenues pour un plongement $(X, x_0) \subsetneq (\mathbb{C}^N, 0)$ et le plongement construit à l'aide du graphe f et d'un plongement $(S, f(x_0)) \subsetneq (\mathbb{C}^p, 0)$, noté

$$\begin{array}{ccccc} (X, x_0) & \subsetneq & S \times \mathbb{C}^N & \subsetneq & \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^N \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow & & & \downarrow \\ S & & \hookrightarrow & & \mathbb{C}^p \end{array}$$

sont équivalentes. On factorise ensuite ce dernier plongement par un plongement minimal au-dessus de S, et on montre que les conditions obtenues sont équivalentes. On peut aussi utiliser la remarque (*d*) ci-dessous.

(*b*) Pour l'étude locale de la condition W_f, on choisira un plongement relatif

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \subsetneq & (S, f(x_0)) \times (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow & \\ (S, f(x_0)) & & \end{array}$$

et un plongement $(S, f(x_0)) \subsetneq (\mathbb{C}^p, 0)$ de sorte qu'on ait $Y \cong f(Y) \times Y_{f(x_0)}$, et que $f(Y)$ et $Y_{f(x_0)}$ soient des germes de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^{n+1}$ respectivement.

Pour un tel plongement, la condition W_f pour le couple (X^0, Y) en x_0 s'exprime de la manière suivante :

Il existe un voisinage U de x_0 dans X et une constante $C > 0$ tels que pour tout $x \in U \cap X^0$, on ait

$$\delta(Y_{f(x_0)}, T_x X_{f(x)}) \leqq C\, d(x, Y),$$

où δ est la distance de sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Les plongements étant choisis, on notera, pour simplifier, $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$.

(*c*) La condition W_f est une condition ouverte. Plus précisément, dans un plongement local de (X, x_0) comme ci-dessus, elle s'exprime comme une condition de dépendance intégrale (*voir* [N_2]) et par suite, dans un voisinage de x_0, l'ensemble des points de Y où

le couple (X^0, Y) satisfait la condition W_f est un ouvert de Zariski éventuellement vide de Y. Ce résultat s'obtient aussi à l'aide du lemme 2.1.4 ci-dessous.

Si maintenant Y est une sous-variété d'adhérence $\overline{Y}$ et de frontière $\overline{Y} \setminus Y$ analytiques fermées dans X, sur laquelle f est de corang constant, il existe un fermé analytique F de $\overline{Y}$, contenant $\overline{Y} \setminus Y$, éventuellement égal à Y, tel que l'ensemble des points Y^0 de Y où le couple (X^0, Y) satisfait la condition W_f soit égal à $\overline{Y} \setminus F$:

Qu'un tel ensemble soit fermé résulte de sa définition, et d'après ce qui précède, il est analytique au voisinage de tout point de Y. Pour montrer qu'il est analytique au voisinage de tout point de $\overline{Y}$, on peut utiliser la remarque suivante.

(*d*) On peut exprimer la condition W_f pour le couple (X^0, Y) comme dans $[N_1]$: Considérons pour cela la déformation de X sur le cône normal de $C_{\overline{Y}}X$ de $\overline{Y}$ dans X. Elle est obtenue comme suit :

Soit $\widetilde{X \times \mathbb{C}}$ l'éclaté de $\overline{Y} \times \{0\}$ dans $X \times \mathbb{C}$, et soit $\mathscr{X}$ le complémentaire dans $\widetilde{X \times \mathbb{C}}$ du transformé strict de $X \times \{0\}$. Le morphisme naturel $\varphi : \mathscr{X} \to \mathbb{C}$ est tel que $\varphi^{-1}(t)$ est isomorphe à X si $t \neq 0$, et $\varphi^{-1}(0) = C_{\overline{Y}}X$.

On note encore $\overline{Y} \subset \mathscr{X}$ la section nulle de $C_{\overline{Y}}X$. Considérons le morphisme composé

$$F : \mathscr{X} \to X \times \mathbb{C} \xrightarrow{f \times \mathrm{Id}} S \times \mathbb{C}$$

Le résultat suivant se démontre comme dans $[N_1]$ théorème 3.1 :

Le couple (X^0, Y) satisfait la condition W_f en x_0 si et seulement si le couple $(\mathscr{X}^0, Y)$ satisfait la condition A_F en x_0.

(*e*) Comportement par changement de base.

Soit $h : S' \to S$ un morphisme tel que $|S' \underset{S}{\times} X^0|$ soit dense dans $|S' \underset{S}{\times} X|$. Soit Z une sous-variété de S' contenue dans $h^{-1}(f(Y))$. Puisque f est de corang constant sur Y, $Z \underset{S}{\times} Y$ est une sous-variété de $|S' \underset{S}{\times} X|$. On a alors la propriété suivante :

Si (X^0, Y) satisfait la condition W_f en x_0, le couple $(S' \underset{S}{\times} X^0, Z \underset{S}{\times} Y)$ satisfait la propriété W_f, en tout point de $Z \underset{S}{\times} Y$ qui se projette sur x_0.

En effet, considérons un plongement local comme dans la remarque (*b*) :

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \hookrightarrow & (S, s_0) \times (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow & \\ (S, s_0) & & \end{array}$$

On en déduit un plongement local au voisinage de x'_0 au-dessus de x_0 :

$$\begin{array}{ccc} (S' \underset{S}{\times} X, x'_0) & \hookrightarrow & (S', s'_0) \times (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \swarrow & \\ (S', s'_0) & & \end{array}$$

Alors, pour tout $x' \in S' \underset{S}{\times} X^0$, on a, en notant $X' = S' \underset{S}{\times} X$,

$$\delta(Y_{s_0}, T_{x'} X'_{f'(x')}) = \delta(Y_{s_0}, T_x X_{f(x)}),$$

où x est la projection de x' sur X et δ la distance de sous-espaces dans $\mathbb{C}^{n+1}$. D'autre part, on a $d(x, Y) \leqq K\, d(x', Z \underset{S}{\times} Y)$ au voisinage de s'_0, avec $K > 0$. On en déduit le résultat voulu.

(f) Supposons maintenant l'espace X équidimensionnel et le morphisme f à fibres équidimensionnelles de dimension d. Il existe alors un voisinage U de x_0 dans X et un voisinage V de $f(x_0)$ dans S tel que $f(U)$ soit un sous-ensemble analytique fermé équidimensionnel de V, de dimension s. Dans une étude locale, on pourra supposer que $S = f(U)$. Il peut être plus agréable, dans certains cas, de travailler avec une base S lisse. Reprenons la notation de (b). On a un plongement $(S, 0) \subsetneq (\mathbb{C}^p, 0)$ et on choisit une projection linéaire $q : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^s$ transverse au cône tangent de S à l'origine. Choisissons des coordonnées $(t_1, \ldots, t_p)$ sur $\mathbb{C}^p$ de sorte que q soit la projection sur les s premières coordonnées.

Comme q est transverse au cône tangent $C_0 S$ on a, pour tout t dans V :

$$\|t\| \leqq \|q(t)\|$$

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S \times \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{q \times \mathrm{Id}} & \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^{n+1} \\ \cup & & \cup \\ X & \xrightarrow[q]{} & X_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ S & \xrightarrow[q]{} & \mathbb{C}^s \end{array}$$

où q est une projection transverse à S comme ci-dessus, et induisant un isomorphisme $q : f(Y) \xrightarrow{\sim} q(f(Y))$. Une conséquence de la transversalité de q à $C_0 S$ est alors : le couple (X^0, Y) satisfait la condition W_f en 0 si et seulement si le couple $(X_1^0, q(Y))$ satisfait la condition W_{f_1} en 0.

En effet, les espaces tangents aux fibres de X et de X_1 en des points x et $q(x)$ sont identiques, et les distances sur S induites respectivement par celles de $\mathbb{C}^p$ et de $\mathbb{C}^s$ sont équivalentes à cause de la transversalité.

(h) Condition W_f et condition W.

Considérons un germe $f : (X, x_0) \to (S, s_0)$ où X est équidimensionnel, S est lisse et f est ouvert. Supposons que la restriction de f à la sous-variété Y soit une submersion sur S. On a alors la propriété suivante :

Si le couple (X^0, Y) satisfait la propriété W en x_0, il satisfait aussi W_f en x_0, mais la réciproque est fausse.

Plus généralement, si $f|_Y : Y \to S$ n'est pas une submersion, mais est de rang constant, et si $S = f(Y) \times S'$, on a la propriété suivante en notant p la projection de S sur S' :

Si le couple (X^0, Y) satisfait la propriété $W_{p \circ f}$ en x_0, il satisfait aussi la propriété W_f en x_0.

Pour démontrer cette propriété, on peut faire un calcul direct pour évaluer des distances. On peut aussi montrer la propriété analogue pour les conditions $A_{p \circ f}$ et A_f, et utiliser la remarque (*d*) (*voir* [H_2], remarque 1, § 5).

Inversement, si Y est contenu dans $f^{-1}(s_0)$, et si (X^0, Y) satisfait la condition W_f, alors (X^0, Y) satisfait la condition W.

(*i*) Quelques exemples.

Il est clair que la condition W_f pour le couple (X^0, Y) est plus forte que la condition A_f. Par suite, cette condition peut n'être vérifiée en aucun point de Y même si le morphisme f est plat, comme le montrent l'exemple donné dans [S_1] :

$$f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 \qquad \text{est défini par} \quad f(x, y, z) = (x^2 - y^2 z, y) \qquad \text{et} \qquad Y = f^{-1}(0).$$

Soit $F : \mathbb{C}^{d+1} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un germe de fonction analytique, tel que $F(0, t) = 0$ pour tout t. On suppose que la famille $\{X_t\}_{t \in \mathbb{C}}$ d'hypersurfaces de $\mathbb{C}^{d+1}$ définie par F est une famille d'hypersurfaces à singularités isolées. On a alors les résultats suivants (*cf.* [LS], [T_1]) :

le couple $((\mathbb{C}^{d+1} \times \mathbb{C})^0, \{0\} \times \mathbb{C})$ satisfait la condition A_F si et seulement si la famille $\{X_t\}$ est une famille à nombre de Milnor constant;

le couple $((\mathbb{C}^{d+1} \times \mathbb{C})^0, \{0\} \times \mathbb{C})$ satisfait la condition W_F si et seulement si $\{X_t\}$ est une famille à μ^* constant.

L'exemple de Briançon et Speder [BS]

$$F(x, y, z, t) = x^3 + txz^3 + z^4 y + y^9$$

montre en particulier que la condition W_F est strictement plus forte que la condition A_F.

2. L'espace associé à la condition W_f

Dans ce paragraphe, nous montrons que la condition W_f s'exprime comme une condition de régularité de certaines fonctions *a priori* méromorphes, suivant une idée maintenant classique. De même que pour la condition W, l'espace conormal relatif au morphisme f se comporte mieux que la modification de Nash relative à f ([HM_2], [T_2]).

2.1.

2.1.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme analytique entre espaces réduits, et on suppose que f est induit par une projection :

$$\begin{array}{ccc} X & \subsetneq & S \times M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

où M est une variété analytique complexe.

Soit X^0 l'ouvert de Zariski dense de X sur lequel le morphisme f est lisse, et soit T^*M le fibré cotangent à M. Sur X^0, on considère le fibré conormal à f : $T^*_f M = \{(x, v)/x \in X^0, v \in T^*_x M, v|_{T_x X_{f(x)}} = 0\}$, et on note $\mathbb{P}(T^*_f M)$ le fibré projectif associé.

On note $C_f(X, M)$ (ou $C_f(X)$ si le plongement est fixé) l'adhérence dans $S \times \mathbb{P}(T^*M)$ de $\mathbb{P}(T^*_f M)$, et on a un morphisme naturel $\tau_f : C_f(X, M) \to X$. En particulier, si M est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$, le fibré T^*M est trivial, et $C_f(X)$ est contenu dans $X \times \check{\mathbb{P}}(\mathbb{C}^{n+1})$, où $\check{\mathbb{P}}(\mathbb{C}^{n+1})$ désigne le projectif des hyperplans de $\mathbb{C}^{n+1}$, de sorte qu'on a deux projections :

$$\begin{array}{ccc} C_f(X) & \xrightarrow{\gamma} & \check{\mathbb{P}}^n = \check{\mathbb{P}}(\mathbb{C}^{n+1}) \\ {\scriptstyle \tau_f}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

Dans ces conditions, un point de $C_f(X)$ est un couple (x, L), où $x \in X$, et où L est une limite d'hyperplans tangents aux fibres de f en des points de X^0 tendant vers le point x.

2.1.2. *Remarques.* — (*a*) Les fibres générales du morphisme τ_f sont de dimension $n-d$, si d est la dimension des fibres de f sur X^0 et on a $\dim C_f(X) = \dim X + n - d$.

(*b*) Si $n=d$, c'est-à-dire si X est une hypersurface relative, l'espace conormal $C_f(X)$ coïncide avec la modification de Nash relative à f notée $N_f(X)$ (*voir* la définition § 2.2).

(*c*) La considération de l'espace conormal correspond à la dualité en géométrie projective classique. Si par exemple X est le cône dans $\mathbb{C}^{n+1}$ sur une variété $\overline{X}$ de $\mathbb{P}^n$, la fibre $\tau^{-1}(0) \subset \check{\mathbb{P}}^n$ n'est autre que la variété duale de $\overline{X}$ dans $\check{\mathbb{P}}^n$.

(*d*) Supposons que X soit lisse, et $S = \mathbb{C}$. On peut choisir alors $M = X$, et considérer le plongement donné par le graphe de f :

$$\begin{array}{ccc} X & \subsetneq & \mathbb{C} \times X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{C} & & \end{array}$$

Dans ce cas, l'espace conormal relatif et la modification de Nash relative sont idomorphes, mais d'après D.T. Lê et Z. Mebkhout, le cône dans T^*X sur la fibre $(f \circ \tau_f)^{-1}(0)$ peut s'interpréter comme variété caractéristique d'un système différentiel sur X.

2.1.3. Dans la suite, nous utiliserons le diagramme suivant, avec les notations de la remarque 1.2 (*b*).

$$\begin{array}{ccccc} E_Y C_f(X) & \xrightarrow{\tilde{e}_Y} & C_f(X) & \xrightarrow{\gamma} & \check{\mathbb{P}}^n \\ {\scriptstyle \tilde{\tau}_f}\downarrow & & {\scriptstyle \tau_f}\downarrow & & \\ E_Y X & \xrightarrow[e_Y]{} & X & & \\ {\scriptstyle \delta}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^{n+p-t-r} & & S & & \end{array}$$

Le morphisme e_Y est l'éclatement de Y dans X, et $\tilde{\tau}_f$ est le transformé strict de τ_f par e_Y. Le morphisme $\tilde{e}_Y$ est alors l'éclatement du sous-espace (non nécessairement réduit) $\tau_f^{-1}(Y)$ dans $C_f(X)$. On appelle ζ_f la composée $\tau_f \circ \tilde{e}_Y$.

L'espace S étant plongé dans $\mathbb{C}^p$ au voisinage de $f(x_0)$, on note $\dim Y_0 = t$, $\dim f(Y) = r$, et on dispose alors d'un morphisme naturel

$$E_Y X \to \mathbb{P}(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n+1}/Y) = \mathbb{P}^{n+p-(t+r)}.$$

Remarquons que $\zeta_f^{-1}(Y)$ est un diviseur dans $E_Y C_f(X)$. On dispose de plus sur cet espace de deux fonctions, notées par abus de langage $\delta(Y_0, L)$ et $d(x, Y)$, si L est un hyperplan de $\mathbb{C}^{n+1}$. En particulier on a

$$\delta(Y_0, T_x X_{f(x)}) = \sup_{(x, L) \in \tau_f^{-1}(x)} \delta(Y_0, L) \quad \text{quand } x \text{ est dans } X^0.$$

La condition W_f pour le couple (X^0, Y) s'exprime par le fait que la fonction $\delta(Y_0, T_x X_{f(x)})/d(x, Y)$ est bornée sur X^0, donc par la condition équivalente que la fonction $\delta(Y_0, L)/d(x, Y)$ est localement bornée sur $E_Y C_f(X)$ au voisinage de $\zeta_f^{-1}(Y)$, puisque ζ_f est propre. On notera avec un léger abus $\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(1)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+p-(t+r)}}(1)$ les images réciproques sur $E_Y C_f(X)$ des fibrés habituels sur $\check{\mathbb{P}}^n$ et $\mathbb{P}^{n+p-(t+r)}$.

2.1.4. LEMME. — *Il existe t sections méromorphes du fibré* $\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1-(t+r)}}(1)$ *sur* $E_Y C_f(X)$, *à pôles au plus sur* $\zeta_f^{-1}(Y)$, *qui sont localement bornées sur* $E_Y C_f(X)$ *au voisinage de* $\zeta_f^{-1}(Y)$ *si et seulement si la fonction* $\delta(Y_0, L)/d(x, Y)$ *l'est.*

Rappelons qu'une section méromorphe d'un fibré sur $E_Y C_f(X)$ est localement bornée si et seulement si elle se remonte en une section holomorphe du fibré relevé sur le normalisé $\overline{E_Y C_f(X)}$. Si on choisit une métrique hermitienne sur le fibré, la norme de la section est localement bornée, et ceci ne dépend pas de la métrique choisie. Pour vérifier qu'une telle section est localement bornée, on peut enfin le vérifier sur chaque ouvert d'un recouvrement, sur lequel le fibré est trivialisé.

Donnons d'abord quelques conséquences utiles de ce lemme.

Conséquence 1. — Supposons qu'il existe un point de chaque composante irréductible de $\zeta_f^{-1}(Y)$ au voisinage duquel la fonction $\delta(Y_0, L)/d(x, Y)$ est bornée. Alors cette fonction est bornée au voisinage de $\zeta_f^{-1}(Y)$, et le couple (X^0, Y) satisfait la condition W_f au voisinage de x_0.

En effet, si $n : \overline{E_Y C_f(X)} \to E_Y C_f(X)$ désigne la normalisation, n est un morphisme fini et $n^{-1}(\zeta_f^{-1}(Y))$ est un diviseur, donc est équidimensionnel, car X est équidimensionnel, et $E_Y C_f(X)$ aussi. Par suite, toute composante irréductible de $n^{-1}(\zeta_f^{-1}(Y))$ se surjecte par n sur une composante de $\zeta_f^{-1}(Y)$. Ceci montre que le lieu polaire des t sections méromorphes du lemme, remontées à $\overline{E_Y C_f(X)}$, est de codimension au moins 2, donc est vide.

Conséquence 2. — Supposons que le morphisme $\zeta_f : \zeta_f^{-1}(Y) \to Y$ est à fibres équidimensionnelles. Si le couple (X^0, Y) satisfait la condition W_f en un point de Y, il la satisfait en tout point de Y.

En effet, puisque $\zeta_f^{-1}(Y)$ est équidimensionnel, l'hypothèse implique que toute composante irréductible de $\zeta_f^{-1}(Y)$ se surjecte sur Y. On peut alors appliquer le résultat précédent.

Conséquence 3. — Il existe un ouvert de Zariski Ω de $\zeta_f^{-1}(Y)$ vérifiant la propriété : (*) Pour tout germe de courbe analytique $h : (\mathbb{D}, 0) \to E_Y C_f(X)$ avec $h(0) \in \Omega$ et $h(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \cap \zeta_f^{-1}(Y) = \emptyset$, la fonction $\delta(Y_0, L)/d(x, Y)$ restreinte à $h(\mathbb{D})$ n'est pas bornée.

Sur $n^{-1}(\zeta_f^{-1}(Y))$, on considère pour chaque section méromorphe donnée dans le lemme, l'ouvert formé du diviseur de pôles privé du diviseur des zéros. Un ouvert de Zariski Ω contenu dans la réunion des images par n de ces ouverts convient.

On remarque en particulier que le couple (X^0, Y) satisfait la propriété W_f si et seulement si tout ouvert de Zariski satisfaisant la propriété (*) est vide.

Démonstration du Lemme 2.1.4. — Choisissons des coordonnées $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et des coordonnées $(z_1, \ldots, z_p)$ sur $\mathbb{C}^p$ de sorte que Y_0 soit défini par $x_{t+1} = \ldots = x_{n+1} = 0$ et $f(Y)$ par $z_{r+1} = \ldots z_p = 0$. On note $(\eta_1, \ldots, \eta_{n+1})$ les coordonnées duales sur $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ qu'on considère comme coordonnées homogènes sur $\check{\mathbb{P}}^n$.

La fonction $\delta(Y_0, L)$ sur $E_Y C_f(X)$ plongé dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n+1} \times \check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^{n+p-(t+r)}$ s'écrit alors, si on pose $\eta = \eta(L)$:

$$\delta(Y_0, L) = \sup_{\substack{\xi \in Y_0 \setminus \{0\} \\ \|\xi\| = 1}} \frac{|\langle \xi, \eta \rangle|}{\|\eta\|}.$$

On pose $d(x, Y) = \sup\{|x_{t+1}|, \ldots, |x_{n+1}|, |z_{r+1}|, \ldots, |z_p|\}$.
Alors on a, dans $E_Y C_f(X)$,

$\delta(Y_0, L) \leqq C d(x, Y)$ si et seulement si

$$\delta'(Y_0, L) := \frac{\sup_{1 \leqq j \leqq t} |\eta_j|}{\sup_{1 \leqq l \leqq n+1} |\eta_l|} \leqq C' d(x, Y).$$

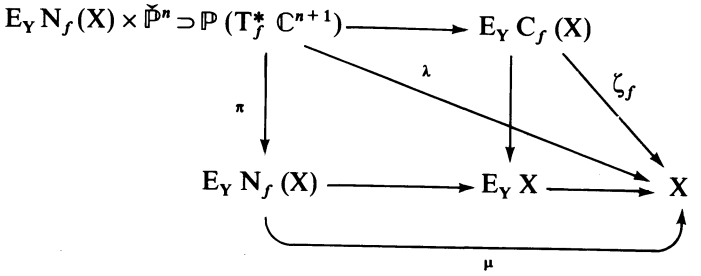
On note φ_j la section de $\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(1)$ correspondant à la fonction η_j (homogène de degré 1). Rappelons d'autre part qu'on a sur $E_Y X$ et donc sur $E_Y C_f(X)$ une section du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{p+n-(t+r)}}(-1)$ qui, dans la carte où la fonction x_i engendre l'idéal de $\zeta_f^{-1}(Y)$ est cette fonction x_i. On notera ψ son inverse, considérée comme section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+p-(t+r)}}(1)$. Les t sections qu'on considère sont les sections $\varphi_j \otimes \psi$, $j = 1, \ldots, t$. Il est alors simple, à l'aide de l'expression de $\delta'(Y_0, L)$ de vérifier qu'elles satisfont aux conditions du lemme.

2.2. On notera $p : \zeta_f^{-1}(0) \to \check{\mathbb{P}}^n$ la restriction à $\zeta_f^{-1}(0)$ du morphisme $\gamma \circ \tilde{e}_y$.

LEMME 2.2. — *Soit Z_0 une composante irréductible de $\zeta_f^{-1}(0)$. Alors on a*

$$\dim p(Z_0) \geqq n - d.$$

Preuve. — Soit $N_f(X)$ la modification de Nash relative à f. Par définition, $N_f(X)$ est l'adhérence dans $X \times G(d, n+1)$ de l'ensemble formé des couples $(x, T_x X_{f(x)})$, où $x \in X^0$, et où $G(d, n+1)$ désigne la grassmanienne des d-plans de $\mathbb{C}^{n+1}$. $N_f(X)$ est naturellement muni d'un fibré T_f de rang d, sous-fibré du fibré trivial $N_f(X) \times \mathbb{C}^{n+1}$, qui provient du fibré tautologique sur la grassmanienne. On note $T_f^* \mathbb{C}^{n+1}$ le fibré de rang $n-d+1$ annulateur dans $N_f(X) \times (\mathbb{C}^{n+1})^*$ de T_f. Soit $\mathbb{P}(T_f^* \mathbb{C}^{n+1})$ le projectifié de ce fibré. Par abus de langage on utilise les mêmes notations pour leurs images inverses respectives sur $E_Y N_f(X)$. On a alors un diagramme commutatif :



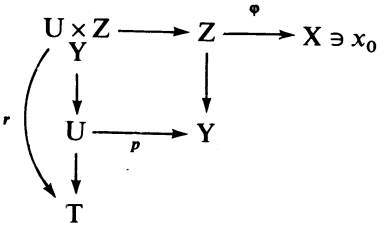
On peut remarquer que $\mathbb{P}(T_f^* \mathbb{C}^{n+1})$ n'est autre que le transformé strict de $E_Y C_f(X)$ par la modification $E_Y N_f(X) \to E_Y X$.

Soit Z_0 une composante irréductible de $\zeta_f^{-1}(0)$. Il existe alors une composante irréductible Z_0' de $\lambda^{-1}(0)$ dont l'image dans $E_Y C_f(X)$ est Z_0. D'autre part, le morphisme π est un morphisme lisse, de fibre type $\mathbb{P}^{n-d}$. Il existe donc une composante irréductible Z_0'' de $\mu^{-1}(0)$ telle que $Z_0' = \pi^{-1}(Z_0'')$. La projection de Z_0' sur $\check{\mathbb{P}}^n$, qui est la réunion des fibres du morphisme $\pi : Z_0' \to Z_0''$ est donc de dimension au moins $n-d$. Mais cette projection n'est autre que $p(Z_0)$, d'où le lemme. □

3. Variétés polaires (projectives) relatives

3.1. TRANSVERSALITÉ. — L'étude des variétés polaires fait un usage constant de résultats de transversalité. On peut les ranger en résultats grossiers qui n'utilisent que la version de Kleiman du théorème de Bertini [K_1] sous forme de transversalité dimensionnelle, ou de transversalité stratifiée qui provient de la précédente à l'aide de la condition A de Whitney [LT], et en résultats fins qui font intervenir la condition W, par exemple sous la forme du théorème de Bertini idéaliste [T_1]. Nous n'utiliserons dans la suite que de la transversalité grossière, sauf dans le théorème 6.1, pour montrer que la condition W_f pour le couple (X^0, Y) implique l'équimultiplicité des variétés polaires, ou celles de dirimants relatifs. Nous ne disposons pas de résultat de transversalité fine pour un morphisme quand la base de ce morphisme est de dimension > 1, même sous l'hypothèse de non-éclatement en codimension 0. Voici un exemple de transversalité dimensionnelle :

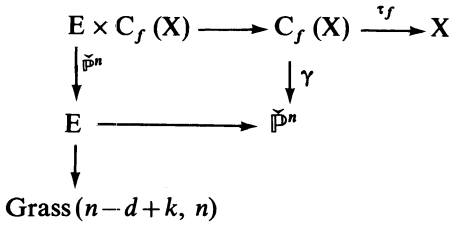
3.1.1 LEMME [K_1]. — *On considère le diagramme suivant :*



où les espaces sont analytiques et réduits, et les morphismes analytiques. On suppose de plus que le morphisme φ *est propre, que le morphisme p est ouvert et que* U *est irréductible, ainsi que* T *et* Y. *On suppose que* Z *est équidimensionnel. Il existe un ouvert de Zariski dense* Ω *tel que, pour* $t \in \Omega$, *il existe un voisinage* V *de* x_0 *dans* X *pour lesquels on a*

$$\dim [U \underset{Y}{\times} \varphi^{-1}(V)] \cap r^{-1}(t) = \dim Z + \dim U - (\dim Y + \dim T).$$

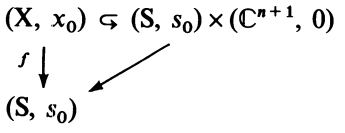
On appliquera ce lemme à la situation suivante (*cf.* [L.T] 5.1.3.3) :



où E désigne le sous-ensemble de $\check{\mathbb{P}}^n \times \mathrm{Grass}(n-d+k, n)$ formé des couples (L, σ_{n-d+k}), où L est un point de $\check{\mathbb{P}}^n$, σ_{n-d+k} un plan projectif de $\check{\mathbb{P}}^n$ de codimension $n-d+k$ contenant L.

3.2. Pour l'étude des germes de morphismes, il apparaît une dissymétrie entre sections planes et variétés polaires. Celles-ci, définies de manière relative, sont plus adaptées à cette étude. Nous rappelons ici les principales propriétés que nous utiliserons et renvoyons à [T_2] pour les démonstrations détaillées.

Soit $f : (X, x_0) \to (S, s_0)$ un germe de morphisme analytique entre espaces réduits. On suppose comme au paragraphe 1 que les fibres de f sont de dimension d sur un ouvert de Zariski (d'un représentant) de X. Fixons un plongement au-dessus de S



On considère l'espace conormal relatif

$$\begin{array}{ccc} C_f(X) & \subset & X \times \check{\mathbb{P}}^n \\ {\scriptstyle \tau_f}\downarrow & \swarrow & \\ X & & \end{array}$$

et on note $\gamma : C_f(X) \to \check{\mathbb{P}}^n$ la projection.

Pour un entier k compris entre 0 et d, soit V_{n-d+k} un sous-espace linéaire de dimension $n-d+k$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $\sigma(V_{n-d+k})=\sigma_{n-d+k}$ le plan projectif de codimension $n-d+k$ dans $\check{\mathbb{P}}^n$ dont les points sont des hyperplans de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenant V_{n-d+k}. On considère la projection $\pi_k : X \to S \times \mathbb{C}^{d-k+1}$ au-dessus de S induite par la projection de noyau V_{n-d+k} de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}^{d-k+1}$.

3.2.1. DÉFINITION. — *Soit* $P_k(f, V_{n-d+k})$ *l'adhérence dans* X *du lieu critique de* $\pi_{k|X^0}$. *On notera* $P_k(f, V_{n-d+k}, x_0)$ *le germe de cet ensemble en* x_0 *ou un représentant assez petit de ce germe et on l'appellera k-ième variété polaire relative de f, en* x_0, *pour la direction* V_{n-d+k}.

Les résultats de transversalité dimensionnelle ou stratifiée [LT] indiqués plus haut montrent qu'il existe un ouvert de Zariski dense Ω_{x_0} de la grassmanienne des plans de codimension $n-d+k$ de $\check{\mathbb{P}}^n$ tel que, si $\sigma_{n-d+k} \in \Omega_{x_0}$, on puisse trouver un voisinage de x_0 dans X, noté encore X, sur lequel on a les propriétés suivantes :

(*a*) $\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k})$ est un sous-espace de codimension pure $n-d+k$ de $C_f(X)$, ou bien vide, et on a $\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \cap C_f(X^0)=\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k})$.

(*b*) Pour toute composante irréductible Z de $\tau_f^{-1}(x_0)$, $\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \cap Z$ est vide ou de codimension pure $n-d+k$ dans Z.

(*c*) $P_k(f, V_{n-d+k})=\tau_f(\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}))$ et le morphisme

$$\tau_f : \quad \gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \to P_k(f, V_{n-d+k})$$

est une modification propre.

(*d*) $P_k(f, V_{n-d+k})$ est de codimension pure k dans X ou vide, et est vide si et seulement si $\dim \tau_f^{-1}(x_0) < n-d+k$.

(*e*) Si Y est une sous-variété de X, on peut énoncer des résultats analogues dans $E_Y C_f(X)$.

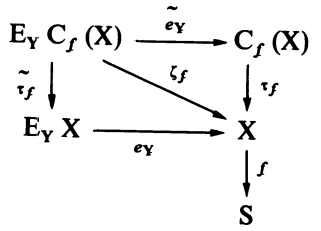
(*f*) La multiplicité $m_{x_0}(P_k(f, V_{n-d+k}))$ ne dépend pas de $\sigma_{n-d+k} \in \Omega_{x_0}$. Elle ne dépend que du germe de morphisme $f : (X, x_0) \to (S, s_0)$. On la note $m_{x_0}(P_k(f, x_0))$ (*voir* 4.4.3).

(*g*) Soit Y un germe de sous-variété de X contenant x_0. Les énoncés suivants sont équivalents :

— La multiplicité $m_x(P_k(f, x))$ est constante pour $x \in Y$ assez voisin de x_0.

— La variété $P_k(f, V_{n-d+k})$ est équimultiple en x_0 le long de Y.

3.3. On suppose ici que X est équidimensionnel. Soit Y une sous-variété de X contenant x_0. Considérons le diagramme du paragraphe 2 pour un plongement $X \to S \times \mathbb{C}^{n+1}$:



On suppose aussi S plongé dans $\mathbb{C}^p$, de sorte que dans le plongement $X \to \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n+1}$, Y soit un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}^{p+n+1}$.

3.3.1 Proposition (*voir* aussi $[HM_2]$ et $[T_2]$). — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme* $\zeta_f : \zeta_f^{-1}(Y) \to Y$ *est à fibres équidimensionnelles au voisinage de* x_0.

(ii) *Pour* $0 \leqq k \leqq d$, *les multiplicités* $m_x(P_k(f, x))$ *sont constantes le long de* Y *au voisinage de* x_0.

(iii) *Pour tout sous-espace linéaire* H_q *de codimension* q *dans* $\mathbb{C}^{p+n+1}$, *contenant* Y, *et assez général, les fibres du morphisme*

$$\tau_f : \overline{\tau_f^{-1}(H_q \cap X^0)} \cap \tau_f^{-1}(Y) \to Y$$

sont équidimensionnelles de dimension au plus : $\dim X - \dim Y + n - d - 1 - q$, *au voisinage de* x_0.

De plus, si une de ces conditions est réalisée pour un plongement, elle est réalisée pour tout plongement.

Démonstration. — Rappelons qu'on a les inclusions

$$C_f(X) \subset X \times \check{\mathbb{P}}^n \qquad \text{et} \qquad E_Y X \subset X \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{p+n+1}/Y) = X \times \mathbb{P}^{p+n-\dim Y}.$$

On notera $x_0 = 0$.

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Puisque $\zeta_f^{-1}(Y)$ est un diviseur dans $E_Y C_f(X)$, il suffit de montrer l'inégalité

$$\dim \zeta_f^{-1}(0) \leqq \dim X - \dim Y + n - d - 1.$$

Soit Z une composante irréductible de $\zeta_f^{-1}(0)$, et considérons sa projection $p(Z)$ par le morphisme naturel $p : \zeta_f^{-1}(0) \to \check{\mathbb{P}}^n$.

D'après le lemme 2.2, on a : $\dim p(Z) \geqq n - d$. Soit $d - k$ la codimension de $p(Z)$ dans $\check{\mathbb{P}}^n$. On a donc $0 \leqq k \leqq d$.

Soit σ_{n-d+k} un plan de codimension $n - d + k$ assez général de $\check{\mathbb{P}}^n$, de sorte que les propriétés de 3.2 soient satisfaites dans un voisinage assez petit de 0, et soit V_{n-d+k} le

sous-espace de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sigma_{n-d+k}=\sigma(V_{n-d+k})$. D'autre part l'ensemble $\sigma_{n-d+k}\cap p(Z)$ n'est pas vide, et on peut supposer qu'il est formé d'un nombre fini de points. On peut alors traduire la condition d'équimultiplicité de (ii) pour le rang k par : les fibres du morphisme

$$e_Y : \quad E_Y P_k(f, V_{n-d+k}) \to P_k(f, V_{n-d+k})$$

sont de dimension $\dim X - \dim Y - k - 1$ au-dessus de Y, au voisinage de 0 (*cf.* [Li] et la propriété (*g*) de 3.2).

On en déduit que les fibres du morphisme $p : \zeta_f^{-1}(0) \cap p^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \to \sigma_{n-d+k}$ sont de dimension $\dim X - \dim Y - k - 1$. Par suite, on a

$$\dim Z = \dim p(Z) + \dim(Z \cap p^{-1}(\sigma_{n-d+k})) \leqq n-d+k+\dim X - \dim Y - k - 1$$
$$= \dim X - \dim Y - d - 1.$$

La démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est identique si on considère la projection

$$q : \quad \zeta_f^{-1}(0) \to \mathbb{P}(\mathbb{C}^{p+n+1}/Y).$$

Démontrons maintenant (i) $\Rightarrow$ (ii).

Remarquons d'abord que les fibres du morphismes $\tilde{\tau}_f$ sont de dimension au moins $n-d$. On en déduit que $\dim \zeta_f^{-1}(0) \geqq \dim e_Y^{-1}(0) + n - d$. Ceci montre que $\dim e_Y^{-1}(0) \leqq \dim X - \dim Y - 1$, puisque $\dim \zeta_f^{-1}(0) = \dim X - \dim Y + n - d - 1$. Comme $e_Y^{-1}(Y)$ est un diviseur dans $E_Y X$, l'inégalité inverse est vraie, et par suite $e_Y^{-1}(Y)$ est équidimensionnel au-dessus de Y donc X est équimultiple le long de Y en x_0. On obtient de la même manière le résultat pour les variétés polaires.

Pour obtenir (iii), on remarque que sous l'hypothèse (i) ou (ii), les fibres du morphisme $\tau_f : \tau_f^{-1}(Y) \to Y$ sont équidimensionnelles au voisinage de x_0. Si P_k est la première variété polaire non vide, leur dimension est $n-d+k$. On peut alors faire le même raisonnement que ci-dessus si on remarque que pour un plan H_q assez général contenant Y, on a, à l'aide des résultats de transversalité,

$$\overline{\zeta_f^{-1}(H_q \cap (X^0 \setminus Y)} \cap \zeta_f^{-1}(0) = q^{-1}([H_q])$$

où $[H_q]$ désigne le plan projectif $\mathbb{P}(H_q/Y)$ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{p+n+1}/Y)$. □

Remarque. — On a un résultat analogue si on remplace le morphisme conormal par la modification de Nash relative. Il faut alors, dans la condition (ii), considérer toutes les variétés polaires, et pas seulement les variétés polaires projectives (*voir* [H.M$_2$], théorème 2).

4. La condition de non-éclatement en codimension 0, les variétés polaires relatives et les dirimants relatifs

4.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme entre espaces réduits comme au paragraphe 1. Notons, pour $0 \leqq k \leqq d$,

$$\Sigma_k(f) = \{x \in X / P_k(f, x) \neq \emptyset\}.$$

On obtient donc une filtration de l'espace X :

$$X = \Sigma_0(f) \supset \Sigma_1(f) \supset \ldots \supset \Sigma_d(f).$$

Ces ensembles $\Sigma_k(f)$ sont bien définis puisque $m_x(P_k(f, x))$ est un invariant analytique de f. Ce sont des sous-ensembles analytiques fermés de X qu'on peut interpréter localement de la manière suivante : si on choisit un plongement local de X dans $S \times \mathbb{C}^{n+1}$ au-dessus de S, et si $\tau_f : C_f(X) \to X$ désigne le morphisme conormal associé, on a

$$\Sigma_k(f) = \{ x \in X / \dim \tau_f^{-1}(x) \geqq n-d+k \}.$$

4.1.1. DÉFINITION. — *Le morphisme f est sans éclatement en codimension 0 si, pour chaque entier k compris entre 0 et d, les fibres de $f|_{\Sigma_k(f)} : \Sigma_k(f) \to S$ sont de dimension au plus $d-k$.*

On voit en particulier que les fibres du morphisme $f : X \to S$ sont toutes de dimension d. De plus, localement sur X, cette condition est équivalente à la suivante :

Les fibres du morphisme $f \circ \tau_f : C_f(X) \to S$ sont toutes de dimension n. Cette condition est analogue à celle introduite par Hironaka pour la modification de Nash relative ([H_2], *voir* aussi [S_2]).

L'importance de cette condition tient au résultat suivant

4.1.3. THÉORÈME ([H_2], th. 1, § 5). — *Si f est sans éclatement en codimension 0, et si Z est un sous-ensemble analytique fermé de X, il existe un ouvert de Zariski dense Z^0 de Z tel que le couple (X^0, Z^0) satisfasse la condition A_f.*

Nous montrerons dans la suite (§ 5) qu'on peut remplacer dans ce théorème la condition A_f par la condition W_f.

4.2. COMPORTEMENT PAR CHANGEMENT DE BASE. — Soit $h : S' \to S$ un morphisme analytique. On considère le diagramme du produit fibré

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_f(X) \times_S S' & \longrightarrow & C_f(X) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tau'_f} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_f} \\
S' \times \mathbb{C}^{n+1} & \supset & X \times_S S' & \longrightarrow & X \subset S \times \mathbb{C}^{n+1} \\
 & \searrow & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \swarrow \\
 & & S' & \xrightarrow[h]{} & S
\end{array}$$

et on suppose que f est sans éclatement en codimension 0. On n'a pas en général l'égalité $\tau'_f = \tau_{f'}$: Si par exemple S' est un point dans S, $(f \circ \tau_f)^{-1}(S')$ n'est pas toujours égal à l'espace conormal de $f^{-1}(S')$. On peut cependant, à l'aide du théorème précédent, avoir un résultat précis :

4.2.1. COROLLAIRE. — *Soit Γ une composante irréductible de $C_f(X) \times_S S'$. Alors Γ s'identifie naturellement avec l'espace conormal relatif au morphisme*

$$f' : \tau'_f(\Gamma) \to S'.$$

Démonstration. — Commençons par supposer que S′ est un sous-ensemble analytique fermé de S. Alors il existe un ouvert de Zariski dense $\tau_f(\Gamma)^0$ de $\tau_f(\Gamma)$ tel que le couple $(X^0, \tau_f(\Gamma)^0)$ satisfasse la condition A_f. Ceci implique que $\Gamma^0 = : \tau_f^{-1}(\tau_f(\Gamma)^0) \cap \Gamma$ est contenu dans $C_f(\tau_f(\Gamma))$, et puisque Γ est irréductible, on a aussi $\Gamma \subset C_f(\tau_f(\Gamma))$.

D'autre part, les fibres de $f \circ \tau_{f|\Gamma}$ sont toutes de dimension n par hypothèse. Par suite, puisque le morphisme τ_f est propre, si $x_0 \in \tau_f(\Gamma)$, il existe un voisinage U de x_0 dans X et un voisinage V de $f(x_0)$ dans S tel que $f(\tau_f(\Gamma) \cap U)$ soit analytique fermé dans V, et équidimensionnel. Si α désigne sa dimension, on en déduit que $\dim \Gamma = n + \alpha$, et $\dim C_f(\tau_f(\Gamma)) = n + \alpha$. Par suite on a l'égalité $\Gamma = C_f(\tau_f(\Gamma))$.

Si maintenant h n'est pas une inclusion, on considère l'inclusion du graphe de h dans $S \times S'$ et on applique le résultat précédent du morphisme $f \times \mathrm{Id}_{S'} : X \times S' \to S \times S'$. □

4.2.2. COROLLAIRE. — *La condition de non-éclatement en codimension* 0 *est stable par changement de base.*

En effet, dans le diagramme précédent, on peut identifier $\tau_{f'}$ à la restriction de τ'_f aux composantes irréductibles de $C_f(X) \underset{S}{\times} S'$ qui se surjectent sur une composante irréductible de $X \underset{S}{\times} S'$.

4.2.3. COROLLAIRE. — *Avec les notations précédentes, si* Γ *est une composante irréductible de* $C_f(X) \underset{S}{\times} S'$ *le morphisme* $f' : \tau'_f(\Gamma) \to S'$ *est sans éclatement en codimension* 0 *si* f *l'est.*

4.2.4. Reprenons les notations de la remarque 1.2 *f*. On a alors :

Le morphisme f est sans éclatement en codimension 0 si et seulement si le morphisme f_1 l'est.

En effet, la projection q induit un morphisme fini de $C_f(X)$ sur $C_{f_1}(X_1)$.

Remarquons au passage qu'on a aussi :

Le morphisme $\zeta_f : \zeta_f^{-1}(Y) \to Y$ est à fibres équidimensionnelles si et seulement si le morphisme $\zeta_{f_1} : \zeta_{f_1}^{-1}(q(Y)) \to q(Y)$ l'est.

De fait, d'après la transversalité de q, $E_Y X$ et l'éclaté dans X de l'idéal de $q^{-1}(q(Y_1))$ ont des normalisés isomorphes.

4.2.5. Soit $x_0 \in X$, et soit Γ une composante irréductible de

$$(f \circ \tau_f)^{-1}(f(x_0)) = \tau_f^{-1}(X_{f(x_0)}).$$

On a donc $\Gamma = C(\tau_f(\Gamma))$, c'est-à-dire que Γ est l'espace conormal absolu de $\tau_f(\Gamma)$. Notons $d_\Gamma = \dim \tau_f(\Gamma) \leqq d$. Soit k un entier compris entre 0 et d; considérons un plan σ_{n-d+k} de codimension $n-d+k$ dans $\check{\mathbb{P}}^n$, et notons comme plus haut $\sigma_{n-d+k} = \sigma(V_{n-d+k})$. On obtient $\tau_f(\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \cap \Gamma) = P_{k+d_\Gamma-d}(\tau_f(\Gamma), V_{n-d+k})$.

En particulier, si $k \leqq d - d_\Gamma$, $\tau_f(\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \cap \Gamma) = \tau_f(\Gamma)$.

Considérons maintenant $P_k(f, V_{n-d+k})$. Alors, pour V_{n-d+k} assez général, les fibres de $f|_{P_k(f, V_{n-d+k})}$ sont de dimension $d-k$, sous la condition de non éclatement en codimension 0 : elles sont de dimension au moins $d-k$ puisque $P_k(f, V_{n-d+k})$ est de codimension pure k dans X. Mais, toujours si V_{n-d+k} est assez général, on a

$$\dim[(f\circ\tau_f)^{-1}(f(x_0))\cap\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k})]=d-k$$

et donc

$$\dim[f^{-1}(f(x_0))\cap P_k(f, V_{n-d+k})]\leqq d-k.$$

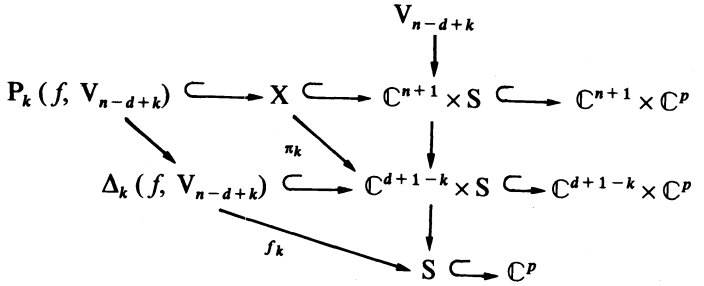
On peut décrire la fibre $P_k(f, V_{n-d+k})\cap f^{-1}(f(x_0))$ de la manière suivante :

$$P_k(f, V_{n-d+k})\cap f^{-1}(f(x_0))=\bigcup_{\Gamma} P_{k+d_\Gamma-d}(\tau_f(\Gamma), V_{n-d+k}),$$

la réunion étant prise pour toutes les composantes irréductibles telles que $d_\Gamma=\dim\tau_f(\Gamma)\geqq d-k$. En particulier, on voit que $\tau_f(\Gamma)$ est une composante irréductible de la fibre de la variété polaire $P_{d-d_\Gamma}(f, V_{n-d+k})$ quel que soit le plan V_{n-d+k}, général au demeurant. De même, les composantes $\tau_f(\Gamma)$ avec $d_\Gamma<d-k$ apparaissent, si on ne considère plus seulement la structure réduite de la fibre de $P_k(f, V_{n-d+k})$, comme des composantes immergées fixes de cette fibre (*voir* aussi [L$_2$]).

4.3. Les dirimants relatifs. — Lorsqu'on définit $P_k(f, V_{n-d+k})$ $(0\leqq k\leqq d)$ comme l'adhérence du lieu critique de la projection relative de noyau V_{n-d+k} restreinte à X^0 (*cf.* 3) on est bien sûr amené à considérer l'image de cette variété polaire par la projection considérée : *on appelle cette image* $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ le k-ième *dirimant relatif de* f. (L'image de l'espace E par le morphisme $\varphi : E\to F$ est définie dans F par l'annulateur de $\mathcal{O}_E$.) Si le morphisme f est sans éclatement en codimension zéro, ces dirimants peuvent vraiment s'identifier à des sections planes duales (4.3.6). Contrairement au cas $(\dim S\leqq 1)$ la direction de projection V_{n-d+k} n'est pas toujours transverse à la variété polaire correspondante $P_k(f, V_{n-d+k})$. Cependant, les multiplicités des dirimants relatifs sont des invariants analytiques importants de f.

On reprend la situation décrite en 3.3 et résumée dans le schéma ci-dessous :



4.3.1. DÉFINITION. — *Pour $0 \leqq k \leqq d$, le k-ième dirimant relatif de f est l'image par la projection $\pi_k : X \to \mathbb{C}^{d+1-k} \times S$ de noyau $V_{n-d+k} \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \{0\}$, de la variété polaire $P_k(f, V_{n-d+k})$.*

$\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ est muni d'une application f_k dans S induite par f.

4.3.2. *Remarque.* — On notera la différence entre le dirimant $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ et le discriminant de l'application π_k qui contient $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ mais comprend de plus l'image du lieu critique de f.

4.3.3. PROPOSITION. — *Soit f un morphisme sans éclatement en codimension 0. Il existe un ouvert de la grassmanienne des plans de dimension $n-d+k$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour V_{n-d+k} dans cet ouvert, le morphisme induit par π_k :*

$$P_k(f, V_{n-d+k}) \to \Delta_k(f, V_{n-d+k})$$

est fini ($0 \leqq k \leqq d$).

Démonstration. — Le morphisme $C_f(X) \to S$ étant équidimensionnel (4.1), d'après le théorème de Kleiman [K_1], les morphismes $\gamma^{-1}(\sigma(V_{n-d+k}) \to S$ et $P_k(f, V_{n-d+k}) \to S$ sont également équidimensionnels à fibres de dimension $d-k$, pour un V_{n-d+k} assez général dans la grassmanienne Grass $(n-d+k, n+1)$.

De manière analogue à [L.T] 4.1.8 on a le

4.3.4. LEMME. — *Pour un drapeau $\mathscr{D} = V_{n-d} \subset V_{n-d+1} \subset \ldots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ assez général on a, pour $0 \leqq k \leqq d$*

$$P_k(f, V_{n-d+k}) \cap V_{n-d+k} = P_k(f, V_{n-d+k}) \cap V_{n-d+k+1} = \{0\}.$$

Preuve de 4.3.4. — La fibre au-dessus de 0 de $P_k(f, V_{n-d+k}) \to S$ étant de dimension $d-k$ pour $0 \leqq k \leqq d$, nous pouvons trouver un plan V_{n-d} tel que

$$V_{n-d} \cap P_0(f, V_{n-d}) \cap f^{-1}(0) = (X \cap f^{-1}(0)) \cap V_{n-d} = \{0\}.$$

Supposons déterminés $V_{n-d} \subset V_{n-d+1} \subset \ldots \subset V_{n-d+k}$ répondant à la conclusion du lemme. On a alors

$$P_k(f, V_{n-d+k}) \cap V_{n-d+k} = \{0\}.$$

Pour tout $V_{n-d+k+1}$ contenant V_{n-d+k} on a $P_{k+1}(f, V_{n-d+k+1}) \subset P_k(f, V_{n-d+k})$. On a donc

$$(f^{-1}(0) \cap P_{k+1}(f, V_{n-d+k+1})) \cap V_{n-d+k} = \{0\}$$

avec $f^{-1}(0) \cap P_{k+1}(f, V_{n-d+k+1})$ de dimension $d-k-1$. Il existe donc un $V_{n-d+k+1}$ contenant V_{n-d+k} tel que

$$[f^{-1}(0) \cap P_{k+1}(f, V_{n-d+k+1})] \cap V_{n-d+k+1} = P_{k+1}(f, V_{n-d+k+1}) \cap V_{n-d+k+1} = \{0\}.$$

La conclusion du lemme étant acquise, le théorème de préparation de Weierstrass montre alors que le morphisme entre les germes à l'origine de $P_k(f, V_{n-d+k})$ et $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ est fini. □

4.3.5. *Remarque.* — Lorsque $\mathscr{D}$ est assez général pour que $P_k(f, V_{n-d+k})$ soit équidimensionnelle au-dessus de S à fibres de dimension pure $d-k$, et pour que le morphisme

$$P_k(f, V_{n-d+k}) \to \Delta_k(f, V_{n-d+k})$$

soit fini, on voit que $f_k : \Delta_k(f, V_{n-d+k}) \to S$ est une hypersurface relative de $\mathbb{C}^{d+1-k} \times S$. Désormais nous nous plaçerons toujours dans ce cas.

4.3.6. PROPOSITION. — *Soit f un morphisme sans éclatement en codimension 0. Il existe un ouvert de la grassmanienne des plans de dimension $n-d+k$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$, tel que pour V_{n-d+k} dans cet ouvert, le morphisme*

$$P_k(f, V_{n-d+k}) \to \Delta_k(f, V_{n-d+k})$$

est fini et biméromorphe $(0 \leqq k \leqq d)$.

Démonstration. — On peut supposer, en traitant les composantes irréductibles séparément, que X est irréductible et $S = f(X)$.

Soit X^0 l'ouvert de X où le morphisme f est de corang d. Considérons le produit fibré

$$C_f(X^0) \underset{S \times \check{\mathbb{P}}^n}{\times} C_f(X^0).$$

Sur le complémentaire de la diagonale dans ce produit fibré, est définie l'application qui à un couple de points distincts, associe la direction de la droite qui joint leurs projections dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

L'adhérence Γ du graphe de cette application dans $X \underset{S}{\times} X \times \check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^n$ est de dimension $n+s+m$ si m est la dimension de la fibre générique du morphisme $C_f(X) \to S \times \check{\mathbb{P}}^n$.

Remarquons dès à présent que $\Gamma \cap (X^0 \underset{S}{\times} X^0 \times \sigma_{n-d+k} \times \mathbb{P}(V_{n-d+k}))$ se projette dans $X^0 \underset{S}{\times} X^0$ sur l'ensemble des couples de points (x, y) de

$$P_k(f, V_{n-d+k}) \times P_k(f, V_{n-d+k})$$

qui ont même image dans $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ et tels que

$$T_x X_{f(x)} + V_{n-d+k} = T_y X_{f(y)} + V_{n-d+k}.$$

Le cycle $\sigma_{n-d+k} \times \mathbb{P}(V_{n-d+k})$ est un cycle de la variété d'incidence I de $\check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^n$. Le groupe linéaire $GL(\mathbb{C}^{n+1})$ agit transitivement sur la variété I. D'après le lemme de Kleiman, pour V_{n-d+k} assez général, l'intersection

$$\Gamma \cap (X \underset{S}{\times} X \times \sigma_{n-d+k} \times \mathbb{P}(V_{n-d+k}))$$

est de dimension au plus $m+s$ car $\sigma_{n-d+k} \times \mathbb{P}(V_{n-d+k})$ est de codimension n dans I.

Sa projection dans $P_k(f, V_{n-d+k})$ est un fermé nulle part dense F_k de $P_k(f, V_{n-d+k})$ si $k < d-m$.

Si $k>d-m$, $P_k(f, V_{n-d+k})$ est vide. En effet, comme f est sans éclatement en codimension zéro, $\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \to S$ est équidimensionnel. Or les fibres non vides du morphisme : $\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \to S \times \sigma_{n-d+k}$ sont de dimension au moins égale à m, ce qui montre que $\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \to S$ ne peut être surjectif puisque

$$\dim \gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) = d+s-k < s+m.$$

La seule possibilité est donc : $P_k(f, V_{n-d+k}) = \emptyset$.

Notons le lemme suivant :

4.3.7. LEMME. — *Il existe un ouvert* U *de la variété polaire générale* $P_k(f, V_{n-d+k})$, *partout dense dans* $P_k(f, V_{n-d+k})$, *tel que pour chacun de ses éléments* x, *il existe un voisinage* B_x *de* x *dans* $P_k(f, V_{n-d+k})$ *vérifiant :*

— $B_x \to \pi_k(B_x)$ est un isomorphisme.

— *Le plan tangent relatif à* $\pi_k(B_x)$ *en* $\pi_k(x)$ *est l'image, par l'application tangente à* $\pi_k : X \to \mathbb{C}^{d+1-k} \times \mathbb{C}^s$ *de l'unique hyperplan tangent en* x *contenant* V_{n-d+k}.

Preuve. — Considérons la variété polaire générale (mais non projective) (*voir* [HM$_2$])

$$\Sigma_{\substack{2, 2, \ldots, 2 \\ k+1 \text{ fois}}}(f, V_{n-d+k}) = \mathrm{Adh}\{x \in X^0, \dim T_x X_{f(x)} \cap V_{n-d+k} \geqq k+1\}$$

qui est de codimension $2(k+1)$ dans X et de codimension $k+2$ dans $P_k(f, V_{n-d+k})$, si V_{n-d+k} est assez général. Dans $P_k(f, V_{n-d+k}) \setminus \Sigma_{2, 2, \ldots, 2}(f, V_{n-d+k}) = U'$, il existe un unique hyperplan tangent relatif en x contenant V_{n-d+k}. L'ouvert $U \subset U'$ où le morphisme fini $U' \to \pi_k(U')$ est de rang maximum, convient pour le lemme. □

Une conséquence du lemme est que, si $k<d-m$, le morphisme $U \setminus F_k \to \pi_k(U \setminus F_k)$ est bijectif sur l'ouvert partout dense $U \setminus F_k$. Pour terminer la démonstration de la proposition 4.3.6, il reste à montrer que le morphisme

$$P_{d-m}(f, V_{n-m}) \to \Delta_{d-m}(f, V_{n-m})$$

fini d'après 4.3.3 est lui aussi biméromorphe. Commençons par supposer que $m=0$, c'est-à-dire que le morphisme $C_f(X) \to S \times \check{\mathbb{P}}^n$ est génériquement fini.

L'énoncé et la démonstration du lemme qui suit sont une généralisation du lemme III, 3.2 de [BS].

4.3.8. LEMME. — *Soit* X *un germe d'espace analytique plongé dans* $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ *équidimensionnel, réduit, de dimension* d. *Supposons que le morphisme canonique* $\gamma : C(X) \to \check{\mathbb{P}}^n$ *est de rang maximum* n *sur un ouvert de* C(X).

Pour un représentant X_U ***de*** X ***dans un voisinage convenable*** U ***de*** 0 ***dans*** $\mathbb{C}^{n+1}$, ***un hyperplan tangent général à*** X_U ***en un point général*** x ***de*** X_U^0 ***est tangent à*** X_U ***seulement en*** x. ***De plus le contact en*** x ***est quadratique.***

Démonstration. — U est choisi de telle sorte que le morphisme $C(X_U) \xrightarrow{\gamma} \check{\mathbb{P}}^n$ soit de rang maximum sur un ouvert de $C(X_U)$. Comme $C(X_U)$ est de dimension n il existe un point L_0 de $\check{\mathbb{P}}^n$ tel que $\gamma^{-1}(L_0)$ soit composé d'un nombre fini de points et tel que γ soit un morphisme fini au voisinage de chacun de ces points.

Choisissons l'un de ces points (x_0, L_0). L'hyperplan affine H_0 déterminé par x_0 et L_0 est tangent ou limite d'espaces tangents à X en un nombre fini de points $x_0, x_1, \ldots, x_l$. Comme $\gamma^{-1}(\tau^{-1}(\operatorname{sing} X_U))$ est un fermé strict de $\check{\mathbb{P}}^n$ on peut même supposer que $x_0, x_1, \ldots, x_l$ sont des points de X_U^0.

Les singularités $(X_U \cap H_0, x_j)$, $0 \leqq j \leqq l$ sont donc des singularités isolées d'hypersurfaces.

Choisissons un point L_1 assez général dans $\check{\mathbb{P}}^n$ pour que

(i) la forme linéaire ξ_1 définie par L_1 sépare les points $x_0, x_1, \ldots, x_l$;

(ii) la courbe $\tau(\gamma^{-1}(\overline{L_0 L_1}))$ définie par la droite $\overline{L_0 L_1}$ soit une courbe polaire générale de X_U.

Le morphisme $\gamma : (\gamma^{-1}(\overline{L_0 L_1}), (x_j, L_0)) \to (\overline{L_0 L_1}, L_0)$ est alors fini de degré égal au nombre de Milnor de la singularité $(X_U \cap H_0, x_j)$. Si $\Gamma_{j,\alpha}$ est une composante locale de $(\gamma^{-1}(L_0, L_1), (x_j, L_0))$ elle peut être paramétrée par une racine $m_{j,\alpha}$-ième de a (a est un paramètre de la droite $\overline{L_0 L_1}$, nul en L_0, infini en L_1) si $m_{j,\alpha}$ est le degré local de la restriction de γ à $\Gamma_{j,\alpha}$.

Il existe donc une racine m-ième de a qui paramètre simultanément toutes les branches locales $\Gamma_{j,\alpha}$ de $\gamma^{-1}(L_0, L_1)$ au voisinage des points $(x_0, L_0), \ldots, (x_l, L_0)$.

Choisissons des coordonnées sur $\mathbb{C}^{n+1}$ de telle sorte que H_0 ait pour équation $\xi_0 = \xi_0(x_0)$ et que $\xi_1 = 0$ soit une équation de la direction associée à L_1.

Nous voulons maintenant montrer que la fonction $\xi_0 + a\xi_1$ dont les points critiques sont les points de $\tau(\gamma^{-1}(L_0 + aL_1))$ sépare ces points critiques lorsque a est choisi dans un voisinage convenable de 0.

$\tau(\gamma^{-1}(L_0 L_1))$ étant une courbe polaire, nous avons, si $h : (\mathbb{D}, 0) \to (\Gamma_{j,\alpha}(x_j, L_0))$ est une paramétrisation de $(\Gamma_{j,\alpha}, (x_j, L_0))$ telle que $(a \circ h)(u) = u^m$,

$$\frac{d(\xi_0 \circ h)}{du} + u^m \frac{d(\xi_1 \circ h)}{du} = 0$$

(la tangente en x_j à $\Gamma_{j,\alpha}$ est contenu dans l'espace tangent à X en x_j). Ce qui montre que :

$$\frac{d}{du}[\xi_0(h(u)) + u^m(\xi_1(h(u)) - \xi_1(h(0)))] = mu^{m-1}[\xi_1(h(u)) - \xi_1(h(0))]$$

et que

$$\xi_0(h(u)) + u^m(\xi_1(h(u)) - \xi_1(h(0)))$$

tend strictement plus vite vers zéro que $u^m = (a \circ h)(u)$.

Soient $K_0, K_1, \ldots, K$ des voisinages compacts disjoints de $x_0, x_1, \ldots, x$ dans U tels que $X_U \cap K_j$ soit lisse ($0 \leqq j \leqq l$). Il existe alors un nombre positif ε tel que pour $0 < |a| < \varepsilon$.

(i) La direction $\xi_0 + a\xi_1 = 0$ n'est direction limite d'hyperplan tangent en aucun point de $X_U \setminus (\bigcup_j K_j)$.

(ii) $\xi_0 + a\xi_1$ a dans le compact $K_j (0 \leqq j \leqq l)$ exactement $\mu(X_U \cap H_0, x_j)$ points critiques non dégénérés à valeurs critiques distinctes.

Considérons deux composantes locales $\Gamma_{j,\alpha}$ et $\Gamma_{k,\beta}$ de $\gamma^{-1}(\overline{L_0 L_1})$ situées respectivement au voisinage de x_j et x_k et évaluons la différence de deux valeurs critiques associées à des points de $\Gamma_{j,\alpha} \cap \gamma^{-1}(L_0 + aL_1)$ et $\Gamma_{k,\beta} \cap \gamma^{-1}(L_0 + aL_1)$.

Quand a tend vers zéro cette différence est équivalente à :

$\xi_0(x_j) - \xi_0(x_k)$ si $\xi_0(x_j) \neq \xi_0(x_k)$,

$a(\xi_1(x_j) - \xi_1(x_k))$ si $\xi_0(x_j) = \xi_0(x_k)$ et $x_j \neq x_k$,

une quantité d'ordre strictement supérieur à a si $x_j = x_k$.

Il existe donc une constante ε', $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, telle que pour $0 < |a| < \varepsilon'$, la fonction $\xi_0 + a\xi_1$ admet sur X_U des points critiques non dégénérés à valeurs critiques distinctes. □

En appliquant le lemme 4.3.8 à la fibre générique X_s de $X \to S$ on prouve que le morphisme $P_d(f, V_n)_s \to \Delta_d(f, V_n)_s$ est bijectif pour V_n assez général dans $\check{\mathbb{P}}^n$, ce qui suffit pour terminer la démonstration de 4.3.6 dans le cas non dégénéré où $m = 0$.

Si maintenant on a $m > 0$, on peut, en choisissant un plan V_{n-m-1} assez général, considérer la projection $X \to S \times \mathbb{C}^{m+2}$ associée à ce plan. On a vu plus haut qu'alors la restriction à $P_{d-m-1}(f, V_{n-m-1})$ est un morphisme fini et biméromorphe de P_{d-n-1} sur Δ_{d-m-1}. On vérifie facilement que si $V_{n-m} \supset V_{n-m-1}$ est assez général, $P_{d-m}(f, V_{n-m})$ est contenu dans $P_{d-m-1}(f, V_{n-m-1})$ et que sa projection sur Δ_{d-m-1} est égale à $P_1(f_{d-m-1})$, où f_{d-m-1} désigne la projection de Δ_{d-m-1} sur S. On est ainsi ramené à montrer la proposition dans le cas où X est une hypersurface relative, et $m = d-1$.

Soit alors $s \in S$. Soit Γ une composante irréductible de $C_f(X)_s$, qui est de dimension d par hypothèse. Le morphisme $\gamma : \Gamma \to \check{\mathbb{P}}^d$ est à fibres de dimension $\geqq d-1$. Si les fibres ne sont pas toutes de dimension $d-1$, c'est que $\gamma(\Gamma)$ est un point de $\check{\mathbb{P}}^d$. Alors un plan $\sigma_1 = \sigma(V_1)$ général ne coupe pas Γ, et par suite $P_1(f, V_1) \cap \tau_f(\Gamma) = \emptyset$.

On peut donc supposer que le morphisme $\gamma : \Gamma \to \check{\mathbb{P}}^d$ est à fibres équidimensionnelles de dimension $d-1$. Comme on a vu que $\Gamma = C(\tau_f(\Gamma))$, on est ramené au cas absolu qu'on traite comme dans le lemme 4.3.8, à cette différence près, que $\gamma^{-1}(L_0)$ est maintenant formé de sous-variétés lisses en nombre fini, le long desquelles H_0 a un contact quadratique. On peut de même séparer ces sous-variétés. Si, en particulier, il existe un point x de $\tau_f(\Gamma)$ tel que $\dim \tau_f^{-1}(x) \cap \Gamma = 1$, on peut appliquer le résultat plus précis suivant :

4.3.9. LEMME. — *Soit* X *une hypersurface irréductible et réduite de* $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geqq 2$, *dont les variétés polaires générales* $P_k(X, V_k)$ *sont vides pour* $k > 1$, *et non vide pour* $k = 1$. *Nous supposons de plus que les fibres du morphisme* $C(X) \xrightarrow{\gamma} \check{\mathbb{P}}^n$ *sont de dimension* $n-1$. X *est alors un cône de sommet* 0 *sur une variété projective de* $\mathbb{P}^n$ *de dimension* $n-1$, *réglée par des* $\mathbb{P}^{n-2}$.

Preuve. — Soit L un point de $\gamma(C(X))$. Son image inverse $\gamma^{-1}(L)$ s'identifie à l'ensemble des points de X où une limite d'hyperplan tangent est parallèle à L. Si $\xi = 0$ est une équation de L, la fonction ξ est critique aux points de $\gamma^{-1}(L)$, donc contante sur chaque composante connexe de $\gamma^{-1}(L)$. Tout hyperplan affine tangent à X est tangent le long d'un sous-espace de dimension $d-1$.

Comme X est irréductible, C(X) l'est aussi. Comme $\gamma(C(X))$ contient $\tau^{-1}(0)$ (de dimension 1 d'après nos hypothèses), $\gamma^{-1}(\tau^{-1}(0))$ est contenu dans C(X), de dimension au moins n, et coïncide donc avec C(X).

Il s'ensuit que tout hyperplan tangent à X passe par 0. X est donc un cône de sommet 0 sur une variété projective X_∞ de $\mathbb{P}^n$ dont la variété duale est $\tau^{-1}(0)$. Comme $\dim \tau^{-1}(0)=1$, X_∞ est réglée par des $\mathbb{P}^{n-2}$. □

4.3.10. *Conséquence.* — Si $\sigma(V_1)$ est un cycle général de codimension 1 dans $\check{\mathbb{P}}^n$, $\gamma^{-1}(\sigma(V_1))$ est une réunion disjointe de sous-espaces linéaires de dimension $n-1$ (en nombre égal au degré de $\tau^{-1}(0)$) et la projection de noyau V_1 les envoie sur autant de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$, dont la réunion n'est autre que le dirimant $\Delta_1(X, V_1)$. Dans ce cas, le morphisme $P_1(X, V_1) \to \Delta_1(X, V_1)$ est donc fini et biméromorphe.

4.3.11. COROLLAIRE. — *Pour un V_{n-d+k} assez général dans Grass$(n-d+k, n+1)$ $\gamma^{-1}(\sigma(V_{n-d+k}))$ s'identifie, à un morphisme fini et biméromorphe près, à l'espace conormal relatif $C_{f_k}(\Delta_k(f, V_{n-d+k}))$.*

4.3.12. COROLLAIRE (transitivité des dirimants). — *Pour un drapeau $\mathscr{D}: V_{n-d+1} \subset \ldots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ assez général nous avons, si*

$$\mathscr{D}_k: 0 \subset V_{n-d+k+1}/V_{n-d+k} \subset \ldots \subset V_n/V_{n-d+k} \subset \mathbb{C}^{d+1-k}$$

est le drapeau induit sur $\mathbb{C}^{d+1-k}$ par la projection de noyau V_{n-d+k}: $(0 \leqq k \leqq d)$

$$P_j(f_k, \mathscr{D}_k) = \pi_k(P_{k+j}(X, \mathscr{D}))$$

et

$$\Delta_j(f_k, \mathscr{D}_k) = \Delta_{k+j}(f, \mathscr{D}).$$

Vérification. — D'après 4.3.11 $\gamma^{-1}(\sigma(V_{n-d+k}))$ s'identifie à un morphisme fini et biméromorphe près à $C_{f_k}(\Delta_k(f, \mathscr{D}))$. La variété polaire $P_j(f_k, \mathscr{D}_k)$ définie par $V_{n-d+k+j}/V_{n-d+k}$ est donc l'image dans $\Delta_k(f, \mathscr{D})$ de $\gamma^{-1}(\sigma(V_{n-d+k+j}))$.

Remarquons que par le théorème de Kleiman, le lieu critique de la projection $P_k(f, \mathscr{D}) \to \Delta_k(f, \mathscr{D})$ ne peut contenir une composante de $P_{k+j}(f, \mathscr{D})$. Il s'ensuit que

$$P_j(f, \mathscr{D}_k) = \pi_k(P_{k+j}(f, \mathscr{D})) \qquad \text{et} \qquad \Delta_j(f_k, \mathscr{D}_k) = \Delta_{k+j}(f, \mathscr{D}).$$

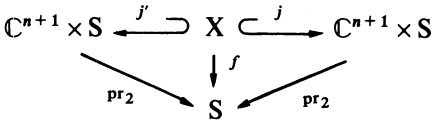
4.3.13. *Remarque.* — En général $P_{k+j}(f, \mathscr{D}) \neq P_j(f|_{P_k(f, \mathscr{D})}, \mathscr{D})$ puisque $\mathscr{D}$ n'a aucune raison d'être général pour la variété polaire $P_k(f, \mathscr{D})$. On peut vérifier sur l'exemple suivant dû à Briançon-Speder [BS] que $P_1(P_1(X)) \neq P_2(X)$
X est l'hypersurface de $(\mathbb{C}^4, 0)$ définie par $z^3+tx^4z+x^6+y^6=0$.

$P_2(X)$ est équimultiple le long de l'axe Ot, tandis que $P_1(P_1(X))$ ne l'est pas.

4.4. MULTIPLICITÉ DES DIRIMANTS RELATIFS. — Dans ce paragraphe, nous montrons que la multiplicité des dirimants généraux d'un germe de morphisme $f: X \to S$, est un invariant

analytique de f et nous en donnons une interprétation en terme du diviseur exceptionnel du morphisme $\zeta_f : E_0 C_f(X) \to X$.

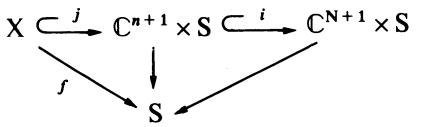
4.4.1. *Dépendance du plongement relatif.* — Soient j et j' deux plongements relatifs du morphisme f que nous supposerons tous deux minimaux.



Il existe alors un automorphisme φ de $\mathbb{C}^{n+1} \times S$ au-dessus de S qui échange j et j'. Si nous considérons les espaces conormaux $C_f X$ et $C'_f X$ définis respectivement par j et j', ils sont échangés par l'automorphisme de $T^* \mathbb{C}^{n+1} \times S$ défini par φ.

Il est facile de vérifier de plus que les fibres respectives $\tau_f^{-1}(0)$ et $\tau_f'^{-1}(0)$ sont échangées par la partie linéaire de l'application cotangente à φ en 0.

Il nous reste à comparer les espaces conormaux de X définis par un plongement de X dans $\mathbb{C}^{N+1} \times S$ et un plongement minimal qui s'en déduit.



Quitte à faire agir un automorphisme de $\mathbb{C}^{N+1} \times S$; nous pouvons supposer que i est un plongement qui identifie $\mathbb{C}^{n+1} \times S$ avec le produit par S d'un sous-espace linéaire de dimension $n+1$ de $\mathbb{C}^{N+1}$.

On remarque alors que si $C_f(X)$ est défini par j et $C'_f(X)$ par $i \circ j$, $C'_f(X)$ n'est autre que le cône sur $C_f(X)$ de sommet $Q \subset \check{\mathbb{P}}^N$ où Q est le sous-espace linéaire des hyperplans de $\mathbb{C}^{N+1}$ contenant $\mathbb{C}^{n+1}$. Il s'ensuit que $\tau_f'^{-1}(0)$ est le cône de sommet Q sur $\tau_f^{-1}(0)$.

D'autre part, le diviseur $\zeta_f^{-1}(0)$ de l'éclatement de $\tau_f^{-1}(0)$ dans $C_f(X)$ (pour un plongement $j : X \subsetneq \mathbb{C}^{n+1} \times S$) est plongé dans $\check{\mathbb{P}}(\mathbb{C}^{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1} \times T_0 S)$ (où $T_0 S$ désigne l'espace tangent de Zariski en 0). On vient donc de montrer :

4.4.2. PROPOSITION. — *Le polynôme de Snapper*

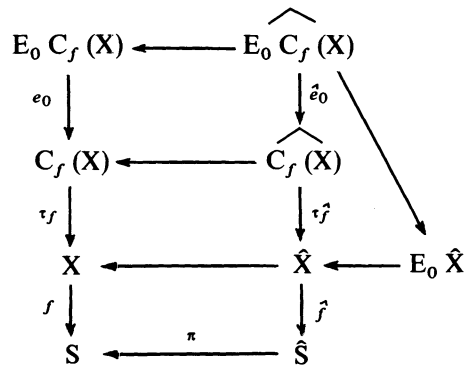
$$\chi(\mathcal{O}_{\zeta^{-1}(0)} \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}(\mathbb{C}^{n+1})}(n_1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1} \times T_0 S)}(n_2))$$

est un invariant du morphisme $f : X \to S$.

Pour une définition du polynôme de Snapper, on renvoie à Kleiman [K_2]. Le polynôme de Snapper est invariant par les opérations sur $\zeta_f^{-1}(0)$ définies au 4.4.1. Dans le cas particulier où $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ est une application à singularité isolée, ce polynôme était considéré dans [T_3] et Hironaka avait conjecturé que la constance de la partie de degré total maximum $n+1$ de ce polynôme dans une famille d'applications $F : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

était équivalente aux conditions de Whitney pour le couple formé de $F^{-1}(0)$ et de $\{0\}\times\mathbb{C}$.

Considérons alors un morphisme f comme dans 4.3.6, et le diagramme suivant induit par l'éclatement normalisé $\pi:\hat{S}\to S$ de 0 dans S.



La deuxième colonne est la transformée stricte de la première par l'éclatement π. On remarque que $\widehat{C_f(X)}$ est l'espace conormal de $\hat{f}$.

Soit D le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(s_0)$ de l'éclatement π, et D_α une de ses composantes irréductibles.

Soit $\hat{\zeta}_f^{-1}(\{0\}\times D)$ le diviseur exceptionnel du morphisme $\hat{\zeta}_f=\tau_f\circ\hat{e}_0$.

Il existe un ouvert U_α de D_α, tel que, pour tout λ dans U_α :

(i) Le morphisme $\hat{\zeta}_f^{-1}(\{0\}\times D)\to D$ est équidimensionnel au-dessus d'un voisinage de λ.

(ii) Il existe un chemin analytique $h:(\mathbb{D},0)\to\hat{S}$, tel que $h(0)=\lambda$, $h(\mathbb{D}\setminus\{0\})\subset\hat{S}\setminus D$, $h(\mathbb{D})$ lisse et transverse à D_α.

On voit alors que la restriction de $\widehat{E_0C_f(X)}$ au-dessus de la courbe $h(\mathbb{D})=c$ est égale, compte tenu de l'ouverture de $C_f(X)\to S$, à l'espace $E_0C_{f_c}(\hat{X}_c)$.

D'ailleurs $f_c:\hat{X}_c\to c$ est l'image réciproque du morphisme $f:X\to S$ par l'application $c\to\hat{S}\xrightarrow{\pi}S$.

C'est pourquoi nous montrons maintenant un lemme, valable pour un morphisme dont le but est un espace lisse de dimension 1.

4.4.3. LEMME. — *Soit $f:X\to\mathbb{C}$ un germe de morphisme analytique. Considérons le morphisme composé*

$$\overline{E_0C_f(X)}\xrightarrow{n}E_0C_f(X)\xrightarrow{\tilde{e}_0}C_fX\xrightarrow{\tau_f}X\to\mathbb{C}$$

où n est la normalisation. (On note $\bar{\zeta}_f=\zeta_f\circ n=\tau_f\circ\tilde{e}_0\circ n$).

Le morphisme canonique $C_f(X) \xrightarrow{\gamma} \check{\mathbb{P}}^n$, *induit par un plongement* $X \subsetneq \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$, *donne une application* $\varepsilon : \overline{E_0 C_f(X)} \to \check{\mathbb{P}}^n$ *égale au composé* $\gamma \circ \tilde{e}_0 \circ n$.

Pour un hyperplan suffisamment général $V_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$:

(i) $\bar{\zeta}_f^{-1}(0) \cap \varepsilon^{-1}(\{V_n\})$ *est un ensemble fini de points.*

(ii) $\overline{E_0 C_f(X)} \cap \varepsilon^{-1}(\{V_n\})$ *est une courbe lisse* Γ, *qui rencontre* $\bar{\zeta}_f^{-1}(0)$ *en des points lisses de* $\bar{\zeta}_f^{-1}(0)$ *où l'intersection est transverse.*

(iii) $(\Gamma . \bar{\zeta}_f^{-1}(0)) = m_0(P_d(f, V_n)) = (\zeta_f^{-1}(0) . (\mathbb{P}^{n+1} \times \{V_n\}))$.

Démonstration. — Écartons le cas où $\dim \tau_f^{-1}(0) < n$ pour lequel on a, si V_n est assez général : $\Gamma = \emptyset$, $m_0(\Delta(f, V_n)) = 0$ et $(\zeta_f^{-1}(0) \cap \mathbb{P}^{n+1} \times \{V_n\}) = \emptyset$.

Supposons donc $\dim \tau_f^{-1}(0) = n$ (i. e. : $\tau_f^{-1}(0) = \check{\mathbb{P}}^n$. (i) et (ii) résultent alors du théorème de Kleiman qui permet d'affirmer que $\varepsilon^{-1}(V_n)$ coupe $\bar{\zeta}_f^{-1}(0)$ en des points réguliers à la fois de $\bar{\zeta}_f^{-1}(0)$ et de $\overline{E_0 C_f(X)}$, et où l'intersection est transversale.

La formule de projection nous montre alors (iii) en considérant l'intersection de $P_d(f, V_n)$ avec un hyperplan général H de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$ dont l'image inverse dans $\overline{E_0 C_f(X)}$ est la réunion du diviseur $\bar{\zeta}_f^{-1}(0)$ et de la transformée stricte $\tilde{H}$. En prenant H suffisamment général dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$, la transformée stricte $\tilde{H}$ évite les points d'intersection de $\bar{\zeta}_f^{-1}(0)$ avec Γ, (toujours d'après le résultat de Kleiman).

On a donc :

$$(\Gamma . \bar{\zeta}_f^{-1}(0)) = (\Gamma . \bar{\zeta}_f^{-1}(0) + \tilde{H}) = (P_d(f, V_n) . H) = m_0(P_d(f, V_n)).$$

Le nombre d'intersection $(\Gamma . \bar{\zeta}_f^{-1}(0))$ est simplement le cardinal de l'intersection $\Gamma \cap \bar{\zeta}_f^{-1}(0)$ noté $|\Gamma \cap \bar{\zeta}_f^{-1}(0)|$. Il s'ensuit que $(\Gamma . \bar{\zeta}_f^{-1}(0)) = (\bar{\zeta}_f^{-1}(0) . (\mathbb{P}^{n+1} \times \{V_n\}))$.

En effet $|\Gamma \cap \bar{\zeta}_f^{-1}(0)| = |n^{-1}((\mathbb{P}^{n+1} \times \{V_n\}) \cap \bar{\zeta}_f^{-1}(0))|$ et ce dernier nombre est égal au nombre d'intersection de $\zeta_f^{-1}(0)$ avec $(\mathbb{P}^{n+1} \times \{V_n\})$ d'après la formule de projection et compte tenu de nos hypothèses de transversalité.

Nous pouvons utiliser, pour calculer la multiplicité du dirimant, le lemme de transversalité de [HM$_1$] ou [N$_2$] que nous rappelons ici pour mémoire :

4.4.4. LEMME. — *Soit* $f : X \to \mathbb{C}$ *un morphisme analytique à fibres de dimension pure d. Choisissons un plongement relatif :*

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{C} & & \end{array}$$

Pour un drapeau $\mathscr{D} : V_{n-d} \subset V_{n-d+1} \subset V \ldots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *assez général, et un entier* $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$, *l'intersection* $C_0(P_k(f, V_{n-d+k})) \cap (V_{n-d+k} \times \{0\})$ *du cône tangent à la variété polaire avec le plan qui la définit est réduite à* $\{0\}$. *Pour tout plan* H *de dimension* $n-d+k+1$ *dans* $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$, *contenant* V_{n-d+k} *et assez général, on a donc également :* $C_0(P_k(f, V_{n-d+k})) \cap H = \{0\}$.

Dans le lemme 4.4.3, on peut donc, pour calculer $m_0(P_d(f, V_n))$ utiliser un hyperplan H de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^s$ dont l'intersection avec $\mathbb{C}^{n+1}$ contient V_n. On a alors

$$(\Gamma . \bar{\zeta}_f^{-1}(0)) = (\bar{\zeta}_f^{-1}(0) . \varepsilon^{-1}(\{V_n\})) = m_0(P_d(f, V_n)) = m_0(\Delta_d(f, V_n)).$$

Ce nombre $m_0(\Delta_d(f, V_n))$ est aussi égal au degré de l'application $\zeta_f^{-1}(0) \to \check{\mathbb{P}}^n$ qui est génériquement finie.

Restent les multiplicités des variétés polaires $P_k(f, V_{n-d+k})$ $(k<d)$. On remarque pour cela que si H est un plan général de codimension $d-k$, dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^s$, et $f_H : H \cap X \to S$ le morphisme induit par f, on a, si $H \cap \mathbb{C}^{n+1} \times \{0\} = V_{n-d+k+1}$ et si

$$\mathscr{D}_H : V_{n-d} \subset \ldots \subset V_{n-d+k} \subset V_{n-d+k+1} = H \cap \mathbb{C}^{n+1} \times \{0\};$$

est le drapeau induit par $\mathscr{D}$, alors

$$P_k(f, V_{n-d+k}) \cap H = P_k(f_H, V_{n-d+k})$$

puisque l'ensemble des points où H n'est pas transverse aux plans tangents relatifs est justement $P_{k+1}(f, V_{n-d+k+1})$, de codimension positive dans $P_k(f, V_{n-d+k})$.

Il s'ensuit que $m_0(P_k(f, V_{n-d+k})) = m_0(P_k(f_H, V_{n-d+k}))$ d'après le lemme 4.4.4. Or, nous pouvons appliquer 4.4.3 à $f_H : X \cap H \to S$ de dimension relative k :

$$m_0(P_k(f_H, V_{n-d+k})) = (\bar{\zeta}_{f_H}^{-1}(0) . \varepsilon^{-1}(\{V_{n-d+k}\})).$$

$E_0C_f(X)$ est muni d'une application canonique vers $\mathbb{P}^{n+1}$, puisque sur $E_0C_f(X)$ l'image inverse de l'idéal maximal de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$ est inversible. $E_0C_{f_H}(X)$, d'après le théorème de Kleiman, est l'intersection de $E_0C_f(X)$ avec l'image inverse de $\mathbb{P}(H)$ par cette application canonique, lorsque H est assez général parmi les plans de codimension $d-k$ de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$.

Il s'ensuit que : $\zeta_{f_H}^{-1}(0) = \zeta_f^{-1}(0) \cap (\mathbb{P}(H) \times \check{\mathbb{P}}^n)$ et nous obtenons finalement :

4.4.5 $$m_0(P_k(f, V_{n-d+k})) = m_0(\Delta_k(f, V_{n-d+k})) = (\zeta_f^{-1}(0) . \mathbb{P}(H) \times \sigma(V_{n-d+k}))$$

où H est un plan de codimension $d-k$ de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$, général parmi ceux qui contiennent V_{n-d+k}, lui-même général dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \{0\}$.

(La dernière intersection est calculée dans $\mathbb{P}^{n+s} \times \check{\mathbb{P}}^n$). □

Revenons à la situation décrite en 4.4.3. Les lemmes 4.4.3 et 4.4.4 nous montrent que, pour un point $\lambda \in U_\alpha \subset D$ et une courbe lisse c transverse à D_α au point λ, nous avons, si $f_c : \hat{X}_c \to c$ est l'image inverse de f par $c \to \hat{S} \to S$

$$m_0(\Delta_k(f_c, V_{n-d+k})) = (\zeta_f^{-1}(0 \times \{\lambda\}) . \mathbb{P}(H) \times \sigma(V_{n-d+k}))$$

où H est de codimension $d-k$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^p$, général parmi ceux qui contiennent V_{n-d+k}, lui-même général dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \{0\}$. Mais $\Delta_k(f_c, V_{n-d+k})$ est l'image inverse par $c \subsetneq \hat{S} \xrightarrow{\pi} S$ du dirimant $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$.

Cas particulier important. — f étant sans éclatement en codimension 0 et V_{n-d+k} assez général pour satisfaire à la conclusion 4.3.6, $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ est de codimension 1 dans

$\mathbb{C}^{d-k+1} \times S$ (plongé dans $\mathbb{C}^{d-k+1} \times \mathbb{C}^p$). Pour calculer la multiplicité de $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$, de codimension $p-s+1$ dans $\mathbb{C}^{d-k+1} \times \mathbb{C}^p$, on remarque qu'il existe un ouvert de plans de dimension $p-s+1$ dans $\mathbb{C}^p$ tel que pour tout h élément de cet ouvert, $\mathbb{C}^{d-k+1} \times h$ est transverse à Δ_k.

Notons que $S \cap h$ est une courbe de S, dont la transformée stricte par $\pi : \hat{S} \to S$, éclatement normalisé de 0 dans S, est une réunion de courbes lisses, chacune transverse à D au point d'intersection.

Si n_α est la valuation de l'idéal maximal de S remonté à $\hat{S}$ sur la composante D_α du diviseur exceptionnel, la formule de projection nous donne :

$$m_0(\Delta_k(f, V_{n-d+k})) = \sum_\alpha n_\alpha d_{\alpha, k}$$

où $d_{\alpha, k}$ est le degré de l'application (génériquement finie) qui envoie $(\hat{\zeta}_f^{-1}(0) \cap \mathbb{P}(H) \times \sigma(V_{n-d+k}) \times D)$ sur D_α. (Rappelons que $\hat{\zeta}_f^{-1}(0)$ est plongé dans $\mathbb{P}^{n+p} \times \check{\mathbb{P}}^n \times D$, que H est un plan général de codimension $d-k$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^p$ et V_{n-d+k} un sous-espace linéaire de dimension $n-d+k$, général dans $H \cap \mathbb{C}^{n+1} \times \{0\}$.)

Comme n_α et les $d_{\alpha, k}$ sont des invariants analytiques du morphisme f (compte tenu de 4.4.1), on vient de montrer que la multiplicité des dirimants généraux de f sont des invariants analytiques de f. Plus précisément :

4.4.6. PROPOSITION. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme sans éclatement en codimension 0. Le type projectif du diviseur exceptionnel $\hat{\zeta}_f^{-1}(0)$ induit par un plongement relatif minimal de X dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^p$ est un invariant analytique du morphisme f.*

Il existe un ouvert de Zariski Ω du produit $\mathrm{Grass}(n-d+k, n) \times \mathrm{Grass}(p-s+1, p)$ tel que pour tout couple $(V_{n-d+k}, h) \in \Omega$ on a :

— *$S \cap h$ est une courbe*

— *$P_k(f, V_{n-d+k}) \cap \mathbb{C}^{n+1} \times h = P_k(f_h, V_{n-d+k})$ où f_h est la restriction de f au-dessus de $S \cap h$.*

— *$\Delta_k(f, V_{n-d+k}) \cap \mathbb{C}^{d+1-k} \times h = \Delta_k(f_h, V_{n-d+k})$*

— *$m_0(\Delta_k(f, V_{n-d+k})) = m_0(\Delta_k(f_h, V_{n-d+k})) = m_0(P_k(f_h, V_{n-d+k}))$*
$= (\hat{\zeta}_f^{-1}(0) . \mathbb{P}(H) \times \sigma(V_{n-d+k}) \times \mathbb{P}(h))$

où H est un plan de codimension $d-k$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^p$.

4.4.7. *Remarques.* — (i) Le lemme de transversalité 4.4.4 montre que l'on peut prendre pour H un plan général de codimension $d-k$ parmi ceux dont l'intersection avec $\mathbb{C}^{n+1} \times \{0\}$ contient V_{n-d+k}. Ce lemme traduit la position de $\hat{\zeta}_f^{-1}(0)$ relativement à la variété d'incidence de

$$\mathbb{P}^n \times \check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^{p-1} \subsetneq \mathbb{P}^{n+p} \times \check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^{p-1}.$$

(ii) De manière analogue à 4.4.2 on voit que le polynôme de Snapper

$$\chi(\mathcal{O}_{\hat{\zeta}_f^{-1}(0)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+p}}(n_1) \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^n}(n_2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{p-1}}(n_3))$$

est un invariant analytique du morphisme f.

5. Généricité de la condition W_f.

Dans ce paragraphe, nous montrons le résultat suivant :

5.1. THÉORÈME. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme entre espaces analytiques réduits, équidimensionnels, à fibres de dimension pure d, et sans éclatement en codimension 0. Soit Y une sous-variété analytique de X sur laquelle f est de corang constant t. Il existe un ouvert de Zariski non vide Y^0 de Y tel que le couple (X^0, Y^0) satisfasse la condition W_f.*

5.1.1. *Remarques.* — Quand $\dim S = 0$ le théorème est montré dans [V] et quand $\dim S = 1$ par V. Navarro dans [N_2]. La méthode employée dans [N_2] ne semble cependant pas se généraliser au cas $\dim S > 1$.

Nous supposerons que $\dim S \geqq 1$. Le lemme 5.2 ci-dessous donne une autre démonstration de la généricité quand $\dim S = 1$, et une petite modification de la démonstration de ce lemme donne aussi la généricité pour $\dim S = 0$ (condition W).

5.1.2. D'après la remarque 1.2*c*, on peut localiser la situation au voisinage d'un point de Y, et d'après la remarque 1.2 *f*, on peut supposer que la base S est $\mathbb{C}^s$, et le morphisme *f* ouvert, ce que nous ferons dans la suite.

La généricité étant connue pour la condition W, on peut, d'après la remarque 1.2*h*, supposer que $\operatorname{codim} f(Y) \geqq 1$.

5.1.3. On peut supposer aussi que le morphisme $\zeta_f : \zeta_f^{-1}(Y) \to Y$ est à fibres équidimensionnelles, ainsi que le morphisme $\tau_f : \tau_f^{-1}(Y) \to Y$.

La démonstration du théorème se fait alors par récurrence sur $\dim \tau_f^{-1}(0)$. Elle consiste à montrer que, si Ω est un ouvert de Zariski de $\zeta_f^{-1}(Y)$ comme dans la conséquence 3 de 2.1.4, pour toute composante irréductible Z de $\zeta_f^{-1}(Y)$, $\Omega \cap Z$ est nulle part dense dans Z. Pour cela, on coupe $\Omega \cap Z$ par l'image inverse d'un plan σ_{n-d+k} général, si c'est possible, et on applique la récurrence. Sinon, on coupe $\Omega \cap Z$ par l'image inverse d'un plan de S contenant $f(Y)$, et dans lequel $f(Y)$ est de codimension 1 ou 2. On utilise alors les deux lemmes qui suivent.

5.2. LEMME. — *Si $f(Y)$ est de codimension 1 dans S, alors le couple (X^0, Y) satisfait la condition W_f en tout point d'un ouvert de Zariski dense de Y.*

L'idée de la démonstration de ce lemme est classique (*voir* [H_2], [T_1]). On considère la normalisation $n : \overline{E_Y C_f(X)} \to E_Y C_f(X)$ et on pose $\bar{\zeta}_f = \zeta_f \circ n$. Il suffit de montrer que la fonction $\delta(Y_0, L)/d(x, Y)$ est bornée au voisinage d'un point de chaque composante connexe de la partie lisse de $\bar{\zeta}_f^{-1}(Y)$. Soit z_0 un tel point. On peut supposer, puisque $\overline{E_Y C_f(X)}$ est normal, que z_0 est dans la partie lisse de $\overline{E_Y C_f(X)}$ et qu'au voisinage de z_0 le morphisme $\bar{\zeta}_f : \bar{\zeta}_f^{-1}(Y) \to Y$ est une submersion. Soit V un voisinage assez petit de z_0 dans $\overline{E_Y C_f(X)}$. Le morphisme $f \circ \bar{\zeta}_f : V \to \mathbb{C}^s$ est lisse hors de $\bar{\zeta}_f^{-1}(Y)$ et

$$f \circ \bar{\zeta}_f (\bar{\zeta}_f^{-1}(Y) \cap V) = f(Y)$$

est lisse de codimension 1 dans $\mathbb{C}^s$.

On peut alors trouver des coordonnées au voisinage de z_0, $(u, \zeta_2, \ldots, \zeta_s, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, et des coordonnées $(t_1, \ldots, t_s, x_1, \ldots, x_{n+1})$, sur $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^{n+1}$ telles que : $|\zeta_f^{-1}(Y) \cap V|$

soit défini par $u=0$, Y par $t_1=x_{t+1}=\ldots=x_{n+1}=0$, et $f(Y)$ par $t_1=0$,

$$f\circ\bar{\zeta}_f(u,\underline{\zeta},\underline{\xi})=(u^\alpha,\zeta_2,\ldots,\zeta_s,\xi_1,\ldots,\xi_t,\varphi_{t+1},\ldots,\varphi_{n+1}),\ \alpha\geqq 1,$$

où, pour $t+1\leqq j\leqq n+1$, $\varphi_j=\varphi_j(u,\underline{\zeta},\underline{\xi})$ est une fonction holomorphe.

Quitte à bouger le point z_0 sur $\bar{\zeta}_f^{-1}(Y)\cap V$, on peut supposer qu'il n'est pas sur les transformés stricts des hypersurfaces de X définies par $x_{t+1}=0,\ldots,x_{n+1}=0$.

Par suite, puisque l'hypersurface $\varphi_j=0$ coïncide comme ensemble avec $|\zeta_f^{-1}(Y)|$ au voisinage de z_0, on peut écrire :

$\varphi_j(u,\underline{\zeta},\underline{\xi})=u^{\alpha_j}\psi_j(u,\underline{\zeta},\underline{\xi})$, et ψ_j est inversible au voisinage du point z_0, $(t+1\leqq j\leqq n+1)$.

L'espace tangent à la fibre de $f\circ\bar{\zeta}_f$ en un point z de $V\setminus|\bar{\zeta}_f^{-1}(Y)|$ n'est autre que $\{0\}\times\mathbb{C}^n$ dans ces coordonnées. On voit alors, en calculant la matrice jacobienne de $f\circ\bar{\zeta}_f$ dans les coordonnées ci-dessus, qu'un vecteur conormal $(\eta_1,\ldots,\eta_{n+1})$ au plan $T_xX_{f(x)}$, avec $x=\bar{\zeta}_f(z)$, vérifie les équations :

Pour $1\leqq i\leqq t$,
$$\eta_i+\frac{\partial\varphi_{t+1}}{\partial\xi_i}(z)\,\eta_{t+1}+\ldots+\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial\xi_i}(z)\,\eta_{n+1}=0.$$

D'autre part, la fonction $d(\bar{\zeta}_f(z),Y)$ est équivalente au voisinage de z_0 à la fonction $|u|^\beta$, si $\beta=\inf\{\alpha,\alpha_{t+1},\ldots,\alpha_{n+1}\}$.

On voit alors, comme dans le lemme 2.1, que $\delta(Y_0,L)\leqq C\,d(\bar{\zeta}_f(z),Y)$ au voisinage de z_0 si et seulement si on a
$$\sup_{\substack{t+1\leqq j\leqq n+1\\ 1\leqq i\leqq t}}\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_i}(z)\right|\leqq C'|u|^\beta.$$

Mais
$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_i}(z)=u^{\alpha_j}\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_i}(z)\qquad\text{et donc}\qquad\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_i}\right|\leqq C''|u|^{\alpha_j}\leqq C'|u|^\beta.\quad\square$$

Pour démontrer le théorème, on peut essayer de reprendre la démonstration d'Hironaka pour la condition A_f ([H_2], th. 1, § 5) en éclatant $f(Y)$ dans S.

On a alors un diagramme analogue :

$$\begin{array}{ccc}
\overline{Z}\subset\overline{E_Y\,C_f(X)} & \xleftarrow{\theta} & \widehat{\overline{E_Y\,C_f(X)}}\supset\hat{\overline{Z}}\\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{\tau}_f\circ n} & & \downarrow\\
E_Y X & \xleftarrow[\omega]{} & \hat{E}_Y X\\
\downarrow{\scriptstyle e_Y} & & \downarrow\\
X & \longleftarrow & \hat{X}\\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}}\\
S & \xleftarrow[\pi]{} & \hat{S}\supset\widetilde{f(Y)}=\pi^{-1}(Y)
\end{array}$$

où la notation $\wedge$ désigne le transformé strict par π, éclatement de $f(Y)$ dans S.

Soit Z une composante irréductible de $\zeta_f^{-1}(Y)$ qui se surjecte sur Y, et $Z \subset n^{-1}(Z)$ une composante de $\bar{\zeta}_f^{-1}(Y)$. On considère une composante irréductible $\hat{Z}$ de $\theta^{-1}(\bar{\zeta}_f^{-1}(Y))$ qui se surjecte sur Z, et on veut appliquer le lemme 5.2 à une telle composante et au morphisme $\hat{f}$. Il se peut cependant qu'on ne puisse pas trouver de telle composante Z qui se surjecte sur le diviseur $f(\tilde{Y})$, et on ne peut pas appliquer le lemme 5.2 de cette manière.

On considère un cas particulier de cette situation : X est une hypersurface relative, c'est-à-dire $X \subset \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^{d+1}$, et $f(Y)$ est de codimension 2 dans $S = \mathbb{C}^s$. On choisit Z, $\bar{Z}$ et $\hat{Z}$ comme ci-dessus, et on fait l'hypothèse suivante :

Le morphisme $\tilde{\tau}_f : Z \to \tilde{\tau}_f(Z)$ est fini, et l'image Z'' de $\hat{Z}$ dans le diviseur $\widetilde{f(Y)}$ est un fermé strict de $\widetilde{f(Y)}$.

5.3. Lemme. — *Sous cette hypothèse, il existe un ouvert de Zariski dense de Z où la fonction* $\delta(Y_0, L)/d(x, Y)$ *est localement bornée.*

On reprend les notations de 2.1.3.

On peut supposer, quitte à se restreindre à un ouvert de Y, que les propriétés suivantes sont aussi réalisées :

Le morphisme $\pi : Z'' \to f(Y)$ est un isomorphisme, et $Z' = \tilde{\tau}_f(Z)$ est à fibres équidimensionnelles de dimension $d+1-t$ sur Y.

Si Z'_0 est la fibre de Z' au-dessus de l'origine de Y, Z'_0 est naturellement plongée dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y) \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0)$, et n'est pas contenu dans $\mathbb{P}(0 \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0)$ puisque de dimension trop grande.

Z''_0 n'est autre que l'image de $Z'_0 \setminus \mathbb{P}(0 \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0)$ par la projection

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y) \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0) \setminus \mathbb{P}(0 \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0) \to \mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$$

et par hypothèse, Z''_0 est réduit à un point. Par suite Z'_0 est le plan projectif engendré par ce point et $\mathbb{P}(0 \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0)$.

On peut alors choisir des coordonnées $(a, b, x_{t+1}, \ldots, x_{d+1})$ sur $\mathbb{C}^s/f(Y) \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0$ telles que $Z'_0 \setminus \mathbb{P}(0 \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0)$ soit défini par $a/x_{t+1} = 0$ dans la carte où $x_{t+1} \neq 0$ par exemple. Choisissons alors un point z_0 dans $\bar{Z}$ comme dans le lemme 5.2, et supposons aussi qu'au voisinage de z_0, le morphisme $\tilde{\tau}_f \circ n : \bar{Z} \to Z'$ est un isomorphisme, et que $z'_0 = \tilde{\tau}_f \circ n(z_0)$ est dans la carte ($x_{t+1} \neq 0$ et $b \neq 0$).

On peut alors trouver des coordonnées $(u, \zeta_2, \ldots, \zeta_s, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ sur un voisinage V de z_0 dans $\bar{Z}$ et des coordonnées $(t_1, \ldots, t_s, x_1, \ldots, x_{d+1})$ sur $\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^{d+1}$ de sorte que dans ces coordonnées la fonction $\bar{\zeta}_f$ ait l'expression suivante :

$$\bar{\zeta}_f(u, \underline{\zeta}, \underline{\xi}) = (u^\alpha, \zeta_2 \psi, \zeta_3, \ldots, \zeta_s, \xi_1, \ldots, \xi_t, \psi, \xi_{t+2} \psi, \ldots, \xi_{d+1} \psi)$$

où ψ est une fonction holomorphe non identiquement nulle, et $f(Y)$ est défini par les équations $t_1 = t_2 = 0$.

On peut calculer la matrice jacobienne de $\bar{\zeta}_f$ dans ces coordonnées et l'espace tangent $T_x X_{f(x)}$ en un point $x=\bar{\zeta}_f(z)$ pour z voisin de z_0. Un vecteur conormal $(\eta_1, \ldots, \eta_{d+1})$ à $T_x X_{f(x)}$ dans $\mathbb{C}^{d+1}$ doit satisfaire la relation suivante :

Si $1 \leqq j \leqq t$,

$$\left(\psi+\zeta_2\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_2}\right)\eta_j+\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}\right)\eta_{t+1}+\xi_{t+2}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}\right)\eta_{t+2} + \ldots+\xi_{d+1}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}\right)\eta_{d+1}=0.$$

Si le point z_0 est choisi hors du transformé strict de l'hypersurface $x_{t+1}=0$, on voit qu'au voisinage de z_0, $\psi(u, \underline{\zeta}, \underline{\xi})=u^\beta\varphi(u, \underline{\zeta}, \underline{\xi})$ avec $\varphi(z_0)\neq 0$. Par suite $\partial\psi/\partial\xi_j=u^\beta\,\partial\varphi/\partial\xi_j$, et on voit comme dans le lemme 5.2 qu'il suffit de montrer, pour finir la démonstration du lemme, qu'on a

$$\left|\frac{\psi}{\psi+\zeta_2\,\partial\psi/\partial\zeta_2}(z)\right|\ \left|\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}(z)\right|\leqq C|u|^\gamma$$

au voisinage de z_0, si $\gamma=\inf\{\alpha, \beta\}$.

Mais la fonction $\psi/(\psi+\zeta_2\,\partial\psi/\partial\zeta_2)$ est inversible au voisinage de z_0, ce qui donne l'inégalité voulue. □

5.4. Démontrons maintenant le théorème.

On peut d'abord supposer que $\operatorname{codim}_s f(Y)\geqq 2$, d'après le lemme 5.2.

On fait alors une récurrence sur la dimension des fibres du morphisme $\tau_f^{-1}(Y)\to Y$.

Soit Z une composante irréductible de $\zeta_f^{-1}(Y)$. Quitte à localiser un peu plus la situation sur Y, on peut supposer, pour simplifier, que les fibres de Z sur Y sont aussi irréductibles. On doit alors considérer deux possibilités :

(*a*) le morphisme $\tau_f : \tilde{e}_Y(Z)\to Y$ est génériquement fini

(*b*) les fibres du morphisme $\tau_f : \tilde{e}_Y(Z)\to Y$ sont de dimension $\geqq 1$.

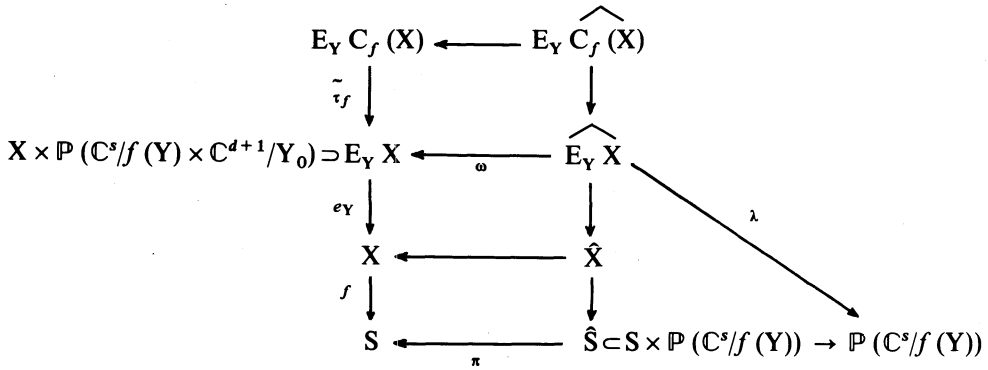
Commençons par (*a*).

5.4.1. Supposons que $\Omega\cap Z$ soit dense dans Z, où Ω est un ouvert satisfaisant la propriété de la conséquence 3 du paragraphe 2.1.4.

Quitte à localiser la situation en un autre point de Y, on peut supposer que $\tau_f : \tilde{e}_Y(Z)\to Y$ est un isomorphisme et que, pour tout $y\in Y$, $\Omega\cap Z\cap\zeta_f^{-1}(y)$ est dense dans $Z\cap\zeta_f^{-1}(y)$.

D'après le lemme 2.2, la première hypothèse implique que X est une hypersurface relative : $X\subset\mathbb{C}^s\times\mathbb{C}^{d+1}$.

On considère alors le diagramme suivant, comme dans le lemme 5.3 :



où π est l'éclatement de $f(Y)$ dans $S=\mathbb{C}^s$, et la notation $\wedge$ désigne le transformé strict par π.

Puisque $\tau_f : \tilde{e}_Y(Z) \to Y$ est un isomorphisme, il en est de même de $\tilde{\tau}_f : Z \to \tilde{\tau}_f(Z)$, et par raison de dimension, $\tilde{\tau}_f(Z)$ est une composante irréductible de $e_Y^{-1}(Y) = \mathbb{P}(C_Y X)$, où $C_Y X$ désigne le cône normal de Y dans X.

On note $Z' = \tilde{\tau}_f(Z)$ et $\tilde{Z}' \cap \Omega' = \tilde{\tau}_f(Z \cap \Omega)$.

Soit $\hat{Z}'$ une composante irréductible de $\omega^{-1}(Z')$ qui se surjecte sur $\hat{Z}'$. On considère le morphisme $(e_Y \circ \omega, \lambda) : Z' \to Y \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$, où λ est la projection $E_Y X \to \mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$ qu'on voit sur le diagramme.

Pour $y \in Y$, l'image Z''_y de Z'_y dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$ peut s'interpréter de la manière suivante :

Soit CZ'_y la composante de $(C_Y X)_y$ définie par Z'_y. CZ'_y est naturellement plongée dans $\mathbb{C}^s/f(Y) \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0$. L'image de CZ'_y par la projection sur $\mathbb{C}^s/f(Y)$ est un cône irréductible de $\mathbb{C}^s/f(Y)$. Ce cône n'est pas réduit à l'origine de $\mathbb{C}^s/f(Y)$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $CZ'_y \subset \{0\} \times \mathbb{C}^{d+1}/Y_0$ et par suite $\dim CZ'_y = (d-t)+(s-r) \leqq d-t+1$, ce qui implique $s-r \leqq 1$. Mais on a supposé au début que $s-r = \operatorname{codim}_s f(Y) \geqq 2$, d'où le résultat.

Le projectifié de ce cône dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$ est alors l'image Z''_y de Z'_y dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$. On remarque qu'on a $\dim Z''_y \geqq (d-t)+(s-r)-1-(d-t+1) = s-r-2$.

On distingue encore deux possibilités :

5.4.2. $(e_Y \circ \omega, \lambda) : \hat{Z}' \to Y \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$ est une surjection, autrement dit, pour tout $y \in Y$, on a $Z''_y = \mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$.

Soit H un plan de dimension $r+1$ dans $\mathbb{C}^s$ contenant $f(Y)$, et notons $h = \mathbb{P}(H/f(Y))$ le point correspondant dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$. On sait d'après le lemme 5.2 qu'il existe un fermé strict $F(H) \subset Y$ tel que le couple $(X^0 \cap f^{-1}(H), Y \setminus F(H))$ satisfasse la condition W_f.

On aura une contradiction si on sait que le transformé strict de $f^{-1}(H)$ dans $E_Y C_f(X)$ coupe $Z \cap \Omega$ le long d'un sous-ensemble qui se surjecte par ζ_f sur Y. En effet, dans ce cas, on peut trouver un point z de $Z \cap \Omega \setminus \zeta_f^{-1}(F(H))$ et un chemin dans le transformé strict de $f^{-1}(H)$ aboutissant en z; sur ce chemin, la fonction $\delta(Y_0, L)/d(x, Y)$ est bornée, ce qui est contradictoire avec la définition de Ω.

Par un argument de transversalité analogue à celui de [LT], lemme 5.1.3.2, on voit que si le point h est assez général dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$, l'image inverse de h dans $\widehat{E_Y C_f(X)}$ (*voir* diagramme) est égale au transformé strict de $f^{-1}(H)$ dans $\widehat{E_Y C_f(X)}$.

De plus, le morphisme $\hat{Z}' \to Y \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$ étant surjectif, on peut, quitte encore à se restreindre à un ouvert dense de Y, trouver un h assez général pour que l'image inverse de $Y \times \{h\}$ dans $\hat{Z}' \cap \hat{\Omega}'$ se surjecte sur Y.

Enfin, considérons $Z \underset{Z'}{\times} \hat{Z}'$ dans $\widehat{E_Y C_f(X)}$, qui est isomorphe à $\hat{Z}'$. L'image inverse de h dans $E_Y C_f(X)$, c'est-à-dire le transformé strict de $f^{-1}(H)$, coupe donc $\Omega \underset{Z'}{\times} \hat{Z}'$, isomorphe à $\hat{Z}' \cap \hat{\Omega}'$, le long d'un sous-ensemble qui se surjecte sur Y. On en déduit que le transformé strict de $f^{-1}(H)$ dans $\widehat{E_Y C_f(X)}$ coupe $Z \cap \Omega$ le long d'un sous-ensemble qui se surjecte sur Y, d'où la contradiction cherchée.

5.4.3. Supposons maintenant que le morphisme $(e_Y \circ \omega, \lambda) : \hat{Z}' \to Y \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$ ne soit pas surjectif. On note encore Z'' son image. Quitte à se restreindre à un ouvert de Y, on peut supposer que la projection $Z'' \to Y$ est à fibres équidimensionnelles, et on a vu que ces fibres sont de dimension au moins $s-r-2$, donc de codimension au plus 1 dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$.

On considère alors un plan H de dimension $r+2$ dans S, contenant $f(Y)$, et on note $D_H = \mathbb{P}(H/f(Y))$ la droite projective associée dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}^s/f(Y))$. Si H est assez général, $Y \times D_H \cap Z''$ n'est pas vide et est fini sur Y et on aboutit à une contradiction comme ci-dessus, en utilisant le lemme 5.3 à la place du lemme 5.2.

5.4.4. Considérons maintenant le cas (*b*).

On peut supposer encore, quitte à se restreindre à un ouvert de Y, que le morphisme $\tau_f : \tilde{e}_Y(Z) \to Y$ et le morphisme $\zeta_f : Z \to Y$ sont à fibres équidimensionnelles. Supposons comme dans le cas (*a*) que $\Omega \cap Z$ soit dense dans Z, et que $Z \cap \Omega$ se surjecte sur Y et que pour tout $y \in Y$, $Z_y \cap \Omega$ soit dense dans Z_y.

Soit $n-d+k \geqq 1$ la dimension des fibres de $\tau_f : \tilde{e}_Y(Z) \to Y$, avec $k \geqq 0$, et soit σ_{n-d+k} un plan de codimension $n-d+k$ dans $\check{\mathbb{P}}^n$.

Quitte à se restreindre à un ouvert de Y, on peut supposer que pour σ_{n-d+k} assez général, le morphisme $\tau_f : \gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}) \cap \tilde{e}_Y(Z) \to Y$ est fini et surjectif, et le morphisme $\zeta_f : Z \cap \Omega \cap \tilde{e}_Y^{-1}(\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k})) \to Y$ est surjectif.

On pose $\sigma_{n-d+k} = \sigma(V_{n-d+k})$ et on considère le dirimant $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$.

Puisque le morphisme $C_{f_k}(\Delta_k(f, V_{n-d+k})) \leftarrow \gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k})$, est fini et biméromorphe, le morphisme $f_k : \Delta_k \to S$ est sans éclatement en codimension 0, et $\dim \tau_{f_k}^{-1}(0) < \dim \tau_f^{-1}(0)$.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au couple $(\Delta_k, \pi_k(Y))$ et trouver un fermé strict $F(\sigma_{n-d+k}))$ de Y, tel que le couple $(\Delta_k^0, \pi_k(Y \setminus F(\sigma_{n-d+k}))$ satisfasse la condition W_{f_k}.

Sur $\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k})$ on a alors : $\delta(Y_0, L) = \delta(\pi_k(Y)_0, L/V_{n-d+k})$, la première distance étant celle des plans de $\mathbb{C}^{n+1}$, la seconde celle des plans de $\mathbb{C}^{d-k+1}$. D'autre part, on a

pour tout point x de X :

$$d(\pi_k(x), \pi_k(Y)) \leqq d(x, Y).$$

En tout point de $\tilde{e}_Y^{-1}(\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}))$ on a l'inégalité

$$\frac{\delta(Y_0, L)}{d(x, Y)} \leqq \frac{\delta(\pi_k(Y)_0, L/V_{n-d+k})}{d(\pi_k(x), \pi_k(Y))}.$$

Considérons alors un germe de courbe analytique sur $\tilde{e}_Y^{-1}(\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}))$ d'origine z_0 contenue dans $Z \cap \Omega \cap e_Y^{-1}(\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+k}))$ tel que $\zeta_f(z_0) \notin F(\sigma_{n-d+k})$. On a vu, par récurrence, que la fonction $\delta(\pi_k(Y)_0, L/V_{n-d+k})/d(\pi_k(x), \pi_k(Y))$ est bornée sur cette courbe, et l'inégalité ci-dessus montre que la fonction $\delta(Y_0, L)/d(x, Y)$ l'est aussi, ce qui est contradictoire avec la définition de l'ouvert Ω.

On a donc montré que pour cette composante de $\zeta_f^{-1}(Y)$, $\Omega \cap Z$ est nulle part dense dans Z, et par suite Ω est vide. Au début de la récurrence, le morphisme $\tau_f : \tau_f^{-1}(Y) \to Y$ est fini. On démontre le théorème dans ce cas comme dans le (*a*). □

5.5. COROLLAIRE. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme comme dans le théorème* 5.1, *et soit* Y *une variété analytique de* X *sur laquelle f est de corang constant t. Si le morphisme $\zeta_f : \zeta_f^{-1}(Y) \to Y$ est à fibres équidimensionnelles, alors le couple* (X^0, Y) *satisfait la propriété* W_f.

Ceci résulte immédiatement du théorème précédent et de la conséquence 2 du paragraphe 2.1.

5.6. COROLLAIRE. — *Dans la même situation que celle du théorème* 5.1, *supposons, de plus, que la multiplicité des dirimants généraux est constante le long de* Y $(0 \leqq k \leqq d)$. *Alors le couple* (X^0, Y) *satisfait la condition* W_f, *et pour tout* k, $0 \leqq k \leqq d$, *le couple* $(\Delta_k(f)^0, \pi_k(Y))$ *satisfait aussi la condition* W_{f_k}, *au voisinage de tout point de* Y.

De même que pour la démonstration du théorème 5.1, le problème est local sur Y.

On fait une récurrence sur $\dim \tau_f^{-1}(0)$. Choisissons alors un drapeau $V_{n-d} \subset V_{n-d+1} \subset \ldots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ assez général de sorte qu'on ait $\Delta_{k+j}(f) = \Delta_j(f_k)$ pour ce drapeau (*voir* 4.3.12).

Si X est une hypersurface relative, $X = \Delta_0(f)$, et puisque $\dim \tau_{f_k}^{-1}(0) < \dim \tau_f^{-1}(0)$ pour $1 \leqq k \leqq d$, on peut supposer par récurrence que pour $1 \leqq k \leqq d$, le couple $(\Delta_k(f)^0, \pi_k(Y))$ vérifie la condition W_{f_k} (si $\Delta_k(f)^0$ n'est pas vide).

On montre comme dans le théorème 5.1, que pour toute composante Z de $\zeta_f^{-1}(Y)$, $Z \cap \Omega$ est nulle part dense dans Z, où Ω est un ouvert considéré dans la conséquence 3, paragraphe 2.1. On note encore $Z_0 = \zeta_f^{-1}(0) \cap Z$.

Si $\dim \tilde{e}_Y(Z_0) \geqq 1$, on peut « couper » Z_0 avec $\Delta_k(f)$ et donner le même argument qu'en 5.4.4.

Il reste à considérer le cas où $\dim \tilde{e}_Y(Z_0) = 0$. Alors le morphisme $\tilde{\tau}_f : Z \to \tilde{\tau}_f(Z)$ est fini, et par suite, puisque X est équimultiple le long de Y, $\tilde{\tau}_f(Z)$ est une composante irréductible de $e_Y^{-1}(Y)$, et donc $\zeta_f(Z) = Y$. Comme le couple (X^0, Y) satisfait la condition

W_f sur un ouvert dense de Y (théorème 5.1), on en déduit que $Z \cap \Omega$ est nulle part dense dans Z.

Quand X n'est pas une hypersurface relative, on peut supposer par récurrence que $(\Delta_k(f)^0, \pi_k(Y))$ satisfait la condition W_{f_k} pour $0 \leqq k \leqq d$. On peut alors « couper » toute composante Z de $\zeta_f^{-1}(Y)$ par $\Delta_0(f)$, d'après le lemme 2.2, et donner le même argument qu'en 5.4.4. □

5.7. COROLLAIRE. — *Soit f un morphisme $X \to S$ comme dans 5.5. Supposons de plus que :* $\dim Y \cap f^{-1}(0) = t < d = \dim f^{-1}(0)$. *Il existe alors un ouvert de la variété $\check{\mathbb{P}}(\mathbb{C}^{n+1+p}/Y)$ des hyperplans contenant Y tel que pour tout hyperplan H élément de cet ouvert, les dirimants relatifs du morphisme $f_H : X \cap H \to S$ induit par f sont équimultiples le long de Y.*

Preuve. — Soit $\mathscr{D} : V_{n-d} \subset \ldots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un drapeau de $\mathbb{C}^{n+1}$ assez général. L'équimultiplicité des dirimants relatifs montre que $\Delta_k(f, V_{n-d+k}) = \emptyset$ pour $k > d-t$, (et donc $P_k(f, V_{n-d+k}) = \emptyset$ pour les mêmes valeurs de k).

Il est donc facile de vérifier que si $H \cap \mathbb{C}^{n+1} \times \{0\} = V_n$ et si $\mathscr{D}_H$ est le drapeau induit par $\mathscr{D}$ dans $H \cap \mathbb{C}^{n+1} \times \{0\}$,

$$P_k(f_H, \mathscr{D}_H) = \mathrm{Adh}(P_k(f, \mathscr{D}) \cap X^0 \cap H) \qquad \text{pour} \quad k \leqq d-t,\ k < d.$$

En effet, l'ensemble des points x de $P_k(f, \mathscr{D}) \cap X^0$ où $T_x X_{f(x)}$ est contenu dans V_n est justement $P_d(f, \mathscr{D}) \cap X^0$ qui est de codimension positive stricte dans $P_k(f, \mathscr{D}) \cap X^0$, $(k < d)$.

Considérons alors $\Delta_k(f, V_{n-d+k}) \cap [(V_{n-d+k}) \times S]$ pour $k < d-t$.

Ce n'est autre que la projection sur $(V_n/V_{n-d+k}) \times S = H/V_{n-d+k}$ de $P_k(f, \mathscr{D}) \cap H$ et c'est donc $\Delta_k(f_H, \mathscr{D}_H)$. Par ailleurs pour un choix convenable de $V_n \supset V_{n-d+k}$ c'est une section transverse de $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ qui est donc équimultiple le long de Y_k.

Pour $k = d-t$, $k < d$, $\Delta_{d-t}(f, V_{n-t}) \cap (V_n/V_{n-t}) \times S$ est réduite à Y_{d-t} d'après l'équimultiplicité de $\Delta_{d-t}(f, V_{n-t})$. On en déduit que $\mathrm{Adh}(P_{d-t}(f, V_{n-t}) \cap X^0 \cap H)$ est vide et donc que $P_{d-t}(f_H, \mathscr{D}_H)$ et $\Delta_{d-t}(f_H, \mathscr{D}_H)$ sont également vides. □

6. Un cas particulier : $f(Y) = 0$.

Dans tout ce paragraphe $f : (X, 0) \to (S, 0)$ sera un morphisme équidimensionnel à fibres de dimension pure d, sans éclatement en codimension zéro. Y sera un sous espace lisse de X, tel que $f(Y) = 0$.

Sous cette dernière hypothèse nous montrons que si la condition W_f est satisfaite par le couple (X^0, Y), alors les variétés polaires relatives de f sont équimultiples le long de Y, et les dirimants relatifs $\Delta_k(f)$ $(0 \leqq k \leqq d)$ sont équimultiples le long de Y_k $(0 \leqq k \leqq d)$.

6.1. THÉORÈME. — *Soit $f : (X, 0) \to (S, 0)$ un morphisme entre espaces analytiques réduits, à fibres de dimension pure d, sans éclatement en codimension zéro. Soit Y un sous-espace lisse de dimension t de la fibre $f^{-1}(0)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le couple (X^0, Y) vérifie la condition W_f aux points de Y.*

(ii) *Les variétés polaires générales* $P_k(f)$ $(0 \leqq k \leqq d)$ *sont équimultiples le long de* Y.

(iii) *Les dirimants relatifs* $\Delta_k(f)$ $(0 \leqq k \leqq d)$ *sont équimultiples le long des* $Y_k = \pi_k(Y)$.

(iv) *Le couple* $((\Delta_0(f))^0, Y_0)$ *projection hypersurface relative de* X *vérifie la condition* W_{f_0} *le long de* Y_0.

(v) *Si* $S \subset \mathbb{C}^p$, *il existe un ouvert de Zariski* Ω *de la grassmanienne Grass* $(p-s+1, p)$ *tel que pour tout élément h de* Ω, *le couple* $(f^{-1}(S \cap h)^0, Y)$ *vérifie la condition* W_{f_h} *aux points de* Y. (f_h *est induite par f de* $f^{-1}(S \cap h)$ *vers* $S \cap h$.)

6.2. *Remarques*

6.2.1. Le corollaire 5.5 qui précède montre que la condition (iii) implique les conditions (i) et (iv). (i) implique (v) (*voir* 1 *e*).

Le corollaire 5.4 montre, lui, à l'aide de la proposition 3.3 que (ii) implique (i) [(ii) est aussi équivalente à l'équidimensionalité de $\zeta_f^{-1}(Y) \to Y$ (3.3)];

6.2.2. Contrairement au cas où $\dim S \leqq 1$, la projection de noyau V_{n-d+k} n'est pas nécessairement transverse à $P_k(f, V_{n-d+k})$. Les multiplicités respectives de $P_k(f, V_{n-d+k})$ en 0 et de $\Delta_k(f, V_{n-d+k})$ en $\pi_k(0)$ ne sont donc pas toujours les mêmes. Cependant l'équimultiplicité des variétés polaires équivaut, si $Y \subset f^{-1}(0)$, à l'équimultiplicité des dirimants correspondants.

6.2.3. La condition W_f pour un couple de strates (X^0, Y) qui ne vérifie pas $Y \subset f^{-1}(0)$ n'implique pas l'équimultiplicité des variétés polaires relatives. Il suffit de remarquer que si Y est fini sur S, la condition W_f est alors vérifiée.

6.2.4. D'après 1.(*h*), lorsque $Y \subset f^{-1}(0)$, le couple (X^0, Y) satisfait W dès que la condition W_f est vérifiée. En particulier, X est alors équimultiple le long de Y.

6.3. *Démonstration* de (i) $\Rightarrow$ (ii)

Notons d'abord que lorsque $\dim S \leqq 1$ cette implication est prouvée par Navarro [N_2].

On supposera que S est $\mathbb{C}^s$, que f est ouvert, et qu'un plongement relatif de X dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^s$ est donné (*cf.* 1.2).

6.3.1. Hypothèse. — Soit f comme dans (6.1), vérifiant (i) et de plus :

$$s = \dim S = 1$$
$$\dim \tau_f^{-1}(0) = n-d.$$

Comme $\dim \tau_f^{-1}(0) = n-d$, les variétés polaires générales $P_k(f)$ pour $k>0$ sont vides. Il suffit donc de vérifier que $P_0(f) = X$ est équimultiple le long de Y, ce qui fait l'objet de 6.2.4.

6.3.2. Hypothèse. — Soit f comme dans (6.1), vérifiant (i) et de plus :

$$s = \dim S = 1.$$

Soit Z une composante de $\zeta_f^{-1}(Y)$ et Z_0 sa fibre au-dessus de 0. Z_0 est naturellement plongée dans $\check{\mathbb{P}}^n \times \mathbb{P}^{n+1-t}$.

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \xrightarrow{p=\gamma\circ\tilde{e}_Y} & \check{\mathbb{P}}^n \\ {\scriptstyle q=\delta\circ\tilde{\tau}_f}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^{n+1-t} & & \end{array}$$

D'après le lemme 2.2 $\dim p(Z_0) \geqq n-d$.

La démonstration se fait alors par récurrence sur l'entier

$$j = \dim \tau_f^{-1}(0)$$

— si $j=0$, on est dans l'hypothèse 6.3.1

— $j>0$. Considérons alors un cycle σ_{n-d+1} de codimension $n-d+1$ général dans $\check{\mathbb{P}}^n$, qui rencontre tous les $p(Z_0)$ en codimension $n-d+1$. $p^{-1}(\sigma_{n-d+1})$ évite donc les composantes Z dont la fibre Z_0 se projette dans $\check{\mathbb{P}}^n$ en dimension $n-d$.

Pour de telles composantes

$$\dim Z_0 \leqq \dim p(Z_0) + \dim q(Z_0) \leqq n-d+\dim \mathbb{P}(C_Y X)_0$$

Comme X est équimultiple le long de Y, la fibre $(C_Y X)_0$ du cône normal de Y dans X est de dimension $d+s-t$ et si $\dim p(Z_0) = n-d$ on a

$$\dim Z_0 \leqq n+s-1-t$$

ce qui montre que Z est équidimensionnelle au-dessus de Y.

Restent les composantes Z telles que $p(Z_0)$ est de dimension au moins $n-d+1$. Elles sont donc rencontrées par $X \times \sigma_{n-d+1} \times \mathbb{P}^{n+1-t}$. Or, pour σ_{n-d+1} général $(X \times \sigma_{n-d+1} \times \mathbb{P}^{n+1-t}) \cap E_Y C_f(X)$ est la transformée stricte de $\gamma^{-1}(\sigma_{n-d+1})$ par le morphisme $\tilde{e}_Y$. Rappelons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_Y C_f(X) & & \\ {\scriptstyle \tilde{e}_Y}\downarrow & & \\ C_f(X) & \xrightarrow{\gamma} & \check{\mathbb{P}}^n \\ {\scriptstyle \tau_f}\downarrow & & \\ X & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

De plus, pour σ_{n-d+1} général, $Z \to Y$ et $Z \cap (Y \times \sigma_{n-d+1} \times \mathbb{P}^{n+1-t}) \to Y$ seront équidimensionnels en même temps.

Mais d'après le lemme de transversalité 4.4.4 valable lorsque $\dim S=1$, il existe un morphisme fini de la transformée stricte $(X\times\sigma_{n-d+1}\times\mathbb{P}^{n+1-t})\cap E_Y C_f(X)$ vers l'espace $E_{Y_1}C_{f_1}(\Delta_1)$, induit par la projection : $P_1(f)\to\Delta_1(f)$.

Pour montrer que $Z\to Y$ est équidimensionnel, il suffit donc de montrer que $\zeta_{f_1}^{-1}(Y_1)\to Y_1$ est équidimensionnel. D'après l'hypothèse de récurrence, il suffit de prouver que $(\Delta_1(f)^0, Y_1)$ satisfait la condition W_{f_1}, ce qui est vrai, puisque

$$\delta(Y_1, T_{\pi_1(x)}\Delta_1(f)_{f(x)}=\delta(Y, T_xX_{f(x)}+V_{n-d+1})$$

et que, toujours d'après la transversalité de V_{n-d+1} à $P_1(f)$, il existe une constante positive C_1 telle que, au voisinage de 0 :

$$d(x, Y)\leqq C_1\, d(\pi_1(x), Y_1)$$

6.3.3. Hypothèse. — Cas général : f comme dans 6.1 vérifiant (i).

Nous allons montrer que $\zeta_f^{-1}(Y)\to Y$ est équidimensionnel, ce qui est équivalent à (ii) d'après (3.3).

Supposons le contraire, c'est-à-dire que : $\dim\zeta_f^{-1}(0)>n+s-1-t$, et choisissons un chemin analytique $h:(\mathbb{D}, 0)\to E_Y C_f(X)$ tel que :

— $h(0)$ soit un point général d'une composante K de $\zeta_f^{-1}(0)$ de dimension maximale

— $h(\mathbb{D}\setminus\{0\})$ soit contenu dans l'ouvert dense $\zeta_f^{-1}(X^0\setminus f^{-1}(0))$ de $E_Y C_f(X)$.

Le chemin analytique $f\circ\zeta_f\circ h:\mathbb{D}\to S$ n'est pas constant.

Appelons c son image dans S et f_c la restriction de f au-dessus de c. D'après $(1.g)$, le couple (X_c^0, Y) satisfait la condition W_{f_c}.

Le morphisme $\zeta_{f_c}: E_Y C_{f_c} X_c\to X_c$ est le transformé strict de ζ_f.

Par construction $\zeta_{f_c}^{-1}(0)$ rencontre K, et comme c est de codimension $s-1$ dans S, $\zeta_{f_c}^{-1}(0)\cap K$ est de dimension au moins égale à $n+s-t-(s-1)=n+1-t$ ce qui prouve que $\zeta_{f_c}^{-1}(Y)\to Y$ n'est pas équidimensionnel.

Or $f_c: X_c\to c$ vérifie l'hypothèse 6.3.2, ce qui contredit cette dernière assertion.

Il est d'autre part clair, après la proposition 4.4.6, que (v) $\Rightarrow$ (iii).

Enfin (iv) $\Rightarrow$ (iii), puisqu'on dispose de la transitivité des dirimants relatifs :

$$\Delta_k(f_0, V_{n-d+k}/V_{n-d})=\Delta_k(f, V_{n-d+k})$$

Ceci termine la preuve de l'équivalence des cinq propriétés (i) à (v). □

Notons que l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) est prouvée dans [S].

6.4. Corollaire. — *Soit f comme dans 6.1 et Y un sous-espace linéaire de dimension t de la fibre $f^{-1}(0)$. On suppose $t<d$.*

Il existe un ouvert de la variété $\check{\mathbb{P}}(\mathbb{C}^{n+1+p}/Y)$ des hyperplans contenant Y, tel que pour tout élément H de cet ouvert, le couple $((X\cap H)^0, Y)$ satisfait à la condition W_{f_H} le long de Y ($f_H: f^{-1}(X\cap H)\to S$ est induite par f sur $X\cap H$).

La vérification de 6.4 est immédiate au vu de 5.6. □

7. Quelques applications

7.1. EXISTENCE D'UNE TRÈS BONNE STRATIFICATION.

7.1.1. THÉORÈME. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme analytique entre espaces réduits. On suppose que X est équidimensionnel et que sur un ouvert de Zariski dense de X, les fibres de f sont de dimension pure d. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Le morphisme f admet une bonne stratification.*

(*b*) *Le morphisme f admet une très bonne stratification.*

(*c*) *Le morphisme f est sans éclatement en codimension* 0.

De plus, quand ces conditions sont réalisées, la stratification $\mathbb{C}$-analytique la moins fine de X telle que f soit de corang constant sur chaque strate et que les multiplicités $m_x(P_k(f, x))$ soient constantes sur chaque strate $(0 \leqq k \leqq d)$ est une très bonne stratification de f.

On appelle bonne (resp. très bonne) stratification de f une stratification $\mathbb{C}$-analytique de X, telle que sur chaque strate le morphisme f soit de corang constant, et que, pour toute strate X_i^0 dont l'adhérence est une composante irréductible X_i de X, et pour toute $X_\alpha \subset X_i$, le couple (X_i^0, X_α) vérifie la condition A_f de Thom (resp. W_f).

Démonstration. — L'équivalence de (*a*) et (*c*) est montrée dans [S_2] et est essentiellement due à Hironaka [H_2]. L'implication de (*b*) vers (*a*) résulte des définitions. Le fait que (*c*) implique (*b*) résulte du théorème 5.1, et l'assertion résulte du corollaire 5.5. □

Remarque. — On peut alors faire une démonstration identique à celle de [S_2] théorème 1, pour obtenir l'énoncé de [S_1] proposition 1.

7.2. RELATION AVEC LES CONDITIONS DE WHITNEY. — Étant données deux strates X_i^0 et Y comme ci-dessus, avec $Y \subset X_i$, et Y connexe, si le couple (X_i^0, Y) satisfait la condition W_f, alors pour tout $s \in f(Y)$, le couple (X_i^0, Y_s) satisfait la condition W (*voir* § 1, remarque *h*). On en déduit :

7.2.1. PROPOSITION. — *Si le morphisme f est propre, et si le couple $(X_i^0; Y)$ satisfait la condition W_f, il existe un sous-ensemble analytique fermé nulle part dense T de l'adhérence de $f(Y)$ tel que le couple $(X_i^0, Y \setminus f^{-1}(T))$ satisfait la condition* W.

Démonstration. — On sait qu'il existe un ouvert de Zariski dense Y^0 de l'adhérence de Y, contenu dans Y tel que le couple (X_i^0, Y^0) satisfait la condition W. Cet ensemble est caractérisé par le fait que les multiplicités des variétés polaires absolues $P_k(X, x)$ aux points de Y^0 sont constantes (*voir* [HM_2], [T_2]).

Mais d'autre part, ces multiplicités sont localement constantes le long des fibres de Y_s, pour $s \in f(Y)$. Par suite, si $x_0 \in Y^0$, la fibre $Y_{f(x_0)}$ est entièrement dans Y^0. Puisque le morphisme f est propre, on en déduit le résultat. □

Remarque. — Cette proposition permet de démontrer la proposition 2 de [S_1].

7.3. COMPORTEMENT DE LA MULTIPLICITÉ PAR CHANGEMENT DE BASE.

7.3.2. PROPOSITION. — *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme comme ci-dessus, et supposons qu'il est sans éclatement en codimension* 0. *Soit* $s_0 \in S$ *et* Y *une sous-variété de* $f^{-1}(s_0)$.

Il existe alors un fermé analytique strict Z *contenu dans* Y *tel que, pour tout germe de morphisme* $h : (T, t_0) \to (S, s_0)$, *où* T *est un germe irréductible, de partie lisse* T^0 *vérifiant :* $f^{-1}(h(T^0 \setminus \{t_0\})) \cap X^0$ *est dense dans* $f^{-1}(h(T))$, *le produit fibré* $X_T = X \underset{S}{\times} T$ *est équimultiple le long de* $Y \setminus Z$.

En effet, on peut choisir Z de sorte que le couple $(X, Y \setminus Z)$ satisfasse la propriété W_f. On applique alors la remarque (g) du paragraphe 1 et le théorème 6.1. Ainsi la condition de non-éclatement en codimension 0 empêche un phénomène d'éclatement associé à la multiplicité.

Cette condition impose une condition d'équimultiplicité « universelle » de X le long de $Y \setminus Z$.

BIBLIOGRAPHIE

[BS] J. BRIANÇON et J. P. SPEDER, *Thèse* (*Familles équisingulières d'hypersurfaces à singularités isolées*, Nice, 1976).

[HM] J. P. HENRY et M. MERLE, *Limites d'espaces tangents et transversalité de variétés polaires* (*Actes de la Conférence sur les singularités de la Rabida*, Springer, *Lecture Notes*, n° 961).

[HM] J. P. HENRY et M. MERLE, *Limites de Normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka* (*Proc. A.M.S. Summer Institute on singularities*, Arcata, 1981).

[H_1] H. HIRONAKA, *Normal Cones in Analytic Whitney Stratifications* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 36, P.U.F., 1970).

[H_2] H. HIRONAKA, *Stratifications and Flatness*, in *Real and Complex Singularities* (*Nordic Summer School*, Oslo, 1976; *Sijthoff and Noordhoff*, 1977).

[H_3] H. HIRONAKA, *Equivalences and Deformations of Isolated Singularities* (*Woodshole Seminar in Algebraic Geometry*, 1964).

[K_1] S. KLEIMAN, *On the Transversality of a General Translate*, *Compositio Math.*, 28, 1974, p. 287-297.

[K_2] S. KLEIMAN, *Towards a Numerical Theory of Ampleness*, (*Annals of Math.*, 84, 1966).

[L] D. T. LÊ, *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe* (*Ann. Inst. Fourier*, 23, 1973, p. 261-270).

[L_2] D. T. LÊ, *Limites d'espaces tangents sur les surfaces* (*Proc. Conf. Reinhartsbrunn, Nova Acta Leopoldina*, 1980).

[LS] D. T. LÊ et K. SAITO, *La constance du nombre de Milnor donne des bonnes stratifications* (*Note aux C.R.A.S.*, 277, 22 octobre 1973, p. 793-795).

[LT] D. T. LÊ et B. TEISSIER, *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières* (*Annals of Math.*, 114, 1981, p. 457-491).

[Li] J. LIPMAN, *Reduction, Blowing up and Multiplicities* (Preprint Purdue University 1980, à paraître dans *Proc. Conf. on Transcendantal Methods in Commutative Algebra*, George Mason, University 1979).

[N_1] V. NAVARRO, *Conditions de Whitney et sections planes* (*Inventiones Math.*, 61, n° 3, 1980, p. 199-226).

[N_2] V. NAVARRO, *Stratifications régulières et variétés polaires locales* (Manuscrit 1981).

[S] J. P. SPEDER, *Thèse*, partie A, Université de Nice, 1976.

[S_1] C. SABBAH, *Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents* (*Note aux C.R.A.S.*, 294, 4 janvier 1982, p. 39-41).

[S_2] C. SABBAH, *Idem Topologie et Analyse sur les espaces singuliers*, Luminy, 1981 (Astérisque n° 100-101).

[T_1] B. TEISSIER, *The Hunting of Invariants in the Geometry of the Discriminant*, in *Real and Complex Singularities, Nordic Summer School*, Oslo, 1976.

[T_2] B. TEISSIER, *Variétés polaires II* (*Actes de la Conférence de La Rabida*, Springer, *Lecture Notes*, n° 961).

[T_3] B. TEISSIER, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney* (*Singularités à Cargèse*, 1972; *Astérisque*, n° 7-8, 1973).

[V] J. L. VERDIER, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard* (*Inventiones Math.*, 36, 1976, p. 295-312).

(Manuscrit reçu le 24 septembre 1982,
révisé le 9 juin 1983.)

J. P. HENRY, M. MERLE et
C. SABBAH,
École Polytechnique,
Centre de Mathématiques,
Plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau Cedex.