ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL LÉVY

Sur une classe de courbes de l'espace de Hilbert et sur une équation intégrale non linéaire

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 73, no 2 (1956), p. 121-156

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_2_121_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE CLASSE

DE COURBES DE L'ESPACE DE HILBERT

ET SUR UNE

ÉQUATION INTÉGRALE NON LINÉAIRE

PAR M. PAUL LÉVY.

Introduction.

Le présent travail a son origine dans des recherches sur les fonctions aléatoires laplaciennes exposées en 1950 au second Symposium de Berkeley (1). Dans une Note récente (2), j'ai attiré l'attention sur le fait que le rapprochement de deux résultats de cette Communication de 1950 permet, dans des cas étendus, d'obtenir des solutions de l'équation intégrale non linéaire

$$(E) \qquad \Gamma(t_1, t_2) = \int_0^t F(t_1, u)\, F(t_2, u)\, du \qquad [t = \mathrm{Min}(t_1, t_2) \geqq 0].$$

Le but initial du présent travail était de développer cette Note, où j'avais surtout indiqué le moyen d'obtenir ce que j'appelle la *solution canonique*. Il y a toujours d'autres solutions qu'il restait à étudier. D'autre part il m'a paru désirable, pour exposer des résultats qui sont essentiellement analytiques de ne pas employer le langage des probabilités (3). Mais une simple vérification analytique des principaux résultats n'aurait pas mis en évidence ce qui fait l'intérêt de l'équation (E) : elle n'est pas formée artificiellement, mais s'introduit tout naturellement dans l'étude de la *covariance* d'une fonction aléatoire laplacienne.

(1) *Proc. of the Second Berkeley Symposium on math. Statistics and Probability* (University of California Press, 1951), p. 171-187. *Voir* aussi *Univ. of California Public. in Statistics*, t. 1, 1953, p. 331-390.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1956, p. 1252.

(3) Des notes en bas de page rappelleront brièvement l'interprétation probabiliste des résultats les plus importants.

Or il est possible de mettre ce fait en évidence en traduisant en termes géométriques la théorie des fonctions aléatoires laplaciennes exposée en 1955 au troisième Symposium de Berkeley (4), où, à l'occasion d'une application, j'avais développé ma théorie de 1950 et défini la *représentation canonique* de ces fonctions. On sait qu'une variable aléatoire laplacienne peut être représentée par un vecteur d'un espace de Hilbert Ω. Une fonction aléatoire laplacienne est alors représentée par une fonction vectorielle $\Phi(t)$ définie dans cet espace, et une équation différentielle stochastique vérifiée par la fonction aléatoire devient une équation différentielle vérifiée par la fonction vectorielle $\Phi(t)$.

C'est ce qui m'a conduit à faire précéder le chapitre consacré à l'intégration de l'équation (E) par deux chapitres où sont étudiées des courbes et des fonctions vectorielles dans l'espace de Hilbert. Le premier est consacré à la fonction particulière $X(t)$ qui correspond à la fonction aléatoire du mouvement brownien ; elle est définie par la propriété que le vecteur $X(t_1) - X(t_2)$ a pour longueur $|t_1 - t_2|$. Dans le second sont étudiées les fonctions de la forme

$$\Phi(t) = \int_0^t F(t, u)\, dX(u), \tag{1}$$

et d'une forme un peu plus générale. Nous dirons que $F(t, u)$ est le *noyau* de $\Phi(t)$. Nous distinguerons des noyaux *propres* ou *impropres*, *canoniques* ou *non canoniques*. Une fonction $\Phi(t)$ a toujours une infinité de noyaux différents, groupés en *classes de noyaux équivalents*. A une transformation triviale près, chaque classe contient au plus un noyau propre. Il peut exister plusieurs classes distinctes ; mais il n'y a qu'un noyau canonique.

Certains des résultats de ces deux premiers chapitres correspondent à des théorèmes déjà contenus dans ma Communication de 1955 à Berkeley. Mais il y a aussi plusieurs résultats nouveaux, notamment le théorème I.3 qui caractérise les fonctions que j'appelle *admissibles ;* j'entends par là qu'il existe dans l'espace Ω une droite sur laquelle la projection de $X(t)$ coïncide avec la fonction considérée. Il en résulte une caractérisation des noyaux canoniques beaucoup plus précise que celle donnée antérieurement (théorème II.7.1). Les n^{os} II.7.4° et II.8.2° sont aussi nouveaux.

Si je n'utilise aucune notion de calcul des probabilités, j'en conserverai certaines notations. Ainsi les notations ξ_p, ξ_q (que j'ai l'habitude d'utiliser pour désigner deux variables laplaciennes réduites, indépendantes l'une de l'autre) représenteront deux vecteurs unitaires orthogonaux. La notation XY [remplaçant E(XY)] représentera le produit scalaire des vecteurs X et Y. La *covariance* de $\Phi(t)$ [en calcul des probabilités $E\{\Phi(t_1)\Phi(t_2)\}$] sera le produit scalaire $\Phi(t_1)\Phi(t_2)$.

---

(4) Vol. II des *Proc.* en cours d'impression.

Quant à l'intégration de l'équation (E), disons seulement ici qu'elle repose sur une décomposition du problème, la première étape consistant à déduire de la covariance $\Gamma(t_1, t_2) = \Phi(t_1)\,\Phi(t_2)$ une équation de la forme

$$\delta\Phi(t) = dt \int_0^t G(t, u)\, d\Phi(u) + \sigma(t)\,\xi_t \sqrt{dt} \qquad (dt > 0), \tag{2}$$

dont l'intégration donnera ensuite $\Phi(t)$ sous la forme (1). En outre, après l'étude du cas régulier, qui ne fait que développer et préciser des résultats indiqués antérieurement, nous étudierons quelques exemples de cas singuliers.

I. — La fonction $X(t)$ et la courbe C.

I.1. Remarques préliminaires. — Nous nous placerons dans des espaces de Hilbert réels, qui seront désignés par la lettre Ω, avec ou sans indice. Indiquons seulement que tous les résultats exposés s'étendent aisément au cas complexe; il n'y a qu'à remplacer les produits scalaires, et même le produit de deux facteurs scalaires qui figure dans l'équation (E), par des produits hermitiens.

Nous appellerons *plan* d'une figure l'intersection de toutes les variétés linéaires qui la contiennent. Même si un tel plan P coïncide avec l'espace Ω d'abord considéré, cela ne nous empêchera pas de considérer une ou plusieurs directions perpendiculaires à Ω; cela implique seulement l'introduction d'un espace plus vaste, dont Ω ne sera qu'une section. L'espace de Hilbert sera ainsi une construction créée et étendue en fonction de nos besoins. Comme l'ensemble des variables laplaciennes dont il est l'image, ou comme l'ensemble des nombres transfinis, c'est une construction dont on ne peut pas concevoir l'achèvement définitif.

Nous désignerons indifféremment par les lettres majuscules X, Y et Φ, avec ou sans indices, des points de Ω ou les vecteurs issus de l'origine O et aboutissant à ces points. Les notations $|X|$ et XY représenteront la longueur du vecteur X et le produit scalaire des vecteurs X et Y. Toutefois, il nous arrivera aussi de désigner par XY le segment qui joint les points X et Y, mais en le précisant chaque fois de manière à éviter toute ambiguïté.

La *covariance* d'un système de vecteurs X_n, c'est-à-dire l'ensemble des carrés X_n^2 et des produits $X_p X_q$, définit parfaitement la figure formée par ces vecteurs, indépendamment de son orientation dans l'espace. De même la covariance $\Gamma(t_1, t_2)$ d'une fonction vectorielle $\Phi(t)$ définit toutes les propriétés intrinsèques de cette fonction, c'est-à-dire la forme de la figure formée par l'origine O et la ligne L décrite par le point $\Phi(t)$, et la loi du mouvement sur cette ligne; mais elle ne donne aucune indication sur l'orientation de cette figure dans l'espace Ω. Cela n'a d'ailleurs aucun sens de parler de cette orientation si la ligne L n'est pas placée dans un espace où des axes sont préalablement définis. Aussi sera-t-il

commode de considérer la fonction $\Phi(t)$ comme bien définie si l'on connaît sa covariance; nous prendrons en principe $\Phi(o)$ comme origine; la covariance $\Gamma(t_1, t_2)$ s'annulera alors avec $t_1 t_2$.

On sait que la covariance n'est pas une fonction quelconque. Il nous suffit de rappeler qu'elle est symétrique, que $\Gamma(t, t) \geqq o$, et que, si $\Phi(t)$ est continu, elle est continue.

I.2. Définition de $X(t)$ et de la ligne C. Rappel de propriétés connues. — Nous désignerons par $X(t)$ la fonction vectorielle définie par la condition

$$|X(t') - X(t)| = \sqrt{|t' - t|}, \tag{I.2.1}$$

et par C la ligne lieu du point $X(t)$; le point $X(o)$ sera pris pour origine.

On déduit de cette définition que, si t_n croît avec n, tous les triangles $X(t_0)\ X(t_1)\ X(t_n)$ $(n > 1)$ sont rectangles, le sommet de l'angle droit étant $X(t_1)$. L'arc (t_1, ∞) de la ligne C est dans un plan perpendiculaire à la corde $X(t_0)\ X(t_1)$, et à deux intervalles disjoints tels que (t_0, t_1) et (t_2, t_3) correspondent toujours deux cordes rectangulaires.

Deux points $X(t)$ et $X(t')$ de C divisent cette courbe en trois arcs situés, l'un sur la sphère de diamètre $X(t)\ X(t')$, les deux autres dans les plans tangents perpendiculaires à ce diamètre. Le plan de n points ne recoupe jamais la courbe en d'autres points.

On peut définir comme suit la construction de la ligne C. On choisira une suite de nombres t_n variant de $-\infty$ à $+\infty$, et l'on construira la ligne polygonale de sommets $X(t_n)$, inscrite dans C; ses côtés sont deux à deux perpendiculaires, et leurs longueurs bien définies par la formule (I.2.1). Ensuite, dans chaque intervalle (t_n, t_{n+1}), on se donnera une suite partout dense de nombres $t_{n,\nu}$, et l'on déterminera successivement tous les $X(t_{n,\nu})$ par la règle suivante : pour déterminer le point $X(t)$ d'un arc $X(t')\ X(t'')$ dont les extrémités sont connues et qui ne contient aucun autre point déjà connu, on se donnera une direction orientée perpendiculaire au plan défini par tous les points connus, et dans le demi-plan (à deux dimensions) contenant $X(t')$, $X(t'')$ et cette direction, on construira le triangle rectangle $X(t')\ X(t)\ X(t'')$, dont l'hypoténuse est placée, les deux autres côtés ayant des longueurs connues. On peut remarquer que, t variant de t' à t'', la projection de $X(t)$ sur la corde $X(t')\ X(t'')$ de C se déplace avec une vitesse constante; $X(t)$ est donc, dans le demi-plan considéré, un point du demi-cercle de diamètre $X(t')\ X(t'')$ bien défini par sa projection sur ce diamètre.

On démontre aisément que les $X(t_{n,\nu})$ ainsi obtenus définissent une fonction continue, et que la condition (I.2.1) est bien vérifiée quels que soient t et t' [5].

---

[5] Il est bien évident qu'à toute courbe continue définie dans Ω correspond une fonction aléatoire continue en moyenne quadratique. Le résultat obtenu ici suffit donc à établir l'existence et la continuité en moyenne quadratique de la fonction aléatoire du mouvement brownien. Les démonstrations

La covariance $X(t)\,X(t')$ est nulle si $tt' \leq 0$, et dans le cas contraire égale au plus petit des modules $|t|$ et $|t'|$.

La définition de la courbe étant indépendante de l'instant pris comme origine, elle peut glisser sur elle-même sans se déformer, comme une hélice dans l'espace ordinaire. Naturellement, ce glissement implique une rotation extraordinairement irrégulière. Une corde donnée a un déplacement continu, mais cela n'empêche pas que pendant un temps τ arbitrairement petit, toute corde de longueur $\leq \sqrt{\tau}$ a tourné d'un angle droit.

Pendant ce mouvement, le plan de la courbe C ne change pas. Mais si l'on ne considère que la moitié de la courbe (correspondant aux $t \geq 0$), et qu'on la fasse glisser sur C dans le sens des t croissants, son plan perdra constamment une infinité de dimensions.

I.3. La projection de $X(t)$ sur une droite D et les fonctions admissibles. — Nous nous placerons sur un intervalle (t', t'') qui peut être fini ou infini; nous désignerons par Ω le plan de l'arc de C qui correspond à cet intervalle, et par Ω' un espace de Hilbert contenant Ω et au moins un axe perpendiculaire à Ω. Nous dirons qu'une fonction scalaire $x(t)$ est *admissible relativement à* Ω (ou Ω') s'il existe dans Ω (ou Ω') une droite D orientée sur laquelle la projection du point $X(t)$ soit $x(t)$. On peut naturellement supposer $x(0) = 0$; cela n'est pas essentiel.

Théorème I.3. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction donnée $x(t)$ soit admissible relativement à Ω et à l'intervalle (t', t'') $(t'' > t')$ est*

$$\text{(I.3.1)} \qquad I = \int_{t'}^{t''} \frac{[dx(t)]^2}{dt} = 1.$$

Relativement à Ω', elle est $I \leq 1$.

Rappelons d'abord une propriété connue de l'intégrale de Hellinger I, qu'on peut définir comme limite de la somme riemannienne

$$\text{(I.3.2)} \qquad S = \sum \frac{[\Delta x(t)]^2}{\Delta t}.$$

Il est évident que l'addition d'un nouveau point de division τ dans un intervalle (τ', τ'') ne peut qu'augmenter cette somme, et l'augmente effectivement, à moins que $x(\tau) - x(\tau')$ et $x(\tau'') - x(\tau)$ ne soient proportionnels à $\tau - \tau'$ et $\tau'' - \tau$. On en déduit aisément, d'une part l'existence dans tous les cas d'une

---

plus compliquées ne sont utiles que si l'on veut établir la continuité presque sûre de cette fonction. D'une manière beaucoup plus générale, il suffit que la définition d'une fonction aléatoire soit correcte au point de vue de Bernoulli pour qu'on soit assuré de son existence, indépendamment de toute étude de ses propriétés probables ou presque sûres.

limite, finie ou infinie, indépendante du choix des points de division, d'autre part que le minimum de l'intégrale pour un intervalle de longueur l où la variation de $x(t)$ est h est réalisé quand $x(t)$ est linéaire, et égal à $\frac{h^2}{l}$. Ce résultat s'étend sans difficulté à n'importe quel ensemble de mesure l. L'intégrale I ne peut donc être finie que si $x(t)$ est absolument continu; en désignant alors par $x'(t)$ la dérivée de $x(t)$, elle s'écrit

$$\text{(I.3.3)} \qquad \mathrm{I}=\int_{t'}^{t''} x'^2(t)\,dt.$$

Observons maintenant que, si $x(t)$ est la composante de $\mathrm{X}(t)$ suivant une droite D orientée, la somme S peut s'écrire

$$\text{(I.3.4)} \qquad \mathrm{S}_n=\sum_1^n\left[\frac{\Delta x(t_\nu)}{\Delta \mathrm{X}(t_\nu)}\right]^2=\sum_1^n \alpha_\nu^2,$$

les α_ν étant les cosinus des angles de D et des côtés successifs d'une ligne polygonale Π_n inscrite dans l'arc (t', t'') de C. Ces côtés étant deux à deux orthogonaux, on a $\mathrm{S}_n=1$ si D est dans le plan P_n de Π_n, et plus généralement $\mathrm{S}_n=\cos^2\theta_n\leqq 1$ si D fait avec ce plan l'angle θ_n.

Si maintenant nous ajoutons de nouveaux points de division, le plan $\Omega_{t',t''}$ de l'arc considéré de la ligne C se trouve défini par une infinité d'axes deux à deux rectangulaires dont les n premiers définissent P_n. Si α'_ν est l'angle du $\nu^{\text{ième}}$ axe avec D, on a donc

$$\mathrm{S}_n=\sum_1^n \alpha_{n,\nu}^2=\sum_1^n \alpha_\nu'^2=\cos^2\theta_n.$$

Pour n infini, S_n tend vers I. D'autre part l'angle θ de D avec $\Omega_{t',t''}$ est défini par

$$\cos^2\theta=\sum_1^\infty \alpha_\nu'^2,$$

de sorte que θ_n tend vers θ. On a donc à la limite $\mathrm{I}=\cos^2\theta\leqq 1$, et, si D est dans $\Omega_{t',t''}$ (et dans ce seul cas), $\mathrm{I}=1$. Les conditions indiquées sont bien nécessaires.

Pour démontrer la réciproque, donnons-nous une fonction $x(t)$ vérifiant la condition $\mathrm{I}\leqq 1$, et commençons par construire la figure constituée par Π_n et D. On peut construire Π_n dont les côtés ont des longueurs connues $\sqrt{\Delta t_\nu}$ et sont deux à deux orthogonaux. On définit ensuite $\alpha_{n,\nu}$ par la condition

$$\alpha_{n,\nu}=\frac{\Delta x_\nu(t)}{\sqrt{\Delta t_\nu}}.$$

(le radical étant positif). On a alors $S_n = \sum_1^n \alpha_{n,\nu}^2 \leq 1$, et l'on peut prendre pour D la direction dont les cosinus directeurs sont $\alpha_{n,1}$, $\alpha_{n,2}$, ..., $\alpha_{n,n}$, et, perpendiculairement au plan P_n de Π_n, $\sqrt{1-S_n}$.

Si l'on supprime un des sommets de Π_n, on retrouve la figure analogue constituée par Π_{n-1} et D. Il en résulte qu'inversement, si l'on a d'abord construit cette dernière figure, on peut la conserver, et retrouver la première par l'adjonction d'un nouveau point convenablement placé. On peut répéter cette opération, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n. On obtient à la limite la ligne C, et chaque $\Delta X(t)$ a bien pour projection $\Delta x(t)$, puisqu'il en est ainsi pour les côtés des lignes Π_n. On a naturellement toujours $I = \cos^2\theta$, donc $I = 1$ si D est dans $\Omega_{t',t''}$ et $I < 1$ dans le cas contraire. Le théorème est ainsi démontré.

I.4. Corollaires. — Nous allons déduire du théorème I.3 quelques propriétés simples des fonctions admissibles.

Corollaire I.4.1. — 1° *Toute fonction admissible $x(t)$ est continue et vérifie une condition Lipschitz de la forme*

$$|x(t+\tau) - x(t)| \leq \varphi(\tau), \tag{I.4.1}$$

où $\varphi(\tau) = o\left(\sqrt{|\tau|}\right)$ $(\tau \to 0)$; (on peut de plus supposer que cette fonction soit paire, continue, et croisse avec $|\tau|$). 2° *Cet énoncé est le meilleur possible, en ce sens qu'on ne peut pas trouver une fonction particulière $\varphi(\tau)$, qui soit $o\left(\sqrt{|\tau|}\right)$, et telle que la condition* (I.4.1) *soit vérifiée pour n'importe quelle fonction admissible et pour τ assez petit,*

1° Il résulte de la condition (I.3.1) qu'on peut partager l'intervalle (t', t'') de variation de t en un nombre fini d'intervalles partiels i_n dans chacun desquels on a

$$\int_i \frac{[dx(t)]^2}{dt} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Pour τ positif assez petit, $x(t)$ et $x(t+\tau)$ seront toujours dans le même intervalle ou dans deux intervalles consécutifs. On aura donc

$$\operatorname*{Sup}_{t \in (t', t''-\tau)} \frac{1}{\tau}[x(t+\tau) - x(t)]^2 \leq \varepsilon^2,$$

c'est-à-dire, ε étant arbitrairement petit, que le premier membre tend vers zéro avec τ, C. Q. F. D.

2° Supposons maintenant donnée une fonction $\varphi(|\tau|)$, qui soit continue, croissante, et $o\left(\sqrt{|\tau|}\right)$ pour τ tendant vers zéro. Si une fonction $x(t)$ est égale

à $2\varphi(t)$ pour des valeurs t_n de t qui tendent vers zéro en décroissant, et si elle varie linéairement dans chaque intervalle (t_n, t_{n-1}), on a

$$\int_0^{t_0} \frac{[dx(t)]^2}{dt} = 4 \sum \frac{[\varphi(t_{n-1}) - \varphi(t_n)]^2}{t_{n-1} - t_n},$$

et il suffit que cette série soit convergente pour que $x(t)$, quoique ne vérifiant pas la condition (I.4.1) pour $t = 0$ et $\tau = t_n$, soit admissible dans un intervalle (0, T) assez petit, et que la deuxième partie de l'énoncé soit démontrée.

Or il en est bien ainsi si les t_n sont déterminés successivement de manière à vérifier par exemple les conditions

$$\frac{\varphi^2(t_n)}{t_n} \leq \frac{1}{2n^2}, \qquad \frac{[\varphi(t_n) - \varphi(t_{n+1})]^2}{t_n - t_{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \frac{\varphi^2(t_{n+1})}{t_{n+1}} \leq \frac{1}{2(n+1)^2}, \qquad \ldots.$$

La première, puisque $\varphi^2(t_n) = o(t_n)$, est vérifiée si n est assez petit. La seconde et la troisième le sont aussi si, une fois t_n choisi, t_{n+1} est assez petit; et ainsi de suite. Le corollaire est donc démontré.

COROLLAIRE I.4.2. — *On a toujours la condition de Lipschitz*

$$[x(t_1) - x(t_0)]^2 \leq |t_1 - t_0|,$$

et, si le maximum est atteint pour des valeurs particulières t_0 *et* $t_1 > 0$, $x(t)$ *varie linéairement dans* (t_0, t_1) *et est constant dans* (t', t_0) *et dans* (t_1, t'').

C'était évident, puisque l'égalité considérée implique que D soit parallèle à $X(t_0)\ X(t_1)$. Nous le rappelons pour faire remarquer que c'est aussi une conséquence du théorème I.3.

COROLLAIRE I.4.3. — *Si* $\alpha \leq \frac{1}{2}$, t^α et $\mathcal{R}(ct^{\alpha+i\beta})$ *ne sont jamais des fonctions admissibles dans* (0, T). *Si* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\mathcal{R}(ct^{\alpha+i\beta})$ (et en particulier ct^α si $\beta = 0$), *sont admissibles dans* (0, T) *si* $|c|$ *est assez petit* (le maximum possible tendant vers zéro pour T infini).

Naturellement, pour l'intervalle (T, ∞), les inégalités seraient retournées.

II. — Les fonctions $\Phi(t)$ et les courbes L.

II.1. LE CAS PARTICULIER DES FONCTIONS ADDITIVES. — Ce sont les fonctions de la forme

$$\Phi_0(t) = \int_0^t \sigma(u)\, dX(u), \tag{II.1.1}$$

où $\sigma(u)$ est une fonction mesurable et de carré sommable dans tout intervalle fini (o, T). La ligne ainsi décrite par le point $\Phi_0(t)$ sera désignée par L_0.

La covariance de $\Phi_0(t)$ est

$$\Phi_0(t_1)\,\Phi_0(t_2) = \int_0^t \sigma^2(u)\,du = \omega(t) \qquad [t = \mathrm{Min}(t_1, t_2)], \tag{II.1.2}$$

tandis que la covariance mixte de $\Phi_0(t)$ et $X(t)$ est

$$\Phi_0(t_1)\,X(t_2) = \int_0^t \sigma(u)\,du. \tag{II.1.3}$$

Le signe de $\sigma(u)$ est donc sans influence sur les propriétés intrinsèques de $\Phi_0(t)$ et sur la forme de la courbe L_0. Il intervient au contraire si l'on veut la situer par rapport à C.

Désignons par Ω_t et Ω les plans des arcs (o, t) et (o, ∞) de C (au sens du n° I.1). $\Phi_0(t)$ est un point quelconque de Ω_t. En convenant de ne pas considérer comme distinctes deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle, il y a correspondance biunivoque entre les points de Ω_t et les fonctions $\sigma(t)$ mesurables et de carrés sommables dans (o, t) (si l'on refuse la convention précédente, il faut introduire des classes de fonctions, deux fonctions d'une même classe ne différant que sur un ensemble de mesure nulle).

Pour un petit intervalle (u, $u+du$) ($du > 0$), la variation $\delta X(u)$ est de la forme $\xi_u\sqrt{du}$, ξ_u désignant un vecteur unitaire dans Ω. En convenant qu'à deux valeurs distinctes de u, ou plus correctement à deux intervalles disjoints, correspondent des vecteurs orthogonaux, il est naturel de représenter $\Phi_0(t)$ par la notation

$$\Phi_0(t) = \int_0^t \sigma(u)\,\xi_u\sqrt{du}. \tag{II.1.4}$$

Il y a toutefois une différence importante entre les formules (II.1.1) et (II.1.4). La première définit les relations entre $X(t)$ et $\Phi(t)$; la seconde ne définit que la courbe C et les propriétés intrinsèques de $\Phi(t)$. Cette différence se manifeste lorsqu'on veut généraliser $\Phi_0(t)$ par l'introduction des *σ-fonctions*. Rappelons que ces fonctions généralisent les fonctions mesurables et de carrés sommables comme les distributions de L. Schwartz généralisent les fonctions sommables. Une σ-fonction est donc la racine carrée d'une distribution non négative, ce qui revient à dire que, dans (II.1.2), on peut prendre pour $\omega(t)$ n'importe quelle fonction non décroissante, et ayant la valeur initiale $\omega(-0) = 0$. Alors que, si elle est absolument continue, les ξ_u n'interviennent en quelque sorte que par des moyennes, et que $\Phi_0(t)$ ne dépend finalement que de l'ensemble dénombrable des vecteurs qui servent à définir $X(t)$, dans le cas général, $\Phi_0(t)$ peut dépendre des valeurs de ξ_u sur un ensemble de mesure nulle, ou même en un point isolé,

si $\omega(t)$ est discontinu en ce point; nous dirons dans ce dernier cas qu'il s'agit d'un ξ_u *instantané*. La formule (II.1.4) conserve dans ces cas un sens très clair; elle définit une fonction dont la covariance est $\omega(t)$. Au contraire, la formule (II.1.1), qui ne peut définir que des points de Ω, ne convient pas dans le cas général; nous ne l'utiliserons donc que dans le cas où $\sigma(u)$ est une vraie fonction (6).

II.2. Définitions et remarques préliminaires. — Les fonctions $\Phi(t)$ sont les fonctions définies par la formule

$$\Phi(t)=\int_0^t \mathrm{F}(t,\,u)\,\xi_u\sqrt{du} \qquad (t>0), \tag{II.2.1}$$

où, pour chaque t, $\mathrm{F}(t,\,u)$ est une σ-fonction de u définie dans $(0,\,t)$. Précisons une fois pour toutes que les formules où intervient $\mathrm{F}(t,\,u)$ supposent $0\leqq u\leqq t$. Dans le cas où $\mathrm{F}(t,\,u)$ est une vraie fonction, nous pouvons écrire

$$\Phi(t)=\int_0^t \mathrm{F}(t,\,u)\,d\mathrm{X}(u). \tag{II.2.2}$$

Dans tous les cas, nous désignerons par $\mathrm{X}(t)$ la fonction

$$\mathrm{X}(t)=\int_0^t \xi_u\sqrt{du}. \tag{II.2.3}$$

La fonction $\mathrm{F}(t,\,u)$ sera appelée le *noyau* de la représentation considérée de $\Phi(t)$; $\mathrm{X}(t)$ est donc la fonction de noyau unité. *Nous ne considérons ici que les valeurs positives de t. Les définitions de la fonction* X(.), *de la ligne* C, *et de l'espace* Ω *qui la contient, sont supposées modifiées en conséquence.*

Nous désignerons par L la ligne représentant $\Phi(t)$; elle part toujours du point $\Phi(-0)$ pris comme origine. Nous désignerons par K et K* les classes de fonctions représentables respectivement par les formules (II.2.1) et (II.2.2). La première est plus étendue que la seconde. Cela n'est pas évident; il peut arriver qu'un noyau qui n'est pas une vraie fonction définisse une fonction $\Phi(t)$ qui soit tout de même de la classe K*. Mais un exemple tel que

$$\Phi(t)=\int_0^{t+0} \sqrt{\delta(u-t)}\,\xi_u\sqrt{du}=\xi_t \tag{II.2.4}$$

(6) Pour plus de détails sur les σ-fonctions, voir *Bull. Sc. math.*, t. 80, 1956, p. 83. Rappelons seulement que la décomposition classique de $\omega(t)$ en trois termes, un terme absolument continu $\omega_0(t)$, un terme continu $\omega_1(t)$ qui ne varie que sur un ensemble de mesure nulle, et un terme $\omega_2(t)$ qui ne varie que par sauts, conduit à une décomposition de $\sigma(t)$ en trois termes, deux à deux orthogonaux dans n'importe quel intervalle, et dont le premier seul est une vraie fonction; nous dirons que les deux autres sont la *partie singulière* et la *partie liée aux discontinuités* de $\omega(t)$.

[$\delta(.)$ étant la fonction de Dirac] montre que les vecteurs $\Phi(t)$ peuvent être tous deux à deux rectangulaires. La ligne L (qui dans ce cas n'est pas une courbe continue) ne peut être placée que dans un espace de Hilbert à une infinité non dénombrable de dimensions. Au contraire la ligne L représentant une fonction de la classe $K^\star$ est dans l'espace Ω défini par C, qui n'a qu'une infinité dénombrable de dimensions. Donc la fonction définie par la formule (II.2.4) n'appartient pas à $K^\star$.

Nous désignerons par Ω_Φ l'espace de Hilbert défini par la ligne L, et par $\Omega_{t,\Phi}$ le plan de l'arc (o, t) de cette courbe. Si $F_0(t, u)$ est la partie de $F(t, u)$ qui est une vraie fonction [*cf.* note (6) ci-dessus], et $\Phi_0(t)$ la partie correspondante de $\Phi(t)$, la ligne L_0 lieu du point $\Phi_0(t)$ est la projection de L sur Ω, et le plan de l'arc (o, t) de cette ligne est l'intersection de Ω_t et $\Omega_{t,\Phi}$. Si $F(t, u)$ n'est pas une vraie fonction de t, u dans l'intervalle (o, T) (c'est-à-dire pour $o \leq u \leq t \leq T$), $\Omega_{t,\Phi}$ ne se réduit pas à cette intersection. Inversement, Ω_t peut aussi ne pas être contenu dans $\Omega_{t,\Phi}$; c'est le cas, en particulier, s'il existe sur l'axe des t un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure positive tel que $F(t, u)$ soit identiquement nul quand $u \in \mathcal{E}$.

II.3. La covariance. — La covariance de $\Phi(t)$, dont la donnée suffit à définir les propriétés intrinsèques de $\Phi(t)$, est

$$\text{(II.3.1)} \quad \Gamma(t_1, t_2) = \Phi(t_1)\,\Phi(t_2) = \int_0^t F(t_1, u)\,F(t_2, u)\,du \qquad [t = \mathrm{Min}(t_1, t_2)],$$

tandis que la covariance mixte de $\Phi(t)$ et $X(t)$ est

$$\text{(II.3.2)} \qquad \Phi(t_1)\,X(t_2) = \int_0^t F(t_1, u)\,du = \int_0^t F_0(t_1, u)\,du.$$

La formule (II.3.1) montre l'importance de l'équation (E). La résolution permet de passer de la définition de $\Phi(t)$ par sa covariance à son expression explicite (II.2.1) ou (II.2.2).

On remarque que, pour l'étude intrinsèque de $\Phi(t)$, on ne change rien en remplaçant $F(t, u)$ par $\varepsilon(u)\,F(t, u)$ où $\varepsilon(u) = \pm 1$. Ce facteur, qui n'intervient que par son carré, n'a même pas besoin d'être une fonction mesurable de u. Au contraire, pour l'étude jointe de $\Phi(t)$ et $X(t)$, il faut préciser le signe de $F(t, u)$, qui doit être, pour chaque t fixe, une fonction de u, mesurable dans (o, t), donc sommable (puisqu'elle est de carré sommable). La condition que le signe $\varepsilon(u)$ de $F(t, u)$ soit, pour chaque t fixe, une fonction mesurable de $\omega(u)$ suffit, si elle est

$$\text{(II.3.3)} \qquad \omega(t, u) = \int_0^u F^2(t, v)\,dv$$

vérifiée pour plusieurs noyaux F_n, pour l'étude jointe des fonctions correspondantes $\Phi_n(t)$ [dont l'une peut être $X(t)$].

II.4. Représentations propres et représentations impropres. — Nous dirons que ξ_u est *sans effet* sur $\Phi(t)$ jusqu'à l'instant $T > u$ s'il existe un petit intervalle $[u, u')$ qu'on puisse négliger dans le calcul de l'intégrale (II.1.1), quel que soit $t \in [u, T)$. En d'autres termes, cela veut dire que, pour tout $t \in [u, T)$,

$$(II.4.1) \qquad \int_{u-0}^{t'} F^2(t, v)\, dv = \omega(t, t') - \omega(t, u, 0) = 0 \qquad [t' = \mathrm{Min}(t, u')].$$

La borne supérieure $U = f(u)$ des T pour lesquels il en est ainsi définit l'*instant à partir duquel l'effet de ξ_u se fait sentir* (7).

Désignons par E_0 l'ensemble des $u \geqq 0$ pour lesquels $f(u) = u$, c'est-à-dire que l'effet de ξ_u est *immédiat;* par E_1 l'ensemble de ceux pour lesquels $u < f(u) < \infty$, c'est-à-dire que l'effet de ξ_u est *retardé;* enfin par E_2 l'ensemble des u pour lesquels $f(u) = \infty$, c'est-à-dire que ξ_u est sans aucun effet sur la fonction $\Phi(t)$ (8).

On remarque que la condition (II.4.1) reste nécessairement vérifiée si l'on remplace u par un autre nombre de l'intervalle (u, u'). Il en résulte évidemment que E_2, ainsi que la réunion de E_1 et E_2, sont des réunions d'intervalles ouverts à droite.

Nous dirons que *la représentation* (II.2.1) *de $\Phi(t)$ est propre* [ou que *le noyau $F(t, u)$ est propre*] dans un intervalle $(0, T)$ [ou sur toute la demi-droite $(0, \infty)$] si cet intervalle (ou cette demi-droite) est entièrement contenu dans E_0. Dans le cas contraire, elle sera *impropre*.

II.5. Classes de noyaux équivalents (9). — 1° Nous dirons qu'un noyau $F(t, u)$ est *équivalent à zéro* si la fonction $\omega(t, u)$ [formule (II.3.3)] est identiquement nulle.

Nous dirons que deux noyaux sont *équivalents (au sens strict)*, ou appartiennent à une même *classe*, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une combinaison des trois opérations suivantes, qui sont sans effet sur la covariance, donc aussi sur la définition intrinsèque de $\Phi(t)$.

Opération a. — C'est l'addition à $F(t, u)$ d'un noyau équivalent à zéro.

---

(7) Précisons que nous ne distinguons pas ici le cas où il s'agit d'un ξ_u instantané et celui où il du ξ_u s'agit moyen relatif à un petit intervalle $(u, u + du)$ $(du > 0)$. Quand nous voudrons préciser qu'il s'agit du second cas, nous introduirons $\xi_u \sqrt{du}$ plutôt que ξ_u. Nous ne distinguerons pas non plus le cas où cet effet se fait sentir brusquement à l'instant $U = f(u)$ (ou $U + 0$) de celui où il se fait sentir progressivement à partir de cet instant.

(8) Le langage du calcul des probabilités est ici très intuitif. Chaque ξ_u définit une information, qui peut être, soit immédiatement utile pour l'étude de la fonction aléatoire $\Phi(t)$, soit utilisable avec retard, soit définitivement inutile.

(9) Les définitions introduites ici ne sont pas les mêmes que dans ma Note du 19 mars 1956 (*C. R. Acad. Sc.*, 242, p. 1575).

Opération b. — C'est la multiplication de $F(t, u)$ par un facteur $\varepsilon(u)$ toujours égal à ± 1.

Ces deux opérations sont triviales, et il est commode de ne même pas considérer comme distincts deux noyaux déduits l'un de l'autre par ces opérations. Ils sont tous les deux propres, ou tous les deux impropres.

Opération c. — C'est un changement de variable $u = \varphi(v)$. Supposons d'abord la fonction $\varphi(v)$ absolument continue, croissant avec v de zéro à l'infini, toujours $\geq v$, et non identique à v. En posant $t = \varphi(\tau)$, il vient

$$\Phi(t) = \int_0^{\tau} F[t, \varphi(v)]\, \eta_v \sqrt{\varphi'(v)}\, dv \qquad (\eta_v = \xi_u),$$

d'où, en désignant par $G(t, v)$ la fonction égale à $F[t, \varphi(v)]\sqrt{\varphi'(v)}$ si $v < \tau$ et nulle si $v > \tau$,

$$\varphi(t) = \int_0^{t} G(t, v)\, \eta_v \sqrt{dv}. \tag{II.5.1}$$

Par cette équation, on déduit de n'importe quel noyau donné, propre ou impropre, une infinité de noyaux équivalents, tous impropres. L'opération inverse permettant de retrouver le noyau initial, nous sommes conduits à supprimer la condition $u \geq v$, qui n'est pas vérifiée par cette opération inverse, et la remplacer par la condition moins restrictive, mais dépendant du noyau initial : $v \leq f(u)$ (notation du n° II.4). En d'autres termes, si l'on se donne d'abord la relation $u = \varphi(v)$ entre u et v, on définira une opération applicable seulement aux noyaux $F(t, u)$ qui sont nuls si $t < \mathrm{Max}(u, v)$.

D'autre part, ni la continuité, ni même le caractère biunivoque de la relation entre u et v, ne sont essentiels. On peut se donner sur l'axe des u deux ensembles $\mathcal{E}_u$ et $\mathcal{E}_v$ de même puissance, et établir une correspondance biunivoque seulement entre les u qui appartiennent à $\mathcal{E}_u$ et les v qui appartiennent à $\mathcal{E}_v$; on aura alors une transformation applicable seulement aux noyaux qui sont nuls si u n'appartient pas à $\mathcal{E}_u$. Pour la correspondance entre $\mathcal{E}_u$ et $\mathcal{E}_v$, la continuité peut être remplacée par une condition de mesurabilité : il faut que $F^2(t, u)\, du$ puisse être remplacé par $G^2(t, v)\, dv$, autrement dit que, sur l'ensemble transformé de $(v_1, v_2) \cap \mathcal{E}_v$, l'intégrale de $F^2(t, u)\, du$ soit bien définie, quels que soient v_1, v_2, et $t > \mathrm{Max}[v, \varphi(v)]$ $[v \in (v_1, v_2)]$. Cette condition est réalisée par exemple si $\mathcal{E}_u$ comprend une infinité d'intervalles disjoints e_ν, transformés d'intervalles e'_ν, la correspondance entre chaque e_ν et e'_ν étant continue et biunivoque; il n'est pas nécessaire que l'ordre des e_ν sur l'axe des u soit celui des e'_ν, et, pour chacun de ces intervalles, la fonction $\varphi(v)$ peut être indifféremment croissante ou décroissante.

On peut aussi établir une correspondance biunivoque entre un ensemble de mesure nulle et un ensemble de mesure positive, et transformer un noyau qui est une vraie fonction en un noyau singulier ou inversement.

2° Si un noyau $G(t, v)$ est équivalent à un noyau propre $F(t, u)$, on pourra toujours aisément retrouver ce noyau propre : le nombre $u = \varphi(v)$ qui doit être pris comme nouvelle variable est en effet l'instant à partir duquel l'effet de η_v se fait sentir. Cette remarque conduit alors à se poser le problème suivant : que donne cette opération appliquée à un noyau impropre quelconque $G(t, v)$? Peut-on toujours, sinon obtenir un noyau propre, du moins faire disparaître l'ensemble E_1?

La fonction $u = \varphi(v)$ étant donnée, il n'y a aucune difficulté si toutes ses valeurs sont distinctes : ou bien toutes les valeurs positives sont réalisées, et l'on a une représentation propre; ou bien il y a des lacunes, qui appartiennent à E_2, et l'axe des u se partage entre E_0 et E_2; E_1 est nécessairement vide.

Supposons maintenant qu'une même valeur de u corresponde à deux valeurs v' et v'' de v. On serait alors conduit à introduire au même instant u deux termes différents $\eta_{v'} G(t, v') \sqrt{dv'}$ et $\eta_{v''} G(t, v'') \sqrt{dv''}$, et l'on peut être tenté de penser que cette circonstance exclut toute représentation propre.

Or il y a des cas d'exception, dont le plus simple est celui où, après transformation, $\eta_{v'}$ et $\eta_{v''}$ ont des coefficients $c' F(t, u)\sqrt{du}$ et $c'' F(t, u)\sqrt{du}$ qui sont proportionnels, au moins pendant un intervalle de temps (u, u'). On posera alors

$$c' \eta_{v'} + c'' \eta_{v''} = c \xi_u \qquad (c^2 = c'^2 + c''^2),$$

de manière à réunir les deux termes en un terme unique $c \xi_u F(t, u)\sqrt{du}$; puis, à l'instant t', on introduira une autre combinaison de $\eta_{v'}$ et $\eta_{v''}$.

Il peut arriver qu'on obtienne ainsi des représentations propres. On peut en effet définir une fonction $u = \varphi(v)$ de manière qu'à chaque u donné correspondent deux valeurs v' et v'' de v, distinctes, et $\in (0, u)$, puis, en partant d'une fonction définie par une représentation propre, décomposer ξ_u en une somme de deux termes orthogonaux $\eta_{v'} \cos\varphi$ et $\eta_{v''} \sin\varphi$. De la représentation impropre obtenue, on remontera à la représentation propre par le regroupement de ces termes.

Ces remarques peuvent être généralisées. Rien ne nous empêche en effet de décomposer chaque ξ_u en un nombre quelconque ou même une infinité dénombrable de vecteurs orthogonaux $c_\nu \eta_{v_\nu}$, ou, inversement, si un nombre quelconque de valeurs u_ν de u conduisent à une même valeur v de $f(u)$, d'effectuer sur les ξ_u qui leur correspondent une substitution orthogonale, qui permettra dans certains cas de les remplacer par des vecteurs η_v dont les effets ne se feraient sentir que successivement. Mais cette méthode de recherche d'une représentation propre peut échouer dans des cas où pourtant cette représentation existe. C'est ce que prouvent les exemples suivants.

Premier exemple. — Posons

$$\Phi(t) = \int_0^t (\alpha t \xi'_u + \beta u \xi''_u)\sqrt{du} \qquad (\xi'_u \xi''_u = 0). \tag{II.5.2}$$

L'intervention simultanée, à chaque instant u, de deux vecteurs orthogonaux ξ'_u et ξ''_u, avec des coefficients qui ne sont proportionnels dans aucun intervalle (u, u'), pourrait faire croire qu'il n'existe pour cette fonction aucune représentation propre de la forme (II.2.1). Or le calcul de la covariance montre que cette fonction admet deux représentations propres, non équivalentes, de la forme

$$\int_0^t (\lambda t + \mu u)\, \xi_u \sqrt{du}, \tag{II.5.3}$$

λ et μ étant définis au signe près, pour chacune de ces représentations, par les formules

$$\alpha^2 = \lambda^2 + \frac{\lambda\mu}{2}, \qquad \beta^2 = \frac{\lambda\mu}{2} + \frac{\mu^2}{3} \qquad [\text{d'où } (\lambda+\mu)^2 = \alpha^2 + 3\beta^2] \quad (^{10}). \tag{II.5.4}$$

Deuxième exemple. — Partons du fait connu que $X(t)$ peut être défini dans $(0, 1)$ par la série de Fourier-Wiener (^{11})

$$X(t) = \xi_0 t + \sum_1^\infty \frac{1}{\pi\nu\sqrt{2}} [\xi_\nu(\cos 2\pi\nu t - 1) + \xi_{-\nu} \sin 2\pi\nu t],$$

les ξ_ν étant deux à deux orthogonaux. Donnons-nous une suite infinie dans les deux sens de nombres t_n croissant de zéro à l'infini, et, dans chaque intervalle (t_n, t_{n+1}), définissons $\dfrac{X(t) - X(t_n)}{\sqrt{t_{n+1} - t_n}}$ par une telle série, t étant seulement remplacé par $\dfrac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}$, et ξ_ν par $\xi_{n,\nu}$. On peut d'ailleurs supposer que les $\xi_{n,\nu}$ sont des ξ_u instantanés relatifs à des instants $u_{n,\nu}$ qui, pour chaque n fixe, croissant avec ν de t_{n-1} à t_n. On obtient ainsi pour $X(t)$ une représentation impropre de la forme (II.2.1).

Essayons alors d'en déduire une représentation propre pour une substitution sur u, qui devrait remplacer chaque $u_{n,\nu}$ par t_n, puisque chaque $\xi_{n,\nu}$ a un effet qui commence à se manifester à l'instant t_n. Il y a ainsi une infinité de ξ_u qui devraient avoir le même indice, et dans n'importe quel intervalle $(t_n, t_n + \tau)$, quel que petit que soit τ, il est indispensable, pour y définir $X(t)$, d'introduire une infinité dénombrable de nouvelles dimensions. On ne peut donc pas définir une substitution effectuée sur les $\xi_{n,\nu}$, qui permettrait de les remplacer par des variables η_ρ n'intervenant qu'à des instants $t_{n,\nu}$ qui forment une suite discrète,

---

(^{10}) Pour une étude plus complète de cet exemple, *voir* P. Lévy, Communication au Symposium de Brooklyn (avril 1955, *Proc.* en cours d'impression). Il n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un exemple plus général qui sera étudié plus loin (n^{os} II.7.4° et II.8.2°).

(^{11}) *Voir* R. E. A. C. Paley et N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain* (New-York, 1934), formule (37.06) relative au cas complexe. *Voir* aussi notre Mémoire déjà cité (*Second Berkeley Symposium*, p. 171), ou encore P. Lévy, *Le mouvement brownien* [*Mémorial des Sciences math.*, fasc. 126, p. 22, formule (36)].

et le procédé indiqué tout à l'heure pour essayer d'obtenir une représentation sans ξ_u à effet différé échoue complètement. Pourtant cette représentation existe : $X(t)$ est la fonction $\Phi(t)$ de noyau unité.

Ces exemples font penser qu'il y a une difficulté réelle, et ce n'est qu'à titre d'hypothèse que nous suggérons l'idée d'une théorie qui aurait l'aspect suivant : on définirait des *classes généralisées*, contenant des noyaux qui seraient *équivalents au sens large*. Si une fonction $\Phi(t)$ peut être représentée par une formule du type (II.2.1) dans laquelle chaque ξ_u serait sans effet ou à effet immédiat (c'est-à-dire que l'ensemble E_1 serait vide), chaque classe généralisée de représentations de cette fonction en contiendrait une et une seule (aux opérations a et b près), qui vérifierait cette condition, et on aurait une méthode pour l'obtenir.

Pour le moment, la seule chose sûre, dans cet ordre d'idées, est que la classe des noyaux équivalents à un noyau donné, au sens strict défini d'abord, est une notion trop restrictive, et que, de n'importe quelle représentation d'une fonction $\Phi(t)$ par la formule (II.2.1), on peut en déduire d'autres formant une classe plus générale.

Le premier des exemples ci-dessus montre qu'en tout cas il peut y avoir pour une même fonction $\Phi(t)$ plusieurs représentations propres, donc plusieurs classes distinctes. Même la fonction $X(t)$ admet les deux représentations propres distinctes

$$\pm\int_0^t \xi_u\sqrt{du}, \qquad \pm\int_0^t \left(\frac{3u}{t}-2\right)\xi_u\sqrt{du},$$

et il résultera du n° II.8.2° que ce ne sont pas les seules.

II.6. Noyaux canoniques. — 1° Nous dirons que le noyau $F(t, u)$ est *canonique*, ou qu'il donne une *représentation canonique* de $\Phi(t)$, si le premier terme de la somme

$$\Phi(t') = \int_0^t F(t', u)\,\xi_u\sqrt{du} + \int_t^{t'} F(t', u)\,\xi_u\sqrt{du} \qquad (0 < t < t') \tag{II.6.1}$$

représente un vecteur contenu dans $\Omega_{t,\Phi}$. Le second terme étant toujours orthogonal à ce plan, cela revient à dire que le premier est la projection de $\Phi(t')$ sur $\Omega_{t,\Phi}$.

Théorème II.6.1. — *Si le noyau* $F(t, u)$ *est canonique, l'ensemble* E_1 (défini au n° II.4) *est vide.*

Si en effet il n'est pas vide, on peut, pour tout $u \in E_1$, déterminer un nombre $t' > f(u) > u$ auquel corresponde dans $\Phi(t')$ un élément non nul $F(t', u)\,\xi_u\sqrt{du}$.

Quel que soit t entre u et $f(u)$, cet élément est une partie du premier terme de $\Phi(t')$, et n'est pas contenu dans $\Omega_{t,\Phi}$; le noyau n'est donc pas canonique,

C. Q. F. D.

Par contre les intervalles $(u', u'') \in E_2$, auxquels correspondent des ξ_u qui n'interviennent ni dans $\Omega_{t,\Phi}$ ni dans $\Phi(t')$, n'empêchent pas un noyau d'être canonique. Donc :

COROLLAIRE II.6.1.—*Il y a deux et seulement deux types de noyaux canoniques : les noyaux canoniques propres, pour lesquels chaque ξ_u a un effet immédiat sur $\Phi(t)$, et les noyaux canoniques impropres, pour lesquels l'axe des u est la réunion des deux ensembles non vides* E_0 *et* E_2 (en exceptant le seul cas d'un noyau équivalent à zéro, cas où $\Phi = 0$ et où E_0 est vide).

L'ensemble E_2 est dans ce dernier cas une réunion d'intervalles. L'ensemble E_0 est toujours fermé à gauche ; il peut d'ailleurs ne comprendre que des points isolés ([12]).

2° THÉORÈME II.6.2. — *Pour que Ω_t et $\Omega_{t,\Phi}$ coïncident pour tout $t < T$, il faut et il suffit que, pour $0 \leq u \leq t < T$, le noyau $F(t, u)$ soit une vraie fonction, et soit un noyau canonique propre.*

Nous avons déjà vu (n° II.2) que la première condition est nécessaire et suffisante que pour Ω_t contienne $\Omega_{t,\Phi}$. Nous pouvons donc la supposer remplie, et représenter $\Phi(t)$ par la formule (II.2.2). Il s'agit de montrer que, dans ces conditions, les deux autres conditions sont nécessaires et suffisantes pour que $\Omega_{t,\Phi}$ contienne Ω_t.

Montrons d'abord qu'elles sont nécessaires. Si Ω_t et $\Omega_{t,\Phi}$ coïncident, le premier terme de $\Phi(t')$, contenu dans Ω_t (puisque le noyau est une vraie fonction), l'est aussi dans $\Omega_{t,\Phi}$, c'est-à-dire que le noyau est canonique. D'autre part, Ω_t étant constamment croissant, $\Omega_{t,\Phi}$ l'est aussi, ce qui n'aurait pas lieu si, E_1 étant vide (d'après le théorème II.6.1), E_2 ne l'était pas ; il y aurait alors des intervalles de temps pendant lesquels aucun nouveau ξ_u ne ferait croître $\Omega_{t,\Phi}$. Il faut donc que E_2 soit vide aussi, donc que le noyau soit propre.

Inversement, supposons le noyau canonique et propre. Puisqu'il est propre, à tout $u < T$ on peut associer un $t' < T$ tel que $F(t', u)\sqrt{du}$ ne soit pas nul. Puisqu'il est canonique, $F(t', u)\xi_u\sqrt{du}$, qui est l'accroissement du premier

([12]) En calcul des probabilités, si le noyau est canonique, le processus est déterministe dans tous les intervalles dont E_2 est la réunion. Au contraire le hasard intervient constamment dans E_0, que cet ensemble soit fini, dénombrable, ou ait la puissance du continu. Les informations ainsi recueillies dans tout intervalle où E_0 n'est pas vide correspondent à l'accroissement de $\Omega_{t,\Phi}$. Si l'on s'intéresse surtout aux nouvelles informations, on peut n'étudier d'abord le processus qu'aux instants $t \in E_0$. Dans E_2, les valeurs de $\Phi(t)$ sont des fonctions certaines de ses valeurs dans E_0.

terme de $\Phi(t')$ quand t varie de u à $u+du$, est contenu dans $\Omega_{t,\Phi}$ si $t>u$. Donc tous les $\xi_u\sqrt{du}$ d'indices $u<t$, et par suite Ω_t, sont contenus dans $\Omega_{t,\Phi}$,

C. Q. F. D.

Il est important d'observer que la dernière partie du raisonnement ne subsiste pas si le noyau n'est pas une vraie fonction. Donnons-nous par exemple une suite de nombres u_n partout dense dans $(0, \infty)$, et une série convergente $\sum a_n^2$. Le noyau $\sum_{u_n<t} a_n \xi_n \sqrt{\delta(u-u_n)}$, où δ est la fonction de Dirac, est canonique et propre, et pourtant Ω_t et $\Omega_{t,\Phi}$ sont orthogonaux; aucun de ces deux plans ne contient l'autre.

3° Théorème II.6.3 (*théorème d'unicité*). — *En ne considérant pas comme distincts deux noyaux déduits l'un de l'autre par les opérations a et b du n° II.5, chaque fonction $\Phi(t)$ a au plus une représentation canonique.*

Cela résulte de ce que, pour un noyau canonique, le premier terme $\Phi(t', t)$ de l'expression (II.6.1) de $\Phi(t')$, étant la projection de $\Phi(t')$ sur $\Omega_{t,\Phi}$, ne dépend que des propriétés intrinsèques de la fonction Φ. Il en est donc de même de la covariance

$$\Phi(t'_1, t)\,\Phi(t'_2, t) = \int_0^t F(t'_1, u)\,F(t'_2, u)\,du. \tag{II.6.2}$$

Le produit $F(t'_1, u)F(t'_2, u)$ est donc connu, et par suite $F(t, u)$ est connu, à cela près qu'on peut effectuer les opérations a et b du n° II.5.

L'importance de ce théorème résulte du fait que deux noyaux non équivalents, tous les deux propres, et qui sont tous les deux de vraies fonctions continues, peuvent représenter une même fonction $\Phi(t)$. Ainsi, d'après le n° II.5 (premier exemple), les noyaux u et $2u-t$ représentent la même fonction; de même t et $3u-2t$.

Dans les cas de ce genre, $\Omega_{t,\Phi}$ est le même pour les deux noyaux; Ω_t coïncide avec $\Omega_{t,\Phi}$ pour le noyau canonique, tandis que, pour l'autre noyau, $\Omega_{t,\Phi}$ n'est qu'une partie de Ω_t. La distance de $\Phi(t')$ à Ω_t, dont le carré est (si le noyau est une vraie fonction)

$$\int_t^{t'} F^2(t', u)\,du \tag{II.6.3}$$

est donc au moins aussi grande, et en général plus grande, pour le noyau canonique que pour l'autre. On peut ainsi vérifier que les noyaux $2u-t$ et $3u-2t$ ne sont pas canoniques; les noyaux u et t peuvent l'être, et, en fait, le sont évidemment.

4° *Conditions d'existence de la représentation canonique.* — D'après le théo-

rème II.6.1, une condition nécessaire est qu'on puisse obtenir une représentation pour laquelle l'ensemble E_1 soit vide. On pourrait chercher d'abord si cette condition est réalisée. Mais il ne semble pas plus compliqué d'étudier directement le problème posé, en utilisant le fait que, dans une représentation canonique, l'accroissement de $\Omega_{t,\Phi}$ est à chaque instant t, ou pour chaque intervalle dt, exactement défini par les nouveaux ξ_u relatifs à cet instant ou à cet intervalle. Au contraire, pour une représentation propre non canonique, l'introduction constante de ces ξ_u conduit à un ensemble (qui est Ω_t si le noyau est une vraie fonction) dont $\Omega_{t,\Phi}$ n'est qu'une partie.

Il s'agit donc de savoir si l'accroissement de $\Omega_{t,\Phi}$ peut être défini par une famille unique de vecteurs ξ_u, ou s'il est nécessaire d'introduire, au moins à certains instants, au moins un autre vecteur ξ'_u.

Il n'y a aucune difficulté en ce qui concerne les ξ_u instantanés, qui correspondent chacun à un accroissement instantané de $\Omega_{t,\Phi}$. Si nous posons

$$\Omega_{u-0,\Phi} \bigcup_{t<u} \Omega_{t,\Phi}, \qquad \Omega_{u+0,\Phi} = \bigcap_{t>u} \Omega_{t,\Phi},$$

la condition que $\Omega_{u+0,\Phi}$ contienne au plus une dimension de plus que $\Omega_{u-0,\Phi}$ (c'est-à-dire ne contienne qu'une direction orthogonale à $\Omega_{u-0,\Phi}$) est évidemment nécessaire pour l'existence d'une représentation canonique (puisque autrement il faudrait introduire instantanément au moins deux vecteurs indépendants ξ_u et ξ'_u). Elle est suffisante en ce qui concerne les ξ_u instantanés.

Il est ainsi évident qu'une fonction de la forme

$$\Phi(t) = \sum_{u_n<t} [F_n(t)\,\xi_n + G_n(t)\,\xi'_n]$$

(où $\{u_n\}$ est une suite quelconque de nombres positifs) n'a pas de représentation canonique si, au moins pour un n, ξ_n et ξ'_n étant indépendants, $F_n(t)$ et $G_n(t)$ ne varient pas proportionnellement au moins dans un petit intervalle $(u_n, u_n+\varepsilon)$. Au contraire chacun des deux termes est mis sous la forme canonique.

La question est beaucoup moins simple dans le cas des ξ_u non instantanés. On ne peut que considérer un petit intervalle $(u, u+du)$, pendant lequel $\Omega_{t,\Phi}$ s'accroît d'une infinité de dimensions, et la relation entre ξ_u et l'indice n'a pas le caractère précis qu'elle a dans le cas précédent. Il peut être alors difficile de savoir si les ξ_u qu'il faut introduire peuvent être rangés en une suite unique. Il peut être aussi difficile de déduire $\Omega_{t,\Phi}$ d'une expression analytique donnée de $\Phi(t)$. Aussi nous bornerons-nous au cas des fonctions

$$X(t) = \int_0^t \xi_u \sqrt{du}, \qquad Y(u) = \int_0^t \eta_u \sqrt{du},$$

$$\Phi(t) = \int_0^t [F(t, u)\,dX(u) + G(t, u)\,dY(u)],$$

où les ξ_u et η_u sont tous deux à deux orthogonaux, et où F et G sont de vraies fonctions. On pourrait penser que, si ces deux noyaux sont séparément canoniques, $\Omega_{t,\Phi}$ est l'espace produit de $\Omega_{t,X}$ et $\Omega_{t,Y}$, de sorte que son accroissement ne peut être défini qu'en introduisant à chaque instant deux vecteurs indépendants. Il n'en est pas toujours ainsi, puisque les intégrales (II.5.2) et (II.5.3) peuvent définir une même fonction $\Phi(t)$. Il en est au contraire ainsi, par exemple, dans le cas où $F(t, u)$ est égal à zéro ou un suivant que t est rationnel ou irrationnel, et $G(t, u) = 1 - F(t, u)$. La ligne L comprend alors, sur chacune des lignes C et C′ représentant $X(t)$ et $X(t)$, un ensemble de points partout dense sur cette ligne, de sorte que $\Omega_{t,\Phi}$ contient $\Omega_{t,X}$ et $\Omega_{t,Y}$, et, dans ce cas, $\Phi(t)$ n'admet pas de représentation canonique à un terme.

II.7. Caractérisation des noyaux canoniques. — 1° Nous avons déjà vu que le noyau canonique rend maxima l'intégrale (II.6.3), donc inversement minimalise l'intégrale

$$\int_0^t F^2(t', u)\, du \qquad (0 < t < t').$$

Mais cela ne résout pas le problème de savoir si un noyau donné individuellement est canonique ou non. Dans le cas, que nous considérerons d'abord, de noyaux propres qui soient de vraies fonctions, ce problème est résolu par le théorème suivant :

Théorème II.7.1. — *Si une vraie fonction* $F(t, u)$ *est un noyau propre, la condition nécessaire et suffisante pour que la formule* (II.2.2) *donne dans l'intervalle* (0, T) *la représentation canonique de la fonction* $\Phi(t)$ *qu'elle définit est qu'il n'existe aucune fonction* $x(t)$ *définie dans* (0, T), *qui n'y soit pas constante, et y vérifie les conditions*

$$\int_0^t F(t, u)\, dx(u) = 0, \tag{II.7.1}$$

$$\int_0^t \frac{[dx(u)]^2}{du} < \infty. \tag{II.7.2}$$

Cette dernière condition, compte tenu du théorème I.3, revient à dire qu'il existe une fonction $cx(u)$ admissible dans $(0, t)$. Il est essentiel de remarquer qu'elle peut cesser d'être vérifiée pour $t = T$; nous nous plaçons dans l'intervalle (0, T) ouvert à droite.

D'après le théorème II.6.2, il suffit de démontrer que la condition indiquée est nécessaire et suffisante pour que Ω_t et $\Omega_{t,\Phi}$ coïncident. Comme en tout cas $\Omega_{t,\Phi} \subset \Omega_t$, dire qu'ils ne coïncident pas, c'est dire qu'on peut trouver dans Ω_t une direction Ox perpendiculaire à $\Omega_{t,\Phi}$. Dans ce cas $x(u)$, composante de $X(u)$ suivant cette direction, est une fonction admissible dans $(0, t)$, n'y est pas cons-

tante, et n'intervient pas dans le calcul de la fonction Φ dans cet intervalle, puisque $\Phi(u)$ y est toujours contenu dans $\Omega_{t,\Phi}$. Elle vérifie donc l'équation (II.7.1) pour tout $t < T$. Les conditions indiquées dans l'énoncé pour la fonction $x(t)$ sont ainsi vérifiées. L'existence d'une telle fonction est bien nécessaire pour que le noyau $F(t, u)$ *ne soit pas* canonique.

Inversement, supposons qu'une telle fonction $x(u)$ existe; alors, pour chaque t fixe, la condition (II.7.2) exprime qu'on peut placer l'axe des x de manière que la composante de $X(u)$ suivant cet axe soit de la forme $c\,x(u)$. La condition (II.7.1) exprime que $\Phi(t)$ est toujours perpendiculaire à cet axe, qui est ainsi contenu dans Ω_t, mais non dans $\Omega_{t,\Phi}$, et, d'après le théorème II.6.2, le noyau n'est pas canonique, C. Q. F. D.

2° L'extension au cas du noyau impropre ne présente aucune difficulté. Il faut en tout cas que l'ensemble E_1 soit vide, et, les ξ_u d'indices $u \in E_2$ n'intervenant pas dans $\Phi(t)$, il n'y a qu'à en faire abstraction, en remplaçant $X(t)$ par

$$X_0(t) = \int_{E_0 \cap (0,\,t)} dX(u),$$

et Ω_t par Ω_{t,X_0}. On peut exprimer le même résultat en disant que, $\Omega_{t,\Phi}$ ne croissant pas dans E_2, on peut prendre comme nouvelle variable la mesure t_0 de $E_0 \cap (0, t)$ et appliquer le théorème précédent avec cette variable. Si le noyau est une vraie fonction, E_0 a une mesure positive, et il n'y a aucune difficulté

Il n'est pas aussi simple de supprimer la restriction que le noyau soit une vraie fonction. Remarquons simplement que, si E_1 est vide (condition en tout cas nécessaire), l'existence d'un ξ_u instantané et à effet immédiat ne peut créer aucune difficulté. Il appartient à $\Omega_{t,\Phi}$ dès que $t > u$, et $F(t', u)\,\xi_u$ appartiendra toujours à $\Omega_{t,\Phi}$. Un tel terme ne peut pas empêcher le noyau d'être canonique. L'extension au cas où la σ-fonction $F(t, u)$ a une partie singulière semble plus difficile.

3° Corollaire II.7.1. — *Si l'équation* (II.7.1) *n'admet aucune solution non constante, le noyau* $F(t, u)$ *est canonique.*

Ce corollaire, évident si le noyau est une vraie fonction, subsiste en tout cas. Son hypothèse implique en effet que $\Phi(u)$ ne soit identiquement nul en projection sur aucune droite de Ω_t. Donc Ω_t ne contient aucune droite perpendiculaire à $\Omega_{t,\Phi}$, C. Q. F. D.

Remarquons maintenant que, si $\dfrac{\partial F(t, u)}{\partial u}$ existe et est borné dans (0, T), et si l'on suppose $x(0) = 0$, l'équation (II.7.1) se réduit à l'équation de Volterra.

$$F(t, t)x(t) = \int_0^t \frac{\partial F(t, u)}{\partial u}\,x(u)\,du. \tag{II.7.3}$$

Des propriétés connues de cette équation résulte alors que :

COROLLAIRE II.7.2. — *Si* $F(t, t)$ *est continu et ne s'annule pas dans* $[0, T)$, *et si la dérivée* $\frac{\partial F(t, u)}{\partial u}$ *existe et est bornée dans cet intervalle, le noyau* $F(t, u)$ *y est canonique.*

En particulier, les conditions de continuité étant supposées remplies, si $F(0, 0) \neq 0$, le noyau est canonique au moins dans un petit intervalle $(0, T)$. En dehors du cas où la fonction $F(t, u)$ admet des singularités, le cas singulier est celui où $F(0, 0) = 0$. Nous allons étudier un exemple de ce cas.

4° *Exemple. Le cas d'un polynome homogène.* — Soit le noyau

$$F(t, u) = \sum_0^p a_h t^{p-h} u^h. \tag{II.7.4}$$

L'équation (II.7.1) est alors d'un type bien connu, réductible par des dérivations successives à une équation différentielle linéaire; le caractère d'homogénéité se conservant, cette équation est du type d'Euler. On sait qu'on l'intègre en cherchant des solutions de la forme $x(u) = u^s$. Portant donc directement cette expression de $x(u)$ dans l'équation

$$\int_0^t \sum_0^p a_h t^{p-h} u^h x'(u)\, du = 0, \tag{II.7.5}$$

nous obtenons l'équation caractéristique

$$\sum_0^p \frac{a_h}{s+h} = 0. \tag{II.7.6}$$

La solution générale de l'équation (II.7.4) est alors une combinaison linéaire d'expressions de la forme u^s, ou éventuellement $u^s(\log^k u)$ $(k > 0)$, s étant racine de l'équation (II.7.6). Si $s = \sigma + i\tau$, on obtient les solutions réelles en séparant $u^\sigma \cos(\tau \log u)$ et $u^\sigma \sin(\tau \log u)$. De toute façon, la condition (II.7.2) est vérifiée seulement si $\mathcal{R}(s) > \frac{1}{2}$ (*cf.* corollaire I.4.3). Si cette condition n'est vérifiée pour aucune des racines de l'équation (II.7.6), aucune solution non nulle de l'équation (II.7.5) ne vérifie la condition II.7.2. Donc :

THÉORÈME II.7.2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le noyau* (II.7.4) *soit canonique est que toutes les racines de l'équation* (II.7.6) *aient leurs parties réelles* $\leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour $p = 1$, $a_0 + a_1 = 1$ [condition que, sauf pour le noyau canonique $c(t - u)$, on réalise en divisant par $a_0 + a_1$], on trouve $s = -a_0$, et la condition cherchée est $a_0 \geq -\frac{1}{2}$ [cf. *loc. cit.* (4) et (10)].

Remarquons d'autre part que la covariance $\Gamma(t, t')$ liée au noyau (II.7.4) est, si $t' > t$,

$$\int_0^t \sum_0^p a_h t'^{p-h} u^h \mathrm{F}(t, u)\, du = \sum_0^p c_h t'^{p-h} t^{p+h+1}, \tag{II.7.7}$$

avec

$$c_h = a_h \sum_0^p \frac{a_k}{h+k+1}. \tag{II.7.8}$$

La détermination des coefficients a_h quand on connaît la covariance dépend ainsi d'un système d'équations algébriques d'ordre 2^{p+1}. Les noyaux $\mathrm{F}(t, u)$ et $-\mathrm{F}(t, u)$ n'étant pas distincts, il y a au plus 2^p solutions distinctes. La réduction du système (II.7.8) à un système d'ordre 2^p est d'ailleurs facile. On a en effet évidemment

$$\begin{aligned} \delta\Phi(t) &= dt \int_0^t \frac{\partial \mathrm{F}(t, u)}{\partial t}\, d\mathrm{X}(u) + \mathrm{F}(t, t)\, \delta \mathrm{X}(t) \\ &= \mathrm{S} t^p \xi_t \sqrt{dt} + \mathrm{O}(dt) \qquad \left(\mathrm{S} = \sum_0^p a_h\right), \\ \mathrm{S}^2 &= \lim_{dt \searrow 0} \frac{[\delta\Phi(t)]^2}{t^{2p}\, dt}. \end{aligned}$$

Si l'on choisit pour S la valeur positive ou nulle, on est ramené à un système d'ordre 2^p.

Pour $p = 1$, $\mathrm{S} = 1$, on obtient ainsi deux solutions, liées par la relation involutive $a'_0 + a''_0 + 1 = 0$. Si elles sont réelles, le noyau canonique est celui qui correspond à la plus grande valeur de a_0. Dans le cas contraire, c'est que la fonction donnée n'est pas une covariance [cf. *loc. cit.* (10)].

Si $p > 1$, et qu'il s'agisse d'une covariance effectivement obtenue en partant d'un noyau réel, il y a au moins deux solutions réelles, exceptionnellement confondues. Nous ne savons pas s'il peut y en avoir plus. Mais, comme nous le verrons au n° II.8, il y a une infinité d'autres noyaux propres, non canoniques, qui sans être de la forme (II.7.4) correspondent à la covariance (II.7.7).

Les solutions imaginaires n'ont ici aucune signification, puisque nous nous sommes placés dans un espace de Hilbert réel. D'ailleurs, dans le cas complexe, il faudrait, dans les équations (II.7.8), remplacer $a_h a_k$ par le produit hermitien $a_h \bar{a}_k$.

II.8. Les noyaux de Goursat. — 1° Ce sont les noyaux de la forme

$$\mathrm{F}(t, u) = \sum_1^p f_h(t)\, \varphi_h(u). \tag{II.8.1}$$

L'*ordre* de ce noyau est égal au nombre p des termes, à condition qu'il ne soit pas possible de le représenter par une somme analogue avec moins de p termes.

La covariance liée à un tel noyau est

$$\text{(II.8.2)} \qquad \begin{cases} \Gamma(t_1, t_2) = \sum_1^p f_h(t') \int_0^t \varphi_h(u)\, \mathrm{F}(t, u)\, du = \sum_1^p f_h(t')\, g_h(t) \\ [t = \mathrm{Min}(t_1, t_2),\ t' = \mathrm{Max}(t_1, t_2)], \end{cases}$$

l'expression de $g_h(t)$ pouvant s'écrire

$$\text{(II.8.3)} \qquad g_h(t) = \sum_1^p f_k(t)\, \mathrm{A}_{h,k}(t) \qquad \left[\mathrm{A}_{h,k}(t) = \int_0^t \varphi_h(u)\, \varphi_k(u)\, du\right].$$

Certains des $g_h(t)$ pouvant être identiquement nuls, cette formule démontre seulement la première partie du théorème suivant :

THÉORÈME II.8.1. — 1° *Si* $\mathrm{F}(t, u)$ *est un noyau de Goursat d'ordre* p, *la covariance qui lui correspond, considérée comme fonction de* t *et* t', *est un noyau de Goursat d'ordre* $q \leq p$. 2° *Si de plus le noyau* $\mathrm{F}(t, u)$ *est canonique,* $q = p$; *s'il n'est pas canonique, les deux cas* $q = p$ *et* $q < p$ *sont possibles.*

Pour la démonstration de la deuxième partie, je renverrai au théorème 4.7 de mon Mémoire de Berkeley [*loc. cit.* (4)], et aux exemples considérés dans le chapitre 3 dudit Mémoire. Indiquons aussi sans démonstration le théorème suivant, qui est la traduction géométrique du théorème 4.8 du même Mémoire.

THÉORÈME II.8.2. — *Pour que l'intersection de* $\Omega_{t,\Phi}$ *et du plan* $\Omega_{(t,\infty)\Phi}$ *de l'arc* (t, ∞) *de la ligne* L *se réduise quel que soit* $t > 0$ *à un plan euclidien à* p *dimensions, il faut et il suffit que la covariance, considérée comme fonction de* t *et* t', *soit un noyau de Goursat d'ordre* p.

Ce théorème s'applique en particulier (et devient trivial) dans le cas d'une fonction $\Phi(t)$ solution d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $p - 1$ dont les coefficients sont des fonctions scalaires de t. En dehors de ce cas, $\Phi(t)$ est au plus $p - 1$ fois dérivable, et, s'il l'est, l'intersection de $\Omega_{t,\Phi}$ et $\Omega_{(t,\infty),\Phi}$ est le plan défini par le vecteur $\Phi(t)$ et ses $p - 1$ dérivées.

2° Le théorème précédent nous conduit à une méthode naturelle de recherche du noyau canonique lié à une covariance donnée de la forme (II.8.2). Le noyau cherché est de la forme (II.8.1), les fonctions $f_h(t)$ étant connues. On peut alors obtenir toutes les solutions de cette forme et d'ordre p, canoniques ou non, en intégrant le système d'équations intégrales (II.8.3), système qu'on peut, par des dérivations suivies de l'élimination des fonctions $\mathrm{A}_{h,k}(t)$, de manière à ne conserver que les dérivées

$$\mathrm{A}'_{h,k}(t) = \varphi_h(t)\, \varphi_k(t)$$

et des dérivées d'ordres plus élevés, ramener à un système d'équations différentielles, complété par des conditions initiales déduites des équations contenant les $A_{h,k}(t)$.

On n'est naturellement pas sûr d'obtenir ainsi tous les noyaux propres liés à la covariance donnée. S'il en existe qui soient d'ordre $p'=p+r>p$, on peut chercher à les obtenir en se donnant r autres fonctions $f_h(t)$, et les associant à des fonctions $g_h(t)$ identiquement nulles. On déduira toujours les $\varphi_h(t)$ des équations (II.8.3) où les indices h et k varieront maintenant de 1 à p'.

Reprenons à ce point de vue le problème traité au n° II.7.4°, et ajoutons au noyau (II.7.4) les termes $ct^{p-\alpha}u^{\alpha}$ et $c't^{p-\beta}u^{\beta}$. Le système (II.7.8) devient

$$\dot{c}_h = a_h\left[\sum_0^p \frac{a_k}{h+k+1} + \frac{c}{h+\alpha+1} + \frac{c'}{h+\beta+1}\right] \qquad (h=0,\ 1,\ \ldots,\ p), \tag{II.8.4}$$

$$\sum_0^p \frac{a_k}{k+\alpha+1} + \frac{c}{2\alpha+1} + \frac{c'}{\alpha+\beta+1} = \sum_0^p \frac{a_k}{k+\beta+1} + \frac{c}{\alpha+\beta+1} + \frac{c'}{2\beta+1} = 0. \tag{II.8.5}$$

Il est bien évident que, si $p>0$, on peut déterminer les a_k de manière à vérifier les équations (II.8.5). En prenant ensuite les c_h définis par les formules (II.8.4), on obtient une covariance de la forme (II.8.2), à laquelle correspond, en dehors des noyaux de la forme (II.8.1), au moins un noyau qui contient des termes à exposants non entiers.

Nous avons ajouté deux termes. Nous aurions pu en ajouter un nombre quelconque $\leq p+1$. Comme p n'est pas borné : *la différence entre l'ordre d'un noyau de Goursat et celui de la covariance correspondante n'est pas bornée supérieurement.*

Remarquons qu'en ajoutant ainsi, à un noyau de la forme (II.7.4), $p+1$ termes dont chacun contient deux paramètres c et α, et déterminant les a_h par les équations (II.8.5) convenablement généralisées, on obtient des noyaux dépendant effectivement de $2p+2$ paramètres, tandis que les covariances correspondantes sont de la forme (II.7.7) et ne dépendent que de $p+1$ paramètres. Donc : *il existe des covariances de la forme* (II.7.7) *à chacune desquelles correspondent des noyaux dépendant de* $p+1$ *paramètres.* Il semble même que ce soit le cas général, pour celles des fonctions de cette forme qui sont effectivement des covariances ([13]).

([13]) Un calcul analogue au précédent, qui sera développé ailleurs, montre que, quels que soient l'entier p et les exposants $\alpha_h > \frac{1}{2}$, la fonction $X(t)$ admet des représentations de la forme

$$\int_0^t \left[c_0 + \sum_1^p c_h\left(\frac{u}{t}\right)^{\alpha_h}\right]\xi_u\sqrt{du}.$$

Ainsi une même fonction peut avoir des représentations propres dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres (note rajoutée à la correction des épreuves).

III. — Intégration de l'équation (E).

III.1. Remarques préliminaires. — 1° Nous avons déjà vu (corollaire II.7.2) le rôle de la fonction $\sigma(t)=|F(t,\ t)|$: si le noyau est continu et qu'elle ne s'annule pas, le noyau est canonique.

Il est important d'observer qu'elle ne dépend que des propriétés intrinsèques de $\Phi(t)$, du moins si nous admettons la continuité du noyau et l'existence et la continuité de la dérivée première $\frac{\partial F(t,\ u)}{\partial t}=f(t,\ u)$. On a en effet dans ces conditions.

$$\delta\Phi(t)=dt\int_0^t f(t,\ u)\,\xi_u\sqrt{du}+F(t,\ t)\,\xi_t\sqrt{dt}\qquad(dt>0), \tag{III.1.1}$$

et par suite

$$\sigma^2(t)=F^2(t,\ t)=\frac{[\delta\Phi(t)]^2}{dt}. \tag{III.1.2}$$

Il est d'ailleurs facile de calculer $\sigma^2(t)$ en fonction de la covariance. On a en effet, pour $t'\geqq t$,

$$\frac{\partial\Gamma(t,\ t')}{\partial t}=F(t,\ t)\,F(t',\ t)+\int_0^t f(t,\ u)\,F(t',\ u)\,du,$$

$$\frac{\partial\Gamma(t,\ t')}{\partial t'}=\int_0^t F(t,\ u)\,f(t',\ u)\,du,$$

et par suite

$$\left[\frac{\partial\Gamma(t,\ t')}{\partial t}-\frac{\partial\Gamma(t',\ t)}{\partial t'}\right]_{t'=t}=F^2(t,\ t)=\sigma^2(t). \tag{III.1.3}$$

En raison de la propriété de symétrie de $\Gamma(t_1,\ t_2)$, cela revient à dire que $\frac{\partial\Gamma(t_1,\ t_2)}{\partial t_1}$ augmente brusquement de $\sigma^2(t)$ quand le point $(t_1,\ t_2)$ traverse la droite $t_1=t_2$ au point t, t_2-t_1 devenant positif à ce moment.

Dans un travail antérieur, nous avions indiqué la formule équivalente

$$\sigma^2(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{|\tau|}[\Gamma(t,\ t)-2\Gamma(t,\ t+\tau)+\Gamma(t+\tau,\ t+\tau)]. \tag{III.1.4}$$

2° Hypothèses relatives a la covariance donnée $\Gamma(t,\ t_2)$. — Il s'agit bien entendu d'une fonction réelle et symétrique. Puisque nous supposons le noyau continu et $\Phi(0)=0$, nous devons supposer la covariance continue et s'annulant avec t_1t_2. Nous supposerons d'autre part l'existence et la continuité, sauf à la traversée de la droite $t_1=t_2$, des dérivées premières et de la dérivée seconde

$$\gamma(t_1,\ t_2)=\frac{\partial^2\Gamma(t_1,\ t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}. \tag{III.1.5}$$

A la traversée de cette droite, la seule discontinuité est alors le changement de signe de la dérivée normale.

Ces conditions suffisent pour que l'une ou l'autre des formules (III.1.3) et (III.1.4) donnent pour $\sigma^2(t)$ une valeur bien définie, mais peut-être négative. Elles sont nécessaires pour la continuité de $F(t, u)$ et de sa dérivée $f(t, u)$.

Introduisons maintenant la forme quadratique en $\varphi(t)$

$$(III.1.6) \qquad Q = \int_0^\infty \sigma^2(t)\,\varphi^2(t)\,dt + \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(t, u)\,\varphi(t)\,\varphi(u)\,dt\,du,$$

où $\varphi(t)$ est une σ-fonction, nulle en dehors d'un intervalle que nous appellerons son support, et de carré sommable dans cet intervalle. La *condition de Loève*, nécessaire et suffisante pour que $\Gamma(t_1, t_2)$ soit une covariance, revient à dire que cette forme est non négative. Nous introduirons une condition un peu plus restrictive en la supposant strictement positive.

Lorsque toutes ces conditions sont réalisées, nous dirons qu'on est dans le *cas régulier*. Dans ce cas $\sigma^2(t)$ est toujours positif. En prenant en effet pour $\varphi^2(t)$ la fonction de Dirac $\delta(t - t_0)$, on trouve

$$Q = \sigma^2(t_0) > 0,$$

et, si les intégrales qui définissent Q sont prises de $-\infty$ à $+\infty$, cette conclusion subsiste pour $t_0 = 0$.

3° Conséquences de l'hypothèse $\sigma(t) > 0$. — Nous avons vu qu'un noyau continu vérifiant cette condition est nécessairement canonique. Il ne peut alors exister que deux noyaux continus, égaux et de signes contraires, qui soient solutions de l'équation (E). Nous dirons que les noyaux continus ainsi obtenus dans le cas régulier sont des *noyaux réguliers*.

Il y a naturellement une infinité d'autres solutions, déduites des noyaux réguliers par les opérations définies au n° II.5; mais elles sont toutes discontinues.

III.2. La première étape de l'intégration. — Cette première étape est la recherche d'une équation de la forme

$$(III.2.1) \qquad \delta\Phi(t) = dt \int_0^t G(t, u)\,d\Phi(u) + \xi_t \sigma(t) \sqrt{dt} \qquad (dt > 0)$$

pour définir la variation de $\Phi(t)$. Nous supposons toujours ξ_t normal au plan $\Omega_{t,\Phi}$, de sorte que le premier terme, comme celui de la formule (III.1.1) dans le cas d'un noyau canonique, est la projection de $\delta\Phi(t)$ sur ce plan. De toute façon $\sigma^2(t)$ s'identifie avec la fonction définie par la formule (III.1.4) (puisque $\sigma^2(t)\,dt$ est la partie principale de $[\delta\Phi(t)]^2$), et que nous supposons toujours positive, et, en choisissant convenablement le sens positif sur l'axe des ξ_t, on peut encore supposer $\sigma(t) > 0$.

Il reste à déterminer $G(t, u)$. Nous allons dans ce but former une équation intégrale qui lie $\gamma(t, u)$ et $G(t, u)$. On l'obtient en multipliant les deux membres de l'équation (III.2.1) par $\delta\Phi(x)$ $(o < x < t)$. Dans l'intégrale, il faut distinguer des autres l'élément $G(t, x)\,\delta\Phi(x)$ dont le produit par $\delta\Phi(x)$ est

$$G(t, x)\,[\delta\Phi(x)]^2 = G(t, x)\,\sigma^2(x)\,dx + o(dx).$$

Comme d'autre part

$$\delta\Phi(t)\,\delta\Phi(x) = \gamma(t, x)\,dt\,dx,$$

et que $\delta\Phi(x)$, contenu dans $\Omega_{t,\Phi}$, est orthogonal à ξ_t, en divisant par $dt\,dx$, on obtient l'équation

$$\text{(III.2.2)} \quad \gamma(t, x) = G(t, x)\,\sigma^2(x) + \int_0^t G(t, u)\,\gamma(u, x)\,du \qquad (o < x < t).$$

La fonction γ étant définie par la formule (III.I.5), il s'agit de déduire $G(t, x)$ de cette équation. Pour chaque t fixe, c'est une équation de Fredholm, et son déterminant n'est pas nul. Si en effet l'équation sans second membre

$$\sigma^2(x)\,\varphi(x) + \int_0^t \gamma(u, x)\,\varphi(u)\,du = o$$

avait une solution non identiquement nulle dans (o, t), en multipliant par $\varphi(x)$ et intégrant dans (o, t), on aurait un résultat en contradiction avec l'hypothèse $Q > o$. La détermination de $G(t, x)$ dépend donc de la résolution d'une équation de Fredholm, de noyau $\frac{\gamma(u, x)}{\sigma^2(x)}$, dont le déterminant n'est pas nul. Le problème se simplifie dans le cas déjà considéré où $G(t, u)$, donc aussi $\frac{\gamma(u, x)}{\sigma^2(x)}$, est un noyau de Goursat.

Pour le problème inverse, qui consiste à déduire $\gamma(t, x)$ et $\Gamma(t, x)$ de l'équation (III.2.2), complétée par la propriété de symétrie de ces fonctions, la méthode indiquée dans notre Mémoire de Berkeley de 1950 [*loc. cit.* (1)], consiste à intégrer l'équation (III.2.1) comme nous allons le faire, et en déduire la covariance $\Gamma(t, x)$.

III.3. Intégration de l'équation (III.2.1). — Si l'on pose

$$\text{(III.3.1)} \quad Y(t) = \int_0^t \xi_u \sigma(u)\,\sqrt{du} = \Phi(t) - V(t),$$

$$dV(t) = V'(t)\,dt \quad \text{et} \quad \delta Y(t) = \xi_t \sigma(t)\,\sqrt{dt}$$

sont respectivement égaux aux deux termes de l'expression (III.2.1) de $\Phi(t)$. Donc

$$\text{(III.3.2)} \quad V'(t) = \int_0^t G(t, u)\,d\Phi(u),$$

et $V'(t) \in \Omega_{t,\Phi}$, d'où, pour $o < u \leq t$, $V'(u) \in \Omega_{u,\Phi} \subset \Omega_{t,\Phi}$ et $V(t) \in \Omega_{t,\Phi}$. Cette condition étant réalisée, dans le cas du noyau canonique, par la différence

$$\delta\Phi(t) - \xi_t F(t, t)\sqrt{dt} = dt \int_0^t F(t, u)\, dX(u),$$

nous sommes assurés que c'est bien au noyau canonique que nous conduit l'équation (III.2.1). Or, en y remplaçant $\Phi(u)$ par $Y(u) + V(u)$ et posant

$$Z(t) = \int_0^t G(t, u)\, dY(u), \tag{III.3.3}$$

on obtient l'équation de Volterra

$$V'(t) - \int_0^t G(t, u)\, V'(u)\, du = Z(t). \tag{III.3.4}$$

On sait qu'elle se résout par la formule

$$V'(t) = Z(t) - \int_0^t R(t, u)\, Z(u)\, du, \tag{III.3.4}$$

où $R(t, u)$ est le noyau résolvant, défini lui-même par l'équation

$$G(t, u) + R(t, u) = \int_u^t G(t, \rho)\, R(\rho, u)\, d\rho = \int_u^t R(t, \rho)\, G(\rho, u)\, d\rho. \tag{III.3.5}$$

En substituant alors à $Z(t)$ son expression (III.3.3), et tenant compte de l'équation (III.3.5) pour simplifier l'expression obtenue, il vient

$$V'(t) = -\int_0^t R(t, u)\, dY(u) = -\int_0^t R(t, u)\, \xi_u \sigma(u) \sqrt{du}, \tag{III.3.6}$$

d'où enfin, en intégrant, et tenant compte de la formule (III.3.1)

$$\Phi(t) = \int_0^t \xi_u \sigma(u) \sqrt{du} \left[1 - \int_u^t R(\rho, u)\, d\rho \right]. \tag{III.3.7}$$

Telle est la solution de l'équation (III.2.1), et : *le noyau canonique qui correspond à la covariance* $\Gamma(t_1, t_2)$ *donnée est*

$$F(t, u) = \sigma(u) \left[1 - \int_u^t R(\rho, u)\, d\rho \right]. \tag{III.3.8}$$

Il a été obtenu, en partant de cette covariance par la formule (III.1.4), *suivie de la résolution de l'équation de Fredholm* (III.2.2), *du calcul du noyau résolvant* $R(t, u)$ *de l'équation de Volterra* (III.3.3), *et enfin par la formule* (III.3.8).

Compte tenu des hypothèses indiquées au n° III.1.2°, on obtient ainsi un noyau régulier qui, au signe près, est la seule solution continue de l'équation (E) ([14]).

III.4. CALCUL DE VÉRIFICATION. — La fonction $\Gamma(t_1, t_2)$ s'annulant sur les axes, et ses dérivées premières ayant à la traversée de la droite $t_1 = t_2$ une discontinuité définie par $\sigma^2(t)$, elle est bien définie (pour t_1 et t_2 positifs) par sa dérivée seconde $\gamma(t_1, t_2)$. Il suffit donc de vérifier que la fonction $F(t, u)$ que nous venons d'obtenir, qui vérifie évidemment la condition $F(t, t) = \sigma(t)$, vérifie aussi l'équation

$$\gamma(t, u) = \sigma(u) f(t, u) + \int_0^u f(t, v) f(u, v)\, dv \qquad \left[0 < u < t,\ f(t, u) = \frac{\partial F(t, u)}{\partial t}\right],$$

déduite de l'équation (E) par deux dérivations. De l'expression (III.3.8) de $F(t, u)$ on déduit d'ailleurs

$$f(t, u) = -\sigma(u) R(t, u),$$

de sorte que l'équation à vérifier prend la forme

$$\gamma(t, u) = -\sigma^2(u) R(t, u) + \int_0^u R(t, v) R(u, v) \sigma^2(v)\, dv \qquad (0 < u < t). \tag{III.4.1}$$

Il suffit à cet effet, en admettant provisoirement que l'équation (III.2.2), considérée comme équation en $\gamma(t, x)$, n'admet qu'une solution symétrique en t et x, de vérifier que les expressions de $\gamma(t, x)$ et $\gamma(u, x)$ déduites de la formule (III.4.1), vérifient bien l'équation (III.2.2). Il faut bien entendu, dans le dernier terme de cette équation, séparer les intervalles $(0, x)$ et (x, t). L'équation à vérifier s'écrit ainsi

$$\begin{aligned}
&-\sigma^2(x) R(t, x) + \int_0^x R(t, v) R(x, v) \sigma^2(v)\, dv - \sigma^2(x) G(t, x) \\
&\quad = -\int_0^x G(t, v) R(x, v) \sigma^2(v)\, dv - \sigma^2(x) \int_0^t G(t, u) R(u, x)\, du \\
&+ \int_0^x G(t, u)\, du \int_0^u R(x, v) R(u, v) \sigma^2(v)\, dv \\
&+ \int_x^t G(t, u)\, du \int_0^x R(x, v) R(u, v) \sigma^2(v)\, dv.
\end{aligned}$$

Cette équation est de la forme

$$A \sigma^2(x) + \int_0^x B R(x, v) \sigma^2(v)\, dv = 0,$$

A et B étant bien nuls, d'après l'équation (III.3.5).

([14]) Les remarques finales du n° II.5.2° prouvent que le théorème d'unicité ne s'applique qu'aux noyaux continus. Non seulement il y a une classe très générale de noyaux impropres équivalents à ce noyau, mais, dans un cas aussi simple que celui de $X(t)$, il y a d'autres noyaux propres. Ma Note du 5 mars 1956 [*loc. cit.* ([2])] contenait à ce sujet une phrase inexacte (fin du n° 1).

Il reste à montrer que la fonction $\gamma(t, x)$ est bien définie, quand $G(t, x)$ et $\sigma^2(x)$ sont connues, par l'équation (III.2.2) et sa propriété de symétrie. Or cette équation et cette propriété expriment que γ est la dérivée seconde de la covariance d'une fonction $\Phi(t)$ solution de l'équation (III.2.1) qui s'annule avec t. Il suffit donc de montrer que ces dernières conditions déterminent parfaitement $\Phi(t)$. Cela résulte du calcul très simple qui a réduit l'équation (III.2.1) à l'équation de Volterra (III.3.4), qui n'a qu'une solution.

III.4. Exemples de cas singuliers. — 1° Nous désignons ainsi d'une manière générale les cas où les hypothèses du n° III.1.2° ne sont pas vérifiées, même s'il ne s'agit pas d'une discontinuité du noyau ou de la covariance. Il s'agira surtout de cas où $\sigma(t)$ est nul, en certains points ou même identiquement, ce qui rend au contraire possible la continuité, à la traversée de la droite $t_1 = t_2$, des dérivées premières de la covariance, et aussi celle du noyau à la traversée de la droite $t = u$, si on le suppose défini et nul pour $u > t$. Cette dernière remarque montre que l'hypothèse $\sigma(t) = 0$ permet l'existence de noyaux impropres et cependant continus, déduits du noyau propre par un changement de variable sur u (opération c du n° II.5).

L'hypothèse $\sigma(t) = 0$ implique l'existence d'une σ-fonction $\varphi(t)$ non identiquement nulle qui annule la forme quadratique Q du n° III.1.2°; cela est vrai même si $\sigma(t)$ ne s'annule qu'en un point t_0; en effet, dans ce cas, Q est nul pour $\varphi(t) = \sqrt{\delta(t - t_0)}$. Montrons par un exemple que la réciproque n'est pas vraie.

C'est l'exemple connu de la fonction

$$\Phi(t) = X(t) - X(1)\,\mathrm{Min}\,(1, t), \tag{III.4.1}$$

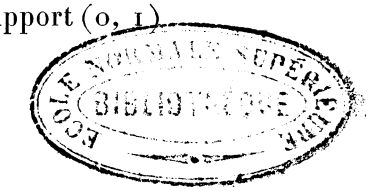
dont la covariance $\Gamma(t, u)$ pour $0 < u < t < 1$, est $u(1 - t)$; alors $\gamma(u, t) = -1$, cette dérivée étant nulle pour $t > 1$. La variation de $\Phi(t)$ est, dans $(0, 1)$

$$\delta\Phi(t) = -\Phi(t)\frac{dt}{1-t} + \xi_t\sqrt{dt} = -\frac{dt}{1-t}\int_0^t d\Phi(u) + \xi_t\sqrt{dt}, \tag{III.4.2}$$

tandis que, pour $t \geq 1$, $\delta\Phi(t) = \xi_t\sqrt{dt}$. On a donc toujours $\sigma(t) = 1$. On a d'autre part, quel que soit le coefficient c,

$$c\,dt\,\Phi(1) = c\,dt\int_0^1 d\Phi(u) = 0, \tag{III.4.3}$$

de sorte que, pour $t \geq 1$, en ajoutant cette expression à $\delta\Phi(t)$, on obtient pour cette variation une infinité d'expressions de la forme (III.2.1); il n'y a plus de théorème d'unicité, et c'est lié au fait que les fonctions $\varphi(t)$ de support $(0, 1)$ et constantes dans cet intervalle annulent Q.


ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE BIBLIOTHÈQUE

On remarque que, si $T' > T$, une fonction de support (o, T) peut être considérée comme ayant pour support (o, T'). Il en résulte qu'il existe un nombre T_0 bien défini tel que la forme Q apparaisse comme strictement positive dans (o, T) si $T < T_0$ et non si $T > T_0$. Si $T = T_0$, on ne peut rien affirmer *a priori*. Dans le cas de la fonction définie par la formule (III.4.1), Q n'est pas strictement positif dans (o, T_0). Il l'est au contraire dans le cas d'une fonction définie jusqu'à l'instant T_0 par un noyau canonique propre, le noyau étant ensuite nul dans un intervalle (T_0, T_1) (c'est-à-dire si $T_0 < u < t < T_1$), où par suite $\Omega_{t,\Phi}$ cesse de croître.

2° Nous allons maintenant supposer le noyau de la forme $g(t-u)\,H(t, u)$, $H(t, u)$ étant un noyau régulier, et $g(\tau)$ une fonction qui s'annule avec τ. Nous écartons ainsi les cas où la singularité du noyau ne serait pas la même en tous les points de la ligne $t = u$ [15]. Nous étudierons surtout le cas où $g(\tau) = \tau^\alpha$, et mentionnerons brièvement celui où $g(\tau)$ contient en outre des facteurs logarithmiques. En désignant par p la partie entière de α, nous supposerons de plus que $H(t, u)$ est $p+1$ fois dérivable.

Supposons d'abord $g(t-u) = (t-u)^p$, p étant un entier positif. Alors

$$\frac{\partial^p F(t, u)}{\partial t^p} = F_p(t, u) \tag{III.4.4}$$

est un noyau régulier qui, pour $t = u$, prend la valeur $p!\,H(t, t) \neq o$. La covariance correspondante est

$$\Gamma_p(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2p}\Gamma(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \tag{III.4.5}$$

Si donc $\Gamma(t_1, t_2)$ est connu, cette covariance est connue; on en déduit $F_p(t, u)$ par la méthode indiquée pour le cas régulier, puis $F(t, u)$ par la formule

$$F(t, u) = \int_u^t \frac{(t-\varphi)^{p-1}}{(p-1)!} F_p(\varphi, u)\, d\varphi. \tag{III.4.6}$$

On saura d'ailleurs sans difficulté si une covariance donnée se rattache à ce cas. En effet la formule (III.1.3) appliquée à $F_p(t, u)$ donne

$$\frac{\partial^{2p}}{\partial t^p \partial t'^p}\left[\frac{\partial\Gamma(t, t')}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma(t, t')}{\partial t'}\right] \to F_p^2(t, t) > o \qquad (t' \searrow t), \tag{III.4.7}$$

tandis que pour un indice $q < p$ la limite serait nulle.

---

[15] L'exemple du polynome homogène, étudié à la fin du chapitre II, se rattache au cas écarté ici, à moins qu'il ne soit de la forme $c(t-u)^p$.

3° Supposons maintenant $g(\tau)=\tau^\alpha$ (α positif non entier; nous désignerons sa partie entière par p). La méthode précédente subsiste, sans autre changement que le remplacement de la dérivée d'ordre p par la dérivée d'ordre α au sens de Riemann

$$\text{(III.4.8)} \qquad \mathrm{D}^\alpha \mathrm{F}(t,u)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{(t-\varphi)^{p-\alpha}}{(p-\alpha)!}\,\frac{\partial^p \mathrm{F}(\varphi,u)}{\partial \varphi^p}\,du,$$

la notation $(p-\alpha)!$ représentant bien entendu la fonction eulérienne $\Gamma(p-\alpha+1)$; de même, dans la formule (III.4.6), le remplacement de p par α implique l'introduction de la fonction eulérienne.

On traiterait de même le cas où $g(\tau)\sim\tau^\alpha\left(\log\frac{1}{\tau}\right)^\beta$ ($\tau\searrow 0$), et les cas analogues obtenus en introduisant des logarithmes itérés. Dans tous ces cas, une opération généralisant la dérivation d'ordre fractionnaire de Riemann, que j'ai indiquée autrefois (*Bull. Sc. math.*, 1926), permet de ramener le noyau considéré à un noyau régulier, qui n'est ni infini ni nul pour $t=u$.

Pour reconnaître qu'on est dans ces cas, et déterminer α (et éventuellement β, ...), le plus simple semble être de partir de la formule

$$\text{(III.4.9)} \qquad \Gamma(t+\tau,t+\tau)-2\Gamma(t,t+\tau)+\Gamma(t,t)$$
$$=\int_t^{t+\tau}\mathrm{F}^2(t+\tau,u)\,du+\int_0^t[\mathrm{F}(t+\tau,u)-\mathrm{F}(t,u)]^2du \qquad (\tau>0).$$

Nous supposerons $p=0$ [si $p>0$, on est ramené à ce cas par des dérivations ordinaires, qu'on continuera tant qu'on trouvera par la formule (III.4.7) des valeurs nulles de $\mathrm{F}_p(t,t)$].

Le premier terme au second membre de la formule (III.4.9) est, pour τ infiniment petit, équivalent à $\frac{\tau g^2(\tau)}{2\alpha+1}\mathrm{H}^2(t,t)$, donc, en nous bornant au cas où $g(\tau)=\tau^\alpha$, à $\frac{\tau^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\mathrm{H}(t,t)$. Pour évaluer la seconde intégrale, en supposant que $\frac{\partial \mathrm{H}(t,u)}{\partial t}$ soit borné, nous poserons $u=t-\varphi$. Pour $\varphi\in(0,\tau)$, la fonction intégrée est $\mathrm{O}(\tau^{2\alpha})$, et l'intégrale relative à cet intervalle est $\mathrm{O}(\tau^{2\alpha+1})$. Comme elle est positive, elle s'ajoute au premier terme sans changer l'ordre de grandeur.

D'autre part, pour $\varphi>\tau$, $g'(\varphi)=\alpha\varphi^{\alpha-1}$ et la valeur moyenne de $g'(\,.\,)$ dans l'intervalle $(\varphi,\varphi+\tau)$ sont du même ordre de grandeur. L'ordre de grandeur de l'intégrale relative à l'intervalle (τ,t) est donc, si $2\alpha-1\neq 0$, celui de

$$\tau^2\int_\tau^t \varphi^{2\alpha-2}\,d\varphi=\frac{\tau^2}{2\alpha-1}(t^{2\alpha-1}-\tau^{2\alpha-1}),$$

donc celui de $\tau^{2\alpha+1}$ si $\alpha<\frac{1}{2}$, et celui de τ^2 si $\frac{1}{2}<\alpha<1$. Pour $\alpha=\frac{1}{2}$, c'est celui de $\tau^2\log\frac{1}{\tau}$.

Tout compte fait, le premier membre de l'expression (III.4.9) est de l'ordre de grandeur de $\tau^{2\alpha+1}$ si $0<\alpha<\frac{1}{2}$, de celui de $\tau^2\log\frac{1}{\tau}$ si $\alpha=\frac{1}{2}$, et, si $\frac{1}{2}<\alpha<1$, il est de l'ordre de grandeur de τ^2, mais par soustraction d'un terme de la forme $\tau^2 f(t)$, est réduit à l'ordre de grandeur de $\tau^{2\alpha+1}$. On peut donc ainsi dans tous les cas déduire α de l'expression donnée de $\Gamma(t)$, et appliquer la méthode indiquée.

Ces remarques s'étendent sans peine au cas où il y a des facteurs logarithmiques.

III.5. Remarques finales. — Comme on le voit, nous n'avons pu donner que des exemples de cas singuliers, et nous sommes loin de pouvoir indiquer une méthode générale qui permettrait d'obtenir le noyau canonique toutes les fois qu'il existe. Même pour les noyaux de la forme $g(t-u)\,\mathrm{H}(t,u)$, $\mathrm{H}(t-u)$ étant un noyau régulier, le cas où $g(\tau)$ tend irrégulièrement vers zéro avec τ, et celui où $g(\tau)=o(\tau^p)$ quel que soit p, échappent à notre méthode.

Nous allons maintenant terminer par quelques remarques sur le cas où, dans un espace Ω donné *a priori*, $\Phi(t)$ est défini par la formule

$$\Phi(t)=\sum_1^\infty \xi_n\varphi_n(t), \tag{III.5.1}$$

les fonctions $\varphi_n(t)$ devant bien entendu vérifier la condition

$$\sum_1^\infty \varphi_n^2(t)<\infty. \tag{III.5.2}$$

En d'autres termes, le point $\Phi(t)$ est défini par ses coordonnées $\varphi_n(t)$. C'est un mode de définition qui s'applique évidemment aux fonctions $\Phi(t)$ les plus générales (16).

La covariance d'une telle fonction $\Phi(t)$ est évidemment

$$\Phi(t_1)\Phi(t_2)=\sum_1^\infty \varphi_n(t_1)\,\varphi_n(t_2). \tag{III.5.3}$$

Nous supposerons que Ω est le plan de la ligne L lieu du point $\Phi(t)$, c'est-

(16) Il n'est pas nécessaire de se limiter à une infinité dénombrable de vecteurs orthogonaux ξ_n. La formule (III.5.2) exige seulement que, pour chaque t, il y ait au plus une infinité dénombrable de $\varphi_n(t)$ qui soient différents de zéro.

Compte tenu de cette remarque, on voit que n'importe quelle fonction de la forme (II.2.1) peut être mise sous la forme (III.5.1).

à-dire qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$\sum_1^\infty a_n \varphi_n(t) = c \tag{III.5.4}$$

à coefficients non tous nuls et rendant la série $\sum a_n^2$ convergente ([17]). Nous ferons même une hypothèse plus restrictive : la fonction $\Phi(t)$ pouvant n'être définie que dans un certain intervalle (T, T'), aucune relation de la forme (III.5.4) n'est vérifiée dans aucun intervalle (t, t') intérieur à (T, T'). Alors le plan de n'importe quel arc de la ligne L coïncide avec le plan Ω de l'arc (T, T').

Cette condition est vérifiée en particulier pour les fonctions $\Phi(t)$ qui sont *analytiques*. Nous entendons par là que, non seulement toutes les fonctions $\varphi_n(t)$ sont analytiques, mais qu'il en est de même de toutes les combinaisons linéaires $\sum a_n \varphi_n(t) \left(\sum a_n^2 < \infty\right)$; ainsi le caractère analytique est indépendant des axes choisis dans Ω.

Que la fonction $\Phi(t)$ soit analytique ou non, il résulte de l'absence de relation de la forme (III.5.4) dans n'importe quel intervalle intérieur à (T, T') que $\Omega_{t,\Phi}$ est invariant dans cet intervalle. Si T est l'origine du processus, tous les ξ_n qui interviennent dans l'expression (III.5.1) de $\Phi(t)$ apparaissent instantanément à l'instant T, ce qui exclut évidemment toute représentation de la forme (II.2.1).

Il n'en est pas de même si T n'est pas l'instant origine. Tout ce qu'on peut dire, c'est que, si le plan de l'arc (T, T') a plus d'une direction orthogonale à $\Omega_{T,\Phi}$, il n'y a pas de représentation canonique de $\Phi(t)$. Mais il peut arriver que ce plan soit continu dans $\Omega_{T,\Phi}$ ou ne contienne qu'une direction orthogonale à $\Omega_{T,\Phi}$; dans ce cas, si $\Phi(t)$ n'est pas analytique dans (o, T) et a une représentation canonique jusqu'à l'instant T, il y a au plus un nouveau ξ_T à introduire à cet instant, et l'on obtient une représentation canonique impropre valable jusqu'à l'instant T'.

Si $T > -\infty$, et qu'on considère une fonction $\Phi(t)$ définie dans (T, T') par une formule du type (III.5.1), on peut toujours la prolonger à gauche de manière à réaliser le cas précédent, et obtenir une représentation canonique valable dans (T_0, T') $(T_0 < T)$. Cela est d'ailleurs artificiel. Une formule de la forme (III.5.1) représente dans (T, T') des fonctions, analytiques ou non, qu'il n'y a en général pas intérêt à représenter par la formule (II.2.1). Ces deux formules, sans être incompatibles, ne sont pas utiles dans les mêmes cas,

([17]) Si cette série est divergente, la condition (III.5.4) n'a de sens que dans une partie ω de Ω. Avec une topologie plus fine que celle de l'espace de Hilbert, on peut considérer qu'elle définit une variété linéaire fermée dans ω. Mais elle est partout dense dans Ω, et l'on ne peut pas la considérer comme une variété linéaire de cet espace.

et cela explique le fait que l'expression (III.5.1) n'implique en général aucune discontinuité de la covariance à la traversée de la ligne $t_1 = t_2$.

Au point de vue de l'équation (E), il résulte de ces remarques que, si $\Gamma(t, t')$ est donné dans $(0, \infty)$ et est une covariance, il peut n'exister aucune solution. Mais, si cette covariance est donnée seulement dans (t_0, ∞) $(t_0 > 0)$, c'est-à-dire si elle est donnée pour $t_0 < t < t'$, on peut toujours d'une infinité de manières la prolonger dans $(0, t_0)$ de manière à obtenir des solutions de l'équation (E).