ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

EDMOND COMBET

Paramétrix et invariants sur les variétés compactes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n° 3 (1970), p. 247-271

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_3_247_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 247 à 271.

PARAMÉTRIX ET INVARIANTS SUR LES VARIÉTÉS COMPACTES

PAR EDMOND COMBET.

On considère une variété riemannienne (M, g) de classe C^∞, un fibré vectoriel ξ basé sur M. On donne sur les sections de ξ une dérivation covariante L et un opérateur différentiel Δ qui, pour $f \in \mathcal{E}(M)$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\xi)$, vérifie l'identité

$$\Delta(f\varphi) = (\Delta f)\varphi - 2\,\mathrm{tr}\,(df \otimes L\varphi) + f\Delta\varphi,$$

où

$$\Delta f = -g^{ij}\nabla_i\partial_j f, \qquad \mathrm{tr}\,(df \otimes L\varphi) = g^{ij}\partial_i f L_j \varphi.$$

L'opérateur Δ est nécessairement d'ordre 2 ; il est elliptique si et seulement si la métrique g est de type elliptique.

Lorsque g est elliptique, une paramétrix de Δ est naturellement donnée par la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Cependant, en utilisant les propriétés géométriques de M, ξ, il est possible d'obtenir cette paramétrix de façon bien plus élémentaire et valable en tout type de métrique.

Pour cela, l'une des méthodes consiste à développer cette paramétrix suivant les puissances paires de la distance géodésique de (M, g). Ce procédé, classique dans le cas des fonctions sur un ouvert de R^n s'étend aisément à Δ moyennant l'usage du transport parallèle dans les connexions considérées.

Ceci est fait au paragraphe 1. Renvoyant à un article antérieur pour les métriques hyperboliques, nous nous bornons ici au cas des métriques elliptiques. Cette construction fait apparaître une suite de noyaux $(u_i)_{i\geq 0}$ de classe C^∞ sur $\xi \boxtimes \xi'$ (ξ' est l'adjoint géométrique de ξ).

Le problème naturel se pose alors de chercher les relations entre les noyaux u_i et les structures de M et ξ. Le but principal de ce travail est de donner quelques-unes de ces relations dans les cas importants où Δ est le laplacien sur les formes ou le laplacien spinoriel, la variété M étant supposée

compacte orientable sans bord. Les résultats suivants sont énoncés au paragraphe 2, le symbole Tr désignant l'extension aux sections de $\xi \boxtimes \xi'$ du crochet qui, à une section de ξ et à une section de ξ', associe naturellement une mesure régulière sur M :

1° La suite associée au laplacien sur les p-formes est notée $(u_i^p)_{i \geq 0}$;

(a) $$\operatorname{Tr} u_i^p = (-1)^{p(n-p)} \operatorname{Tr} u_i^{n-p};$$

(b) $$\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \int_M \operatorname{Tr} u_i^p = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq \frac{n}{2}, \quad n = \dim M, \\ \chi(M) & \text{pour } i = \frac{n}{2}, \quad n \text{ pair}, \end{cases}$$

$\chi(M)$, nombre d'Euler de M;

(c) Lorsque $\dim M = 4\nu$:

$$\frac{1}{16^\nu \pi^{2\nu}} \int_M \operatorname{Tr} \star_x u_i^{2\nu}(x, y)\,|_{y=x} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq 2\nu, \\ \operatorname{sgn}(M) & \text{pour } i = 2\nu, \end{cases}$$

$\star$ est l'opérateur de Hodge, sgn(M) la signature (ou index) de M;

2° M est de dimension 2ν, admet une structure spinorielle et $(u_i)_{i \geq 0}$ est la suite associée au laplacien spinoriel; alors

$$\frac{1}{4^\nu \pi^\nu} \int_M \operatorname{Tr} \beta_x u_i(x, y)\,|_{y=x} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq \nu, \\ \hat{A}(M) & \text{pour } i = \nu, \end{cases}$$

β étant l'opérateur de séparation des spineurs positifs et négatifs, $\hat{A}(M)$ étant le $\hat{A}$-genre de M.

Les démonstrations de ces formules sont données au paragraphe 3 (remarquer que (b) est contenue implicitement dans un article récent de Mc Kean-Singer [11]).

La méthode utilisée est celle de l'équation de la chaleur; ce procédé est suggéré par l'intervention des noyaux u_i dans les paramétrix de problème de Cauchy pour l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ et est inspiré de travaux de S. Minakshisundaram et Pleijel [13], M. Berger [2]. Les résultats énoncés au paragraphe 2 deviennent les conséquences aisées d'une expression intégrale des nombres de Lefschetz due à T. Kotake [7]; dans le contexte simple qui nous intéresse ici, nous n'utilisons qu'une forme très particulière de ce résultat de T. Kotake et nous en rappelons la démonstration au paragraphe 3.

La méthode de l'équation de la chaleur est encore utilisée au paragraphe 4 dans l'étude de certains noyaux rencontrés au paragraphe 3. Ceci permet, d'autre part, de préciser l'intervention des noyaux u_i dans le comportement

la dérivation covariante riemannienne canonique de (M, g) et on considère sur les sections de ξ une dérivation ovariante :

$$L : \quad \mathcal{E}(\xi) \to \mathcal{E}(T^*M \otimes \xi).$$

Dans les cas intéressants, ξ est associé à un fibré principal dont le groupe structural est un groupe de Lie G et L se déduit d'une connexion infinitésimale donnée sur ce fibré principal (*voir*, par exemple, Pham Mau Quan [14], chap. V).

Nous désignons par Δ tout opérateur différentiel : $\mathcal{E}(\xi) \to \mathcal{E}(\xi)$ qui, pour $f \in \mathcal{E}(M)$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\xi)$ vérifie l'identité suivante :

$$\Delta(f\varphi) = (\Delta f)\varphi - 2\,\mathrm{tr}(df \otimes L\varphi) + f\Delta\varphi, \tag{1.B.1}$$

où Δf est l'action sur f du laplacien usuel de (M, g) ($\Delta f = -\mathrm{tr}(\nabla\nabla f)$) et où le symbole tr désigne l'extension à $\mathcal{E}(T^*M \otimes T^*M \otimes \xi)$ de l'opération de trace par rapport à g dans $T^*M \otimes T^*M$.

La relation (1. B. 1) entraîne que Δ est nécessairement d'ordre 2; son symbole σ_Δ est alors donné pour $\alpha \in T^*_xM$ et $u \in \xi_x$ par l'égalité :

$$\sigma_\Delta(x, \alpha)\,u = \frac{(\sqrt{-1})^2}{2}\,\Delta(f^2\varphi)(x),$$

où $f \in \mathcal{E}(\xi)$ vérifie $f(x) = 0$, $df(x) = \alpha$ et où $\varphi(x) = u$. Ceci donne

$$\sigma_\Delta(x, \alpha)\,u = (g^{ij}(x)\,\alpha_i\alpha_j)\,u$$

et Δ est nécessairement elliptique [puisque (M, g) est supposée de type elliptique].

Exemple 1. — Δ est le laplacien de De Rham-Lichnérowicz sur les champs de tenseurs.

Exemple 2. — M admet une structure spinorielle et Δ est le laplacien spinoriel de Lichnérowicz.

Exemple 3. — A partir des données de Δ et de L on considère la dérivation

$$\nabla \otimes L : \quad \mathcal{E}(T^*M \otimes \xi) \to \mathcal{E}(T^*M \otimes T^*M \otimes \xi)$$

définie par

$$(\nabla \otimes L)(\alpha \otimes \varphi) = (\nabla\alpha) \otimes \varphi + \alpha \otimes L\varphi,$$

puis on pose :

$$\Delta = -\mathrm{tr}((\nabla \otimes L) \circ L)$$

ou, plus généralement,

$$\Delta = -\mathrm{tr}((\nabla \otimes L) \circ L) + C,$$

où l'on donne $C \in \mathcal{E}(\mathrm{End}\,\xi)$.

de la fonction ζ associée à Δ. Pour les formes, on obtient en particulier les résultats suivants :

$$\text{résidu}\left(\zeta; \frac{n}{2} - i\right) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n \Gamma\left(\frac{n}{2} - i\right)} \int_M \mathrm{Tr}\, u_i^p,$$

$$\zeta(0) = \begin{cases} -b_p & \text{pour } n \text{ impair,} \\ -b_p + (2\sqrt{\pi})^{-n} \int_M \mathrm{Tr}\, u_{\frac{n}{2}}^p & \text{pour } n \text{ pair,} \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$n = \dim M,$$

$$b_p = p^{\text{ième}} \text{ nombre de Betti de M,}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \quad \text{pour } n \text{ pair}, \qquad i = 1, 2, \ldots \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

1. Construction géométrique des paramétrix. — Dans ce paragraphe, (M, g) est une variété riemannienne de type elliptique, de classe C^∞, de dimension n; ξ est un fibré vectoriel complexe de rang fini basé sur M.

A. *Noyaux.* — On désigne par Ω le fibré volume de M; c'est le fibré vectoriel de rang 1 associé au fibré des repères sur M par la représentation qui fait correspondre l'homothétie $r \to \left|\det a^{-1}\right| r$ sur R à tout élément $a \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{R})$. Les mesures régulières sur M s'identifient aux sections C^∞ de Ω.

On introduit le fibré ξ^* dual de ξ et le fibré $\xi' = \xi^* \otimes \Omega$ adjoint géométrique de ξ. Par l'isomorphisme $\xi' \simeq \mathrm{Hom}(\xi, \Omega)$, la donnée de deux sections φ de ξ et ψ de ξ' détermine une section :

$$x \in M \to \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle_x \in \Omega_x.$$

Lorsque φ et ψ sont C^∞ cette section est une mesure régulière sur M; si, de plus, l'intersection des supports de φ et ψ est un compact de M, cette mesure peut être intégrée sur M et détermine le crochet :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle_x. \tag{1.A.1}$$

Les espaces $\mathcal{E}(\xi)$, $\mathcal{D}(\xi)$ ont leur sens et leurs topologies usuelles. Le dual vectoriel topologique de $\mathcal{D}(\xi')$ [resp. $\mathcal{D}(\xi)$] est noté $\mathcal{D}'(\xi)$ [resp. $\mathcal{D}'(\xi')$]; c'est l'espace des sections distributions de ξ [resp. de ξ') et, par (1.A.1), on a les inclusions :

$$\mathcal{D}(\xi) \subset \mathcal{E}(\xi) \subset \mathcal{D}'(\xi) \subset \mathcal{E}'(\xi),$$

avec des inclusions analogues pour ξ'.

B. *Opérateurs différentiels* Δ. — On note

$$\nabla : \quad \mathcal{E}(T^*M) \to \mathcal{E}(T^*M \otimes T^*M)$$

C. *Paramétrix* de Δ. — On désigne par $\xi \boxtimes \xi'$ le produit tensoriel externe des fibrés ξ, ξ'; ce fibré est basé sur $M \times M$ et l'on a : $(\xi \boxtimes \xi')_{(x,y)} = \xi_x \otimes \xi'_y$.

Une paramétrix P pour Δ est un noyau très régulier, élément de $\mathcal{D}'(\xi \boxtimes \xi' \mid V)$, où V est un voisinage de la diagonale de $M \times M$ pour lequel il existe un entier $k \geq 0$, un élément $Q \in C^k(\xi \boxtimes \xi' \mid V)$ tel que

$$\Delta_x P(x, y) = \delta(x, y) + Q(x, y),$$

$\delta \in \mathcal{D}'(\xi \boxtimes \xi')$ étant le noyau associé à l'identité sur $\mathcal{D}(\xi)$.

Comme nous l'avons dit, une telle paramétrix P, avec un complément Q de classe C^∞ est donnée par la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Cependant, en utilisant les propriétés géométriques de M et ξ il est possible d'obtenir P de façon bien plus élémentaire.

L'une des méthodes consiste à développer P suivant les puissances de la distance géodésique dans (M, g) et à déterminer convenablement les coefficients de ces puissances. Ce procédé est classique dans le cas des fonctions sur un ouvert de R^n où l'on donne une métrique de type arbitraire; *voir*, par exemple, J. Hadamard (*Lectures on Cauchy's problem*) et peut être aisément étendu aux opérateurs plus généraux; *voir*, par exemple, E. Combet [3]. Cette généralisation utilise de façon essentielle la notion de transport parallèle dans les connexions considérées.

E. *Transport parallèle.* — Dans le produit $M \times M$ on considère un voisinage V de la diagonale, normal pour la structure riemannienne de (M, g). Pour tout couple $(x, y) \in V$ il existe une géodésique unique, que nous noterons $\overline{xy}$ qui joint x et y et x appartient au domaine d'un système de coordonnées normales relatif à un repère orthonormé de l'espace tangent T_yM. On peut de plus supposer que ξ est trivial sur ces cartes.

La donnée de la dérivation covariante L dans le fibré ξ définit la notion de transport parallèle le long de la géodésique $\overline{xy}$; à chaque élément $u_0 \in \xi_y$, ce transport fait correspondre un élément $u_z \in \xi_z$, $z \in \overline{xy}$, tel que

$$u_y = u_0,$$

$L_{X_z} u_z = 0$, X_z tangent en z à $\overline{xy}$.

On obtient ainsi un isomorphisme : $\xi_y \simeq \xi_x$, pour $(x, y) \in V$ et par suite une section locale θ de $\xi \boxtimes \xi^*$ au-dessus de V. Les propriétés locales de θ s'obtiennent de la façon suivante : on peut trouver n fonctions X^i, de classe C^∞ sur V telles que les nombres

$$x^i(x, y) = X^i(x, y)\, r(x, y)$$

soient les coordonnées de x dans un système de coordonnées normales pour un repère orthonormé de T_yM, ce qui suppose que $\sum_{i=1}^{n}(X^i)^2 = 1$.

En fixant y et en posant

$$u_x = (u^1(x), \ldots, u^k(x)) \qquad (k = \text{rang de } \xi)$$

on obtient le système d'équations différentielles :

$$\sum_{i=1}^{n} X^i(x, y)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,u^\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{k} X^i(x, y)\,A^\alpha_{i\beta}(x)\,u^\beta(x),$$

où les $A^\alpha_{i\beta}$ sont des fonctions C^∞. Ce système se ramène à

$$\frac{d}{dr}\,u^\alpha(r) = \sum_{i,\beta} X^i(x, y)\,A^\alpha_{i\beta}(x)\,u^\beta(r)$$

et θ est la résolvante de cette équation. En remarquant enfin que, pour $r \neq 0$, $d_x r^2(x, y)$ est la forme qui correspond à un vecteur tangent en x à la géodésique $\overline{xy}$ dans l'isomorphisme $T_xM \simeq T_x^*M$ défini par g_x, les propriétés de θ peuvent se résumer de la façon suivante :

LEMME 1.E. — *θ est de classe C^∞ sur V, θ coïncide avec l'identité sur la diagonale de $M \times M$ et*

$$r\,\frac{Lx}{dr}\,\theta(x, y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_x\,(d_x r^2(x, y) \otimes L_x\theta(x, y)) = 0.$$

F. *Construction des paramétrix.* — On introduit sur V la fonction

$$\rho(x, y) = (\det g_{ij}(x))^{-\frac{1}{4}},$$

où les composantes g_{ij} du tenseur métrique g sont écrites dans un système de coordonnées normales pour un repère orthonormé en y.

On considère ensuite le noyau :

$$u_0(x, y) = \rho(x, y)\,\theta(x, y)\,\varphi(y),$$

où φ est la mesure rienannienne canonique de (M, g) et où les noyaux u_i, $i \geq 1$, sont déterminés par récurrence à l'aide des équations

$$(1.F.1) \qquad u_i(x, y)\left(i - \frac{r(x, y)}{\rho(x, y)}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\rho(x, y)\right) + r(x, y)\,\frac{L(x)}{dr}\,u_i(x, y) + \Delta(x)\,u_{i-1}(x, y) = 0$$

écrites dans le système des coordonnées polaires géodésiques pour un repère orthonormé de T_yM.

Ces noyaux u_i sont de classe C^∞ sur V et permettent de construire une paramétrix de Δ.

THÉORÈME 1. — (*a*) *Pour n impair* > 2, *le noyau*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}}} r^{2-n}\left(u_0+\sum_{i=1}^{N}\frac{r^{2i}}{4^i\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-3\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-1-i\right)}u_i\right)$$

est, pour tout entier $N > \frac{n-2}{2}$ *une paramétrix de* Δ *avec un complément* Q *de classe supérieure ou égale à* $N - \frac{n-1}{2}$.

(*b*) *Pour n pair* > 2, *le noyau*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\left\{ r^{2-n}\left[u_0+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2}\frac{r^{2i}}{4^i\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-3\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-1-i\right)}u_i\right] - \frac{\operatorname{Log} r^2}{4^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n}{2}-2\right)!}\left[u_{\frac{n}{2}-2}+\frac{r^2}{4}u_{\frac{n}{2}}\right]\right\}$$

est une paramétrix de Δ *avec un complément* Q *de classe* C^∞.

Pour la preuve détaillée de ce théorème, nous renvoyons à E. Combet [3], § V.2), où des résultats analogues sont obtenus en métrique de type quelconque. La méthode utilisée est celle des fonctions holomorphes $\lambda \to r^{2\lambda+2}$ à valeurs noyaux, le noyau r^{2-n} étant la valeur prolongée de cette fonction au point $\lambda = -\frac{n}{2}$, le noyau $\operatorname{Log} r^2$ étant défini par la valeur de $\frac{\partial}{\partial\mu} r^{2\mu}$ pour $\mu = 0$.

Pour la suite, le théorème suivant est fondamental :

THÉORÈME 2. — *Le noyau*

$$P(t, x, y) = (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{r^2(x, y)}{4t}\right)\left(\sum_{i=0}^{N} t^i u_i(x, y)\right)$$

est, pour $N > \frac{n}{2}$ *une paramétrix pour l'opérateur de la chaleur* $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$.

Cela signifie que :

(*a*) P est de classe C^∞ pour $t > 0$ et sur un voisinage normal V de la diagonale de $M \times M$;

(*b*) $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)\mathrm{P}(t,x,y)$ s'étend en une fonction de classe positive $\left(\text{en fait} \geqq \mathrm{N}-\frac{n}{2}\right)$ sur $[0,+\infty[\times\mathrm{V}$;

(*c*) $\tilde{\mathrm{P}}$ étant une extension C^∞ de P sur $]0,+\infty\times\mathrm{M}\times\mathrm{M}$, pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(\xi)$ on a

$$\varphi=\lim_{t\to 0+}\langle\tilde{\mathrm{P}}(t,\,.\,,y),\varphi(y)\rangle,$$

où la limite tient dans $\mathcal{E}(\xi)$.

La propriété (*b*) s'obtient, par un calcul sans difficulté, mais assez long où interviennent les hypothèses faites sur Δ :

$$\Delta(f\varphi)=(\Delta f)\varphi-2\,\mathrm{tr}(df\otimes\mathrm{L}\varphi)+f\Delta\varphi,$$

ainsi que les égalités :

$$r\frac{\mathrm{L}(x)}{dr}\theta(x,y)=0\quad(\text{lemme }1.\mathrm{E}),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\rho=-\frac{1}{2}(\det g_{ij})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left((\det g_{ij})^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\Delta_x r^2(x,y)=-2n+\frac{4r}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\rho$$

et les égalités (1.F.1) qui définissent les noyaux u_i.

Pour démontrer (*c*) on peut supposer que le support de φ est un compact contenu dans le domaine d'une carte de M qui trivialise ξ, puis on applique les propriétés classiques du noyau de Gauss

$$(2\sqrt{\pi})^{-n}t^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

de R^n.

Pour le laplacien usuel sur les fonctions, *voir* par exemple S. Minakshisundaram et A. Pleijel [13].

2. Noyaux u_i et invariants de la variété M. — Nous donnons ici quelques relations entre les noyaux u_i et les invariants de M lorsque M est orientable compacte pour les laplaciens sur les formes et les spineurs. Les résultats obtenus seront prouvés au paragraphe 3.

A. *Traces.* — On reprend les notations du paragraphe 1; soit $\varphi\in\mathcal{E}(\xi)$, $\psi\in\mathcal{E}(\xi')$; nous avons défini au paragraphe 1.A la section :

$$x\to\langle\varphi(x),\psi(x)\rangle_x$$

de fibré volume Ω. Cette opération s'étend aux sections locales s de $\xi\boxtimes\xi'$ définies au voisinage de la diagonale de $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$. Nous la noterons $\mathrm{Tr}s(x)$.

Nous avons donc

$$\mathrm{Tr}\,(\varphi\otimes\psi)\,(x)=\langle\varphi(x),\,\psi(x)\rangle_x.$$

Lorsque s est C^∞ à support compact, la mesure $\mathrm{Tr}\,s$ peut être intégrée sur M et ceci donne

$$\int_M \mathrm{Tr}\,s=\langle\delta,\,s\rangle.$$

B. *Le laplacien sur les formes.* — Pour chaque entier $p=0,\,1,\,\ldots,$ $n=\dim(M)$, on désigne par Λ^pM le fibré des formes alternées complexes de degré p sur M.

Les résultats du paragraphe 1 peuvent être appliqués au laplacien Δ^p de De Rham [15] sur les p-formes. Ceci donne pour chaque p une suite $(u_i^p)_{i\geq 0}$ de formes doubles associées aux problèmes de paramétrix pour Δ^p.

Pour $p=0$, $i=0,\,1,\,2$ les fonctions u_i^0 ont été utilisées par M. Berger [2] dans son étude des relations entre le spectre de la courbure d'une variété riemannienne. Nous donnons ici d'autres relations vérifiées par ces formes u_i^p, $p\geq 0$.

Notons que la formule du théorème 4 (a) ci-dessous est contenue implicitement dans l'article de Mac Kean-Singer ([11], § 6, form. (1)) et que la considération de la paramétrix P remonte à M. P. Gaffney [6] pour les formes.

THÉORÈME 3. — *Si* M *est compacte orientable, alors*

$$\mathrm{Tr}\,u_i^p=(-1)^{p(n-p)}\,\mathrm{Tr}\,u_i^{n-p}$$

pour $p=0,\,1,\,\ldots,\,n$ *et pour chaque* i.

THÉORÈME 4. — *On suppose que* M *est compacte orientable. Alors :*

(a) *On a l'égalité :*

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\int_M \mathrm{Tr}\,u_i^p=\begin{cases}0 & \text{pour } i\neq\dfrac{n}{2},\\ \chi(M) & \text{pour } i=\dfrac{n}{2},\quad n \text{ pair},\end{cases}$$

$\chi(M)$ *étant le nombre d'Euler de la variété* M.

(b) *Si* M *est de dimension* 4ν, ν *entier* >1 :

$$\int_M \mathrm{Tr}\,(\star_x u_{2\nu}^{2\nu}(x,\,y))_{y=x}=1\,6^\nu\pi^{2\nu}\,\mathrm{sgn}\,(M),$$

où $\star$ *est l'opérateur de Hodge sur les formes et* $\mathrm{sgn}(M)$ *la signature de Hirzebruch de la variété* M. *Pour* $i\neq 2\nu$ *l'intégrale ci-dessus est nulle.*

Ces théorèmes seront prouvés au paragraphe 3 par la méthode de l'équation de la chaleur. Notons que les résultats du théorème 4 posent le problème de l'expression des fonctions $\mathrm{Tr}u_i^p$ en fonction des formes de courbure. Rappelons que bous avons, dans un système de coordonnées normales pour un repère orthonormé en y :

$$u_0^p(x, y) = \rho(x, y)\,\theta(x, y)\,\varphi(y),$$

$$u_i^p(x, y)\left(i - \frac{1}{\rho(x, y)}\sum_\sigma x^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\rho(x, y)\right) + \sum_\sigma x^\sigma \nabla_\sigma(x)\, u_i^p(x, y) + \Delta^p(x)\, u_{i-1}^p(x, y) = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$u_i^p(y, y) = -\frac{1}{i}\Delta^p(x)\, u_{i-1}^p(x, y)_{x=y}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Tr}u_0^p = (\dim \Lambda^p \mathrm{M})\,\varphi = \binom{n}{p}\varphi.$$

Le calcul de u_1^p nécessite les développements à l'ordre 2 de g_{ij} et de θ autour du point y. On trouve par exemple, en désignant par τ la courbure scalaire de M :

$$u_1^0(x, x) = \frac{1}{6}\tau(x)\,\varphi(x) \qquad \text{(M. Berger [2])},$$

$$\mathrm{Tr}u_1^1(x) = \frac{n-6}{6}\tau(x)\,\varphi(x), \quad \text{(M. Berger)}$$

et un calcul analogue donne

$$\int_\mathrm{M}(\mathrm{Tr}u_1^2) = \left(\frac{n(n-1)}{12} - n + 2\right)\int_\mathrm{M}\tau.\varphi.$$

Pour $n = 2$, en appliquant la formule (a) du théorème 4 on retrouve ainsi la formule de Gauss-Bonnet :

$$\chi(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi}\int_\mathrm{M}\tau.\varphi.$$

Les développements limités de g_{ij} et de θ autour du point y ont pour coefficients des polynômes des dérivées covariantes du tenseur de courbure. Il en découle que les fonctions $\mathrm{Tr}u_i^p$ ont des développements du même type. Cette remarque, due à Mc Kean-Singer ([11], § 7) a été exploitée par ces auteurs pour calculer les fonctions $u_i^0(x, x)$ pour $i = 1, 2$. Cette méthode nécessite la connaissance de ces coefficients pour des variétés de référence (sphères, espace hyperboliques), ceci a été fait par Mc Kean-Singer pour les fonctions $(p = 0)$ mais ne semble pas être connu pour les formes $(p \geqq 1)$.

C. *La laplacien spinoriel.* — On suppose que M est orientée de dimension paire $n = 2\nu$ et on désigne par $\mathcal{R}(M)$ le fibré des repères orthonormés orientés de M, de groupe structural SO (n). On admet que l'on peut déduire par extension de $\mathcal{R}(M)$ un fibré principal $\mathcal{S}(M)$ dont le groupe structural est le revêtement universel Spin(n) de SO(n).

En choisissant la représentation spinorielle complexe (de dimension 2^ν) de Spin(n) on obtient alors un fibré vectoriel ξ basé sur M par association avec $\mathcal{S}(M)$; ξ est le fibré des spineurs sur M.

La connexion riemannienne canonique de (M, g) induit sur $\mathcal{S}(M)$ une connexion infinitésimale qui, par association, donne une connexion linéaire ∇ sur ξ (A. Lichnérowicz [9]). Le laplacien spinoriel sur ξ est alors l'opérateur différentiel :

$$\Delta = -\nabla^i\nabla_i + \frac{1}{4}\tau,$$

où τ est la courbure riemannienne scalaire de (M, g).

Désignons maintenant par β l'opérateur de séparation des spineurs positifs et négatifs de ξ, par u_ν le spineur double de rang ν associé aux paramétrix de Δ et par $\hat{A}(M)$ le $\hat{A}$-genre de Hirzebruch de la variété M. Il vient :

THÉORÈME 5 :

$$(2\sqrt{\pi})^n \hat{A}(M) = \int_M \mathrm{Tr}\,(B_x u_\nu(x, y))_{x=y}.$$

Ce théorème sera prouvé au paragraphe 3.

3. MÉTHODE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR (M COMPACTE).

A. *Noyau de diffusion.* — Nous avons vu au paragraphe 1.B que le symbole de Δ s'écrit

$$\sigma_\Delta(x, \alpha)\, u = (g^{ij}(x)\,\alpha_i\alpha_j)\, u$$

pour $\alpha \in T^*_x M$ et $u \in \xi_x$.

Avec ces hypothèses et en supposant *la variété* M *compacte*, une bonne théorie de l'équation de la chaleur existe pour l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$. On en trouvera l'étude locale dans S. D. Eidelman [4] et l'étude globale sur une variété compacte dans T. Kotake ([7], § 7). Ceci assure notamment l'existence de l'unicité d'un noyau élémentaire $E(t, x, y)$ pour le problème de Cauchy relatif à l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$. En posant $R^+ = \{r \in R;\ r > 0\}$, ce noyau appartient à $\mathcal{E}(R^+)\hat{\otimes}\mathcal{D}(\xi \boxtimes \xi')$; il vérifie l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) E(t, x, y) = 0$$

et la condition

$$\varphi = \lim_{t \to 0+} \langle \mathrm{E}(t, \cdot, y), \varphi(y) \rangle$$

dans $\mathcal{D}(\xi)$.

Ainsi dans chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\xi)$, la fonction

$$\psi(t, x) = \langle \mathrm{E}(t, x, y), \varphi(y) \rangle$$

est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)\psi = 0, \\ \psi(0, \cdot) = \varphi. \end{cases}$$

Nous dirons que E est le *noyau de diffusion* pour Δ.

La construction du noyau E s'obtient en partant de la paramétrix P du théorème 2 (§ 2.F) étendue de façpn C^∞ sur $\mathrm{R}^+ \times \mathrm{M} \times \mathrm{M}$, ce qui donne un noyau $\tilde{\mathrm{P}} \in \mathcal{E}(\mathrm{R}^+) \hat{\otimes} \mathcal{D}(\xi \boxtimes \xi')$. On procède ensuite de la façon suivante (S. D. Eidelman [4], § 2) :

On pose

$$\mathrm{E}(t, x, y) = \tilde{\mathrm{P}}(t, x, y) + \mathrm{W}(t, x, y),$$

avec

$$\mathrm{W}(t, x, y) = \int_0^t du \int_{\mathrm{M}} \langle \tilde{\mathrm{P}}(t - u, x, z), \mathrm{R}(u, z, y) \rangle_z,$$

où R est à déterminer de façon que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) \mathrm{E}(t, x, y) = 0.$$

Ceci conduit à

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) \tilde{\mathrm{P}}(t, x, y) + \mathrm{R}(t, x, y) + \int_0^t du \int_{\mathrm{M}} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) \tilde{\mathrm{P}}(t - u, x, z), \mathrm{R}(u, z, y) \right\rangle_z = 0,$$

soit, en posant

$$\mathrm{K}(t, x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) \tilde{\mathrm{P}}(t, x, y),$$

la relation

$$\mathrm{R}(t, x, y) = \mathrm{K}(t, x, y) + \int_0^t du \int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{K}(t - u, x, z), \mathrm{R}(u, z, y) \rangle_z.$$

Cette équation de Volterra est alors résolue par la méthode usuelle des approximations successives en posant

$$\mathrm{R}_0(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{R}_m(t, x, y),$$

avec

$$\mathrm{R}_0(t, x, y) = \mathrm{K}(t, x, y),$$

$$\mathrm{R}_m(t, x, y) = \int_0^t du \int_{\mathrm{M}} \langle \mathrm{K}(t-u, x, z), \mathrm{R}_{m-1}(t, z, y) \rangle_z.$$

Rappelons que

$$\mathrm{P}(t, x, y) = (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}} \left(\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} t^i u_i(x, y) \right),$$

d'où l'on déduit aisément

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x \right) \mathrm{P}(t, x, y) = (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{\mathrm{N}-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4t}} \Delta_x u_{\mathrm{N}}(x, y).$$

De cette expression et de l'égalité

$$\mathrm{TrE}(t, x, x) = \mathrm{TrP}((t, x, x) + \mathrm{TrW}(t, x, x),$$

il découle alors

LEMME 3.A. — *Pour* $t > 0$, $x \in \mathrm{M}$ *et tout entier* $\mathrm{N} > \frac{n}{2}$:

$$\mathrm{TrE}(t, x, x) = (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} t^i \mathrm{Tr} u_i(x) \right) + \alpha_{\mathrm{N}}(t, x),$$

où

$$\| \alpha_{\mathrm{N}}(t, x) \|_{\mathrm{C}^0(\xi)} \leq \mathrm{Cte}\, t^{\mathrm{N}-\frac{n}{2}+1}.$$

De ceci on déduit notamment le développement asymptotique :

$$\mathrm{TrE}(t, x, x) \underset{t \to 0+}{\sim} (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i \mathrm{Tr} u_i(x) \right) \tag{3.A.1}$$

dans $\mathrm{C}^0(\xi)$.

B. *Preuve du théorème* 3 (§ 2.B). — On suppose que M est compacte orientable et on note $(u_i'')_{i \geq 0}$ la suite des formes doubles associées aux laplaciens Δ^p. Chaque fibré $\Lambda^p \mathrm{M}$ est naturellement muni d'une structure hermitienne (u/u') qui détermine un isomorphisme antilinéaire A : $\Lambda^p \mathrm{M} \to (\Lambda^p \mathrm{M})'$ caractérisé par

$$\langle \mathrm{A}u, u' \rangle_x = (u' \mid u)_x \varphi(x)$$

pour u, $u' \in \Lambda^p{}_x M$. Soient φ et ψ deux sections de $\Lambda^p M$; pour chaque $x \in M$ on pose

$$\mathrm{tr}_g(\varphi \otimes \psi)(x) = (\varphi(x) \mid \psi(x)).$$

Cette opération s'étend aux sections s du produit $\xi \boxtimes \xi$ définies au voisinage de la diagonale de $M \times M$; on note encore $\mathrm{tr}_g s(x)$ et on a

$$\mathrm{tr}_g s(x)\, \varphi(x) = \mathrm{Tr}(A_y s(x, y) \mid_{y=x}),$$

où Tr a été définie au paragraphe 2.A.

Désignons maintenant par E^p le noyau de diffusion associé à Δ^p et posons

$$F^p(t, x, y) = A_y^{-1} E^p(t, x, y).$$

Soit $\star$ l'opérateur de Hodge sur les formes; on sait que

$$\star \Delta^p = \Delta^{n-p} \star,$$
$$(\star)^2 = (-1)^{p(n-p)},$$

d'où il découle

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta^{n-p}(x)\right)(\star_x \star_y F^p(t, x, y)) = 0.$$

De plus, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\Lambda^p M)$, la forme

$$\int_M (\star_x \star_y F^p(t, ., y) \mid \overline{\varphi}(y))_y \varphi(y) = \star_x \int_M (F^p(t, ., y) \mid \star_y \overline{\varphi}(y))_y \varphi(y)$$

tend vers

$$(\star)^2 \varphi = (-1)^{p(n-p)} \varphi.$$

Par le théorème d'unicité du problème de Cauchy, ceci prouve que

$$\star_x \star_y F^p(t, x, y) = (-1)^{p(n-p)} F^{n-p}(t, x, y),$$

d'où

$$\mathrm{tr}_g F^p(t, x, x) = (-1)^{p(n-p)} \mathrm{tr}_g F^{n-p}(t, x, x),$$

ce qui, compte tenu de la formule (3.A.1) entraîne

$$\mathrm{Tr}\, u_i^p = (-1)^{p(n-p)} \mathrm{Tr}\, u_i^{n-p}.$$

C. *Une formule de* T. *Kotake.* — Considérons deux fibrés vectoriels hermitiens ξ^+, ξ^- basés sur M et un opérateur différentiel elliptique D : $(\xi^+) \to (\xi^-)$ dont on note D^* l'adjoint pour ces structures hermitiennes. Chacun des opérateurs :

$$\Delta^+ = D^*D, \qquad \Delta^- = DD^*$$

est elliptique, autoadjoint, positif pour les structures préhilbertiennes naturellement associées à ces données sur $\mathcal{D}(\xi^+)$ et $\mathcal{D}(\xi^-)$.

Désignons par $\sigma(.)$ le symbole d'un opérateur différentiel (au sens de T. Kotake, [7], § 1). Alors $\sigma_x(\Delta^{\pm}).e$ est pour tout élément non nul e de T_xM, un opérateur autoadjoint strictement positif sur $\xi^{\pm}_x$. Ainsi l'équation de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta^{\pm}$ a les propriétés énoncées au paragraphe 3.A. Désignons par $E^{\pm}$ les noyaux de diffusion associés à ces opérateurs et notons ind(D) l'indice analytique de D.

Dans notre contexe, la formule (46) de T. Kotake ([7], § 6) s'écrit :

$$\mathrm{ind}\,(D)=\int_M \mathrm{Tr}E^+(t,x,x)-\int_M \mathrm{Tr}E^-(t,x,x).$$

Dans le cas simple qui nous intéresse ici, la démonstration de cette formule s'établit de la façon suivante :

Désignons par $E^{\pm}_t$ les noyaux $E^{\pm}(t,.,.)$, notons $H^{\pm}$ les noyaux associés aux projections orthogonales sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\Delta^{\pm})$ de $\mathcal{D}(\xi^{\pm})$ et $G^{\pm}$ les noyaux de Green des opérateurs $\Delta^{\pm}$.

En notant $I^{\pm}$ les opérateurs identité sur $\mathcal{D}(\xi^{\pm})$ il vient (*voir* § 4.B) :

$$I^{\pm}=H^{\pm}+\Delta^{\pm}G^{\pm}.$$

On a, d'autre part, les égalités

$$D\Delta^+=\Delta^-D,\qquad \Delta^{\pm}H^{\pm}=0,$$

d'où, par le théorème d'unicité du problème de Cauchy,

$$DE^+_t=E^-_tD,\qquad E^{\pm}_tH^{\pm}=H^{\pm}.$$

Ainsi, en posant

$$S_t=E^+_tD^*G^-,$$

on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
E^+_t&=E^+_t(H^++\Delta^+G^+)\\
&=H^++E^+_tD^*DG^+\\
&=H^+_t+E^+_tD^*G^-D\qquad(\text{car } DG^+=G^-D)\\
&=H^++S_tD,\\
E^-_t&=E^-_t(H^-+\Delta^-G^-)\\
&=H^-+E^-_tDD^*G^-\\
&=H^-+DE^+_tD^*G^-\\
&=H^-+DS_t.
\end{aligned}$$

Comme au paragraphe 3.B, la donnée de la structure hermitienne h sur ξ^+ et de la mesure riemannienne canonique φ sur M détermine un isomorphisme antilinéaire A : $\xi^+\simeq(\xi^+)'$ caractérisé par

$$\langle Au,u'\rangle_x=h_x(u',u)\,\varphi(x).$$

Ainsi, pour une section s de $\xi^+ \boxtimes (\xi^+)'$ et en posant $\tilde{s}(x, y) = A_y^{-1} s(x, y)$,

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{Tr}\,(s(x, y)\, D_y)\,|_{y=x} &= \int_M \mathrm{tr}_h D_y^* \tilde{s}(x, y)\,|_{y=x}\, \varphi(x) \\ &= \int_M \mathrm{tr}_h D_x \tilde{s}(x, y)\,|_{y=x}\, \varphi(x) \\ &= \int_M \mathrm{Tr} D_x s(x, y)\,|_{y=x}.\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{Tr} E_t^+ - \int_M \mathrm{Tr}_t^- &= \int_M \mathrm{Tr} H^+ - \int_M \mathrm{Tr} H^- \\ &= \dim \mathrm{Ker}\,\Delta^+ - \dim \mathrm{Ker}\,\Delta^- \\ &= \dim \mathrm{Ker}\, D - \dim \mathrm{Ker}\, D^* \\ &= \mathrm{ind}\,(D).\end{aligned}$$

Remarque. — Nous verrons au paragraphe 4. D que les noyaux $H^\pm$ et S_t sont C^∞.

De la formule de T. Kotake et du développement asymptotique (3.A.1) il découle immédiatement :

LEMME 3.B. — *Supposons que les opérateurs $\Delta^\pm$ remplissent les conditions ci-dessus et celles du théorème* 2 (§ 1.F). *Alors :*

$$(2\sqrt{\pi})^{-n}\left(\int_M (\mathrm{Tr}\, u_t^+ - \mathrm{Tr}\, u_t^-)\right) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq \dfrac{n}{2}, \\ \mathrm{ind}\,(D) & \text{pour } i = \dfrac{n}{2}, \quad n \text{ pair.}\end{cases}$$

D. *Preuve du théorème* 4 (*a*) (§ 2.B). — Le fibré $\bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p M$ se décompose en somme directe $\xi^+ \oplus \xi^-$, où ξ^+ (resp. ξ^-) est le fibré des formes de degré pair (resp. impair). On désigne par d l'opérateur de dérivation extérieure, par d^* l'opérateur adjoint pour les structures hermitiennes naturelles sur les fibrés des formes. On pose $D = d + d^* : \xi^+ \to \xi^-$ et $D^* = d + d^* : \xi^- \to \xi^+$. Il est bien connu que

$$\mathrm{ind}\,(D) = \chi(M),$$

nombre d'Euler de M. Du lemme ci-dessus il découle immédiatement :

$$(2\sqrt{\pi})^{-n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \int_M \mathrm{Tr}\, u_t^p = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq \dfrac{n}{2}, \\ \chi(M) & \text{pour } i = \dfrac{n}{2}, \quad n \text{ pair.}\end{cases}$$

E. *Preuve du théorème* 4 (*b*) (§ 2.B). ($\dim M = 4\nu$). — Sur le fibré des formes $\bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p M$, on considère l'endomorphisme α défini par

$$\alpha\varphi = (-1)^{\frac{p(n-p)}{2}} \star \varphi$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Lambda^p M)$. Alors $\alpha^2 = \mathrm{Id}$ et le fibré $\bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p M$ est somme directe $\xi^+ \bigoplus \xi^-$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\xi^{\pm})$ si et seulement si $\alpha\varphi = \pm\varphi$. On prend encore $D = d + d^*$, on pose

$$E = E^0 + E^1 + \ldots + E^n;$$

il vient

$$E^{\pm} = \frac{1}{2}(E \pm \alpha_x E)$$

puisque $\alpha\Delta = \Delta\alpha$ sur $\bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p M$.

Sachant que (Atiyah-Singer [1])

$$\mathrm{ind}\,(D) = \mathrm{sgn}\,(M),$$

on obtient

$$\frac{1}{16^\nu \pi^{2\nu}} \int_M \mathrm{Tr}\,\alpha_x E(t, x, y)\,|_{y=x} = \mathrm{sgn}\,(M),$$

d'où

$$\frac{1}{16^\nu \pi^{2\nu}} \int_M \mathrm{Tr} \star_x E^{2\nu}(t, x, y)\,|_{y=x} = \mathrm{sgn}\,(M)$$

et

$$\frac{1}{16^\nu \pi^{2\nu}} \int_M \mathrm{Tr} \star_x u_i^{2\nu}(x, y)\,|_{y=x} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq 2\nu, \\ \mathrm{sgn}\,(M) & \text{pour } i = 2\nu. \end{cases}$$

F. *Preuve du théorème* 5 (§ 2.C) ($\dim M = 2\nu$). — Nous suivons ici A. Lichnérowicz [10]. L'algèbre de Clifford $C(R^n)$ est engendrée par un élément unité et une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace euclidien R^n astreinte aux conditions

$$(e_\alpha)^2 = -1, \qquad e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha = 0, \qquad \alpha \neq \beta.$$

La représentation spinorielle r de $C(R^n)$ se fait par des matrices qui opèrent dans un espace vectoriel complexe V de dimension 2^ν, où l'on peut choisir un produit hermitien de façon que les matrices de Dirac $\gamma^\alpha = r(e_\alpha)$ soient antihermitiennes et que la restriction de r à $\mathrm{Spin}(n)$ soit unitaire.

On pose

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \pmod 4, \\ \sqrt{-1} & \text{pour } n = 2 \pmod 4 \end{cases}$$

et on considère sur V l'action de la matrice

$$\beta = \varepsilon \gamma^1 \gamma^2 \ldots \gamma^n.$$

Alors $\beta^2 = \mathrm{Id}$, β est hermitienne, $\beta\gamma^\alpha = -\gamma^\alpha\beta$ et, pour $\Lambda \in \mathrm{Spin}(n)$, $r(\Lambda)\beta = \beta r(\Lambda)$ puisque les éléments de $\mathrm{Spin}(n)$ sont pairs.

Ainsi la restriction de r à $\mathrm{Spin}(n)$ se décompose en somme directe de deux représentations r^+, r^- qui opèrent sur deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires $V^\pm$ de V, de dimensions $2^{\nu-1}$.

Par remontée au fibré ξ des spineurs sur M, on obtient une structure hermitienne h sur ξ et une décomposition $\xi = \xi^+ \bigoplus \xi^-$ en fibré des spineurs positifs et fibré des spineurs négatifs.

La connexion riemannienne canonique de (M, g) est définie localement sur M par une forme ω à valeurs dans l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(n)$. La connexion spinorielle associée est décrite par la forme

$$\sigma = \frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta$$

à valeurs dans l'algèbre de Lie de $\mathrm{Spin}(n)$. Soit φ une section différentiable de ξ. Au-dessus du domaine U d'une carte de M, on choisit une section de $\mathcal{S}(\mathrm{M})$ et la section associée de $\mathcal{R}(\mathrm{M})$ dans l'extension. Dans ces repères, la partie principale de φ est une application $x \in \mathrm{U} \to (\varphi^1, \ldots, \varphi^{2^\nu}) \in \mathrm{V}$ et la partie principale de la dérivée covariante de φ s'écrit :

$$\nabla_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + \frac{1}{4} C_{\alpha\beta\mu} (\gamma^\alpha \gamma^\beta \varphi)^a,$$

où les $C_{\alpha\beta\mu}$ sont des coefficients de Ricci de ω dans les repères orthonormés choisis.

L'opérateur D de Dirac s'écrit

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\varphi)^a &= \gamma^\mu \nabla_\mu \varphi^a \\ &= \nabla_\mu (\gamma^\mu \varphi)^a.\end{aligned}$$

C'est un opérateur différentiel $\xi \to \xi$, autoadjoint pour la structure préhilbertienne induite sur $\mathcal{D}(\xi)$ par la mesure riemannienne ν de M et la structure hermitienne h de ξ; on a, en effet :

$$h_x(\mathrm{D}\varphi, \psi) = \partial_\mu h_x(\gamma^\mu \varphi, \psi) + h_x(\varphi, \mathrm{D}\psi),$$

d'où, par intégration,

$$\int_{\mathrm{M}} h(\mathrm{D}\varphi, \psi)\, \nu = \int_{\mathrm{M}} h(\varphi, \mathrm{D}\psi)\, \nu.$$

Le laplacien spinoriel Δ peut alors être obtenu en posant

$$\Delta = \mathrm{D}^2 = \mathrm{D}^* \mathrm{D}.$$

De l'égalité

$$\gamma^\alpha \beta = -\beta\gamma^\alpha$$

on déduit

$$D\beta = -\beta D$$

et l'opérateur de Dirac opère de $\xi^\pm$ dans $\xi^\mp$. Sachant qu'il est elliptique (Δ est manifestement elliptique); sachant aussi que l'indice de $D : \xi^+ \to \xi^-$ est le $\hat{A}$-genre de la variété M (Atiyah-Singer [1]) on peut appliquer la formule de Kotake en prenant

$$E^\pm(t, x, y) = \frac{1}{2}(E(t, x, y) \pm \beta_x E(t, x, y)),$$

où E est le noyau de diffusion pour Δ sur les fibré spinoriel ξ. Avec les notations précédentes, ceci donne

$$\int_M \mathrm{Tr}(\beta_x u_i(x, y))_{x=y} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq \nu, \\ (2\sqrt{\pi})^2 \hat{A}(M) & \text{pour } i = \nu. \end{cases}$$

4. Noyau de diffusion et fonction d'un laplacien.

A. *Hypothèses et notations.* — Dans ce paragraphe, (M, g) est une variété riemannienne compacte, ξ un fibré vectoriel hermitien sur M. Pour φ, $\psi \in \mathcal{D}(\xi)$ on pose :

$$(\varphi \mid \psi) = \int_M h(\varphi, \psi)\, v.$$

On considère sur ξ un opérateur différentiel $\Delta = D^* D$ du type étudié au paragraphe 3.C pour lequel on note E le noyau de diffusion. Nous supposerons que Δ est d'ordre $2m$ et nous dirons simplement que Δ est un *laplacien* sur ξ.

Nous noterons encore A l'isomorphisme antilinéaire : $\xi \sim \xi'$ défini par la donnée de h et de v. On a notamment

$$(\psi \mid \varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle,$$

où l'on a posé

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \int_M \langle A\varphi(x), \psi(x) \rangle_x .$$

Enfin pour tout s réel, $H^s(\xi)$ est l'espace de Sobolev de rang s pour ξ. On sait que $H^0(\xi)$ peut être considéré comme le complété de $\mathcal{D}(\xi)$ pour le produit intérieur (|).

B. *Fonctions du laplacien.* — A toute application linéaire continue T : $\mathcal{D}(\xi) \to \mathcal{D}'(\xi)$ est associé un noyau $N_T \in \mathcal{D}'(\xi \boxtimes \xi')$ défini par

$$T(\varphi) = \langle N_T(., y), \varphi(y) \rangle$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\xi)$ et aussi un noyau $\tilde{N}_T = A_y^{-1} N_T \in \mathcal{D}'(\xi \boxtimes \xi)$.

Désignons par P_λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre de Δ pour la valeur propre λ de Δ. Le noyau $H_\lambda \in \mathcal{D}'(\xi \boxtimes \xi')$ associé à P_λ s'écrit :

$$H_\lambda = \sum_a \varphi_a \otimes A\varphi_a,$$

où la somme (finie) porte sur une base orthonormée $\{ \varphi_a \}$ du sous-espace propre considéré, cette base étant constituée de sections propres de Δ pour λ. On a donc

$$\tilde{H}_\lambda = \sum_a \varphi_a \otimes \varphi_a$$

et H_λ, $\tilde{H}_\lambda$ sont des noyaux C^∞ dégénérés.

Plus généralement, à toute fonction F définie sur la demi-droite réelle positive, on associe l'opérateur de $H^0(\xi)$ défini par

$$L_F = \sum_{\lambda \geqq 0} F(\lambda) P_\lambda$$

dont le domaine de définition est le sous-espace

$$K(L_F) = \left\{ \varphi \in H^0(\xi) ; \sum_{\lambda \geqq 0} |F(\lambda)|^2 \| P_\lambda \varphi \|^2 < +\infty \right\}.$$

Lorsque $\mathcal{D}(\xi)$ est contenu dans $K(L_F)$, le noyau

$$N_F = \sum_{\lambda \geqq 0} F(\lambda) H_\lambda$$

est alors associé à L_F dans $\mathcal{D}'(\xi \boxtimes \xi')$. En d'autres termes, si nous désignons par $\{ \lambda_i \} = \{ 0 = \lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 < \dots \}$ le spectre de Δ, par $\{ \varphi_i \}$ une base orthonormée de $H^0(\xi)$ constituée de sections propres correspondantes, on obtient la décomposition en série de Fourier :

$$\tilde{N}_F = \sum_{i=0}^{\infty} F(\lambda_i) \varphi_i \otimes \varphi_i$$

de $\tilde{N}_F$ associée à L_F dans $\mathcal{D}'(\xi \boxtimes \xi)$. On remarquera que si F n'est pas définie au point O, on peut poser

$$L_F = \sum_{>0} F(\lambda) P_\lambda,$$

$$\tilde{N}_F = \sum_{i=i_0}^{\infty} F(\lambda_i) \varphi_i \otimes \varphi_i,$$

où λ_{i_0} est la première valeur propre non nulle dans le spectre de Δ.

C'est le cas notamment pour les fonctions $F(\lambda) = \lambda^{-s}$, $\lambda > 0$, $s \in \mathbf{C}$ pour lesquelles on a

$$\tilde{N}_s = \sum_{i \geq i_0} (\lambda_i)^{-s} \varphi_i \otimes \varphi_i.$$

Remarquons que $\tilde{N}_{-1}$ est le noyau associé à l'opérateur G de Green associé à Δ; on a, en effet,

$$\varphi = P_0(\varphi) + \Delta G(\varphi)$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\xi)$, P_0 étant le projecteur orthogonal sur les sections harmoniques (éléments de $\operatorname{Ker}\Delta$).

Les propriétés des noyaux $\tilde{N}_s$ sont connues, souvent dans un cadre plus général (*voir* les articles de R. T. Seeley [16] et D. Fujiwara [5]) mais la généralisation des méthodes de T. Kotake-R. Narasimhan [8] donne aisément les résultats utilisés au paragraphe 3·C. Ceci est l'objet des paragraphes suivants.

C. *Le semi-groupe* $\exp(-t\Delta)$. — Le noyau de diffusion E associé à Δ étant de classe C^∞ opère sur $H^0(\xi)$ et définit pour chaque $t > 0$ un opérateur linéaire T_t :

$$T_t \varphi = \langle E(t, ., y, \varphi(y)) \rangle.$$

Ces opérateurs T_t vérifient la loi de semi-groupe

$$T_t T_s = T_{t+s} \qquad (t, s > 0)$$

et chacun d'eux est borné, auto-adjoint, positif, contractant et compact (ces propriétés se prouvent comme pour le laplacien sur les formes).

Ces propriétés, jointes aux égalités :

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_t \varphi) = -\Delta(T_t \varphi),$$

$$\varphi = \lim_{t \to 0+} T_t \varphi$$

dans $\mathcal{D}(\xi)$, montrent que (T_t) est un semi-groupe fortement continu (1) dont le générateur infinitésimal est l'unique extension auto-adjointe négative de $-\Delta$. En d'autres termes,

$$T_t = \exp(-t\Delta)$$

et encore

$$E(t, ., .) = \sum_{i \geq 0} e^{-t\lambda_i} \varphi_i \otimes \varphi_i$$

(1) C'est-à-dire de la classe C_0.

dans $\mathcal{D}'(\xi \boxtimes \xi)$; mais $\tilde{E}$ est de classe C^∞ et l'égalité précédente tient dans $\mathcal{D}(\xi \boxtimes \xi)$ pour chaque $t > 0$. La célèbre formule de S. Minakshisundaram [12] en découle immédiatement :

$$\sum_{i \geq 0} e^{-t\lambda_i} = \int_M \operatorname{tr} \tilde{E}(t, x, x)\, v(x).$$

D. *Les noyaux* N_s.

LEMME 4.D. — *Soit* $\tilde{H}_0 \in \mathcal{D}(\xi \boxtimes \xi)$ *le noyau associé au projecteur sur les sections harmoniques,* $\tilde{N}_s$ *le noyau associé à la fonction* $F(\lambda) = \lambda^s$.

Pour $\operatorname{Re}(s) > m/2m$ ($n = \dim M$, $2m =$ *ordre de* Δ), *le noyau* $\tilde{N}_s$ *est continu et*

$$\Gamma(s)\, \tilde{N}_s(x, y) = \int_0^\infty t^{s-1} \left(\tilde{E}(t, x, y) - \tilde{H}_0(x, y)\right) dt$$

dans $C^0(\xi \boxtimes \xi)$.

Preuve. — Si l'on désigne encore par i_0 l'indice de la première valeur propre non nulle dans le spectre de Δ on obtient

$$\tilde{H}_0(x, y) = \sum_{i=0}^{i_0 - 1} \varphi_i \otimes \varphi_i$$

et

$$\tilde{E}(t, x, y) - \tilde{H}_0(x, y) = \sum_{i > i_0} e^{-t\lambda_i} \varphi_i \otimes \varphi_i.$$

En se rappelant que

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t\lambda_i}\, dt = \Gamma(s)\, (\lambda_i)^{-s} \qquad (s \neq 0, -1, \ldots),$$

tout revient à prouver que

$$\int_0^\infty t^{s-1} \left(\tilde{E}(t, x, y) - \tilde{H}_0(x, y)\right) dt = \sum_{i > i_0} \left(\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t\lambda_i}\, dt \right) \varphi_i(x) \otimes \varphi_i(y)$$

pour $\operatorname{Re}(s) > \dfrac{n}{2m}$.

Soit k un entier $> \dfrac{n}{4m}$. D'après le lemme d'inclusion de Sobolev il existe une constante C indépendante de t telle que

$$\begin{aligned} \| \tilde{E}(t, ., .) - \tilde{H}_0 \|_{C^0(\xi \boxtimes \xi)} &< C \| \tilde{E}(t, ., .) - \tilde{H}_0 \|_{H^{2km}(\xi \boxtimes \xi)} \\ &< C \| (I + \Delta)^k \left(\tilde{E}(t, ., .) - \tilde{H}_0\right) \|_{H^0(\xi \boxtimes \xi)} \\ &< C \sum_{i \geq i_0} (1 + \lambda_i)^k e^{-t\lambda_i} \\ &< C e^{-t\lambda_{i_0}} \sum_{i \geq i_0} (1 + \lambda_i)^k e^{-t(\lambda_i - \lambda_{i_0})}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \geqq t_0 > 0$,

$$\| \tilde{E}(t, ., .) - \tilde{H}_0 \|_{C^0(\xi \boxtimes \xi)} < C' e^{-t\lambda_{i_0}},$$

où C′ ne dépend pas de t.

Ceci prouve que :

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{s-1} [\tilde{E}(t, x, y) - \tilde{H}_0(x, y)] \, dt = \sum_{i \geqq i_0} \left(\int_{t_0}^{+\infty} t^{s-1} e^{-t\lambda_i} \, dt \right) \varphi_i(x) \otimes \varphi_i(y).$$

Au voisinage de 0, on a, d'autre part (T. Kotake [7], § 7)

$$\| \tilde{E}(t, ., .) \|_{C^0(\xi \boxtimes \xi)} < C t^{-\frac{n}{2m}},$$

d'où

$$\| \tilde{E}(t, ., .) - \tilde{H}_0 \|_{C^0(\xi \boxtimes \xi)} < C t^{-\frac{n}{2m}}$$

et l'égalité énoncée tient pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2m}$.

Remarque. — En appliquant maintenant sans changement la méthode de T. Kotake et M. S. Narasimhan [8], on déduit de ce lemme que les noyaux N_s donc N_{-1} sont très réguliers ; ainsi le noyau S_t du paragraphe 3.C est C^∞.

Enfin, d'après ce lemme, la fonction

$$\zeta(s) = \int_M \mathrm{tr} \tilde{N}_s . v$$

(la trace est prise par rapport à la structure hermitienne) existe pour $\mathrm{Re}\, s > \frac{n}{2m}$. Le théorème suivant montre comment les noyaux u_i des paramétrix associées à Δ entrent dans le comportement de cette fonction ζ :

THÉORÈME 6. — *Δ est le laplacien sur les p-formes; on pose*

$$a_i^p = \int_M \mathrm{Tr} u_i^p.$$

La fonction ζ admet un prolongement méromorphe dans le plan complexe avec les pôles simples

$$\frac{n}{2}, \quad \frac{n}{2} - 1, \quad \ldots, \quad 1 \qquad (n \text{ pair}),$$

$$\frac{n}{2}, \quad \frac{n}{2} - 1, \quad \ldots, \quad \frac{n}{2} - i, \quad \ldots \qquad (n \text{ impair}).$$

On a les formules suivantes :

$$\operatorname{res}\left(\zeta; \frac{n}{2} - i\right) = \frac{a_i^p}{(2\sqrt{\pi})^n \Gamma\left(\frac{n}{2} - i\right)},$$

$$\zeta(0) = \begin{cases} -b_p & \text{pour } n \text{ impair}, \\ (2\sqrt{\pi})^{-n} a_{\frac{n}{2}}^p - b_p & \text{pour } n \text{ pair}, \end{cases}$$

b_p *étant le* $p^{\text{ième}}$ *nombre de Betti de* M.

Preuve. — Posons

$$\Phi(t) = \int_M \operatorname{tr}\left(\tilde{E}(t, x, x) - \tilde{H}_0(x, x)\right) v(x),$$

où $\tilde{E}$ et $\tilde{H}$ ont leur sens usuel pour Δ.

Pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}$, on a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\Phi(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{s-1}\Phi(t)\,dt + \int_1^\infty t^{s-1}\Phi(t)\,dt.$$

Puisque $|\varphi(t)| < C e^{-\mu t}$, $\mu > 0$. pour $t \geqq 1$, la fonction

$$s \to \int_1^\infty t^{s-1}\Phi(t)\,dt$$

est entière.

Pour $0 < t \leqq 1$ et tout entier $k > \frac{n}{2}$, on a d'autre part,

$$\Phi(t) = (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{-\frac{n}{2}} (a_0^p + t\,a_1^p + \ldots + t^k a_k^p) + \alpha(t) - b_p,$$

où

$$|\alpha(t)| < \text{Cte}\, t^{k - \frac{n}{2} + 1}$$

et où le nombre

$$b_p = \int_M \operatorname{tr} \tilde{H}_0 v$$

est le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de M.

Ainsi, pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}$,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = (2\sqrt{\pi})^{-n}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{a_i^p}{s - \frac{n}{2} + i}\right) - \frac{b_p}{s} + \psi(s),$$

où ψ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2} - k - 1$. Ceci pouvant être fait pour tout k, les propriétés énoncées en découlent.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ATIYAH-SINGER, *The index of elliptic operators on compact manifolds* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 69, 1963, p. 422-433).

[2] M. BERGER, *Le spectre des variétés riemanniennes* (*Revue roumaine Math. phys. et appl.*, t. 13, 1968, p. 915-931).

[3] E. COMBET, *Solutions élémentaires des dalembertiens généralisés* (*Mémorial Sc. Math.*, fasc. CLX, Gauthier-Villars, Paris, 1965).

[4] S. D. EIDELMAN, *Fundamental solutions of parabolic systems.* I. (*Amer. Math. Soc. Transl.*, (2), vol. 41, 1964).

[5] D. FUJIWARA, *On the asymptotic behaviour of the Green operators...* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 21, 1969, p. 481-522).

[6] M. P. GAFFNEY, *Asymptotic distributions associated with the Laplacian for forms* (*Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 11, 1958, p. 535-545).

[7] T. KOTAKE, *The fixed point theorem of Atiyah-Bott via parabolic operators* (*Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 22, 1969, p. 789-806).

[8] T. KOTAKE et M. S. NARASIMHAN, *Complex powers of elliptic operators* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 90, 1962, p. 449-471).

[9] A. LICHNÉROWICZ, *Champs spinoriels et propagateurs en Relativité générale* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 92, 1964, p. 11-101).

[10] A. LICHNÉROWICZ, *Spineurs harmoniques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 257, 1963, p. 7-9).

[11] MC KEAN-SINGER, *Curvature and the eigenvalues of the laplacian* (*J. Diff. Geometry*, vol. 1, 1967, p. 43-69).

[12] S. MINAKSHISUNDARAM, *Eigenfunctions of Riemannian manifolds* (*J. Ind. Math. Soc.*, vol. 78, 1953, p. 159-165).

[13] S. MINAKSHISUNDARAM et A. PLEIJEL, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds* (*Canad. J. Math.*, vol. 1, 1949, p. 242-256).

[14] PHAM MAU QUAN, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969.

[15] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[16] R. T. SEELEY, *Complex powers of an Elliptic operator* (*Proc. Sym. Pure Math. X.*, *Amer Math. Soc.*, 1967).

(Manuscrit reçu le 28 mai 1970.)

E. COMBET,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques,
43, boulevard du Onze-Novembre 1918,
69-Villeurbanne.