PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

NICHOLAS M. KATZ
GÉRARD LAUMON

Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 62 (1985), p. 145-202
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1985__62__145_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TRANSFORMATION DE FOURIER ET MAJORATION DE SOMMES EXPONENTIELLES

par NICHOLAS M. KATZ *et* GÉRARD LAUMON

SOMMAIRE

0. Introduction 145
1. Dualité, perversité et pureté relatives 148
2. La transformation de Fourier pour les $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux 153
3. Stratifications et théorème d'uniformité pour les foncteurs $Rf_!$, $D_{X/S}$ et Rf_* 160
4. Un théorème d'uniformité pour la transformation de Fourier 169
5. Une première application du théorème d'uniformité de la transformation de Fourier aux sommes trigonométriques 174
6. Sommes trigonométriques que l'on peut rendre pures par adjonction d'un caractère multiplicatif auxiliaire d'ordre assez grand 183
7. Lien avec la transformation de Fourier pour les $\mathscr{D}$-Modules et application (conjecturale) à la détermination d'un « gros » ouvert de pureté géométrique des sommes trigonométriques 190

0. Introduction

Soit X un schéma *affine*, de type fini sur $\mathbf{Z}$, qui est *lisse*, purement de dimension relative $m \geqslant 0$ sur $\mathbf{Z}[1/N]$, pour un certain entier $N \geqslant 1$, et soient $f_1, \ldots, f_r$ $(r \geqslant 1)$ des fonctions sur X qui définissent un morphisme *fini* vers l'espace affine $\mathbf{A}^r_{\mathbf{Z}[1/N]}$,

$$f = (f_1, \ldots, f_r) : X \to \mathbf{A}^r_{\mathbf{Z}[1/N]}$$

(par exemple, si $h \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ est tel que l'idéal jacobien

$$\left(h, \frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_r}\right)$$

dans $\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ soit principal, engendré par un entier $N \geqslant 1$, et si $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_r \geqslant 1$ sont des entiers, on peut prendre pour X l'hypersurface de $\mathbf{A}^r_{\mathbf{Z}[1/N]}$ d'équation $h = 0$ et prendre $f_1 = x_1^{k_1}, \ldots, f_r = x_r^{k_r}$).

Étant donnés X et $f_1, \ldots, f_r$ comme ci-dessus, pour chaque r-uple $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{Z}^r$ et pour chaque nombre premier p, ne divisant pas N, on peut former la somme trigonométrique

$$S(p; a_1, \ldots, a_r) \overset{\text{dfn}}{=} \sum_{x \in X(\mathbf{F}_p)} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{r} a_j f_j(x)\right).$$

Plus généralement, pour chaque fonction g sur X qui est inversible sur X et pour tout caractère multiplicatif du corps $\mathbf{F}_p$

$$\chi_p : \mathbf{F}_p^\times \to \mathbf{C}^\times$$

on peut former la somme trigonométrique

$$S(p; a_1, \ldots, a_r; g, \chi_p) \overset{\text{dfn}}{=} \sum_{x \in X(\mathbf{F}_p)} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{r} a_j f_j(x)\right) \chi_p(g(x)).$$

Alors, nous prouvons (cf. (5.2), (5.2.1)) l'existence d'un polynôme non nul

$$F(y_1, \ldots, y_r) \in \mathbf{Z}[y_1, \ldots, y_r]$$

et l'existence d'une constante d (qui ne dépend que de la topologie algébrique de la variété complexe $X_{\mathbf{C}}$ munie de l'application $f_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^r_{\mathbf{C}}$ et qui est facilement calculable) ayant la propriété suivante : si

$$F(a_1, \ldots, a_r) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

alors, pour toute fonction inversible g sur X et pour tout caractère χ_p de $\mathbf{F}_p^\times$, on a l'estimation

$$|S(p; a_1, \ldots, a_r; g, \chi_p)| \leqslant d.(\sqrt{p})^m$$

(nous énonçons et prouvons en fait (cf. (5.2), (5.2.1)) un résultat légèrement plus fort, où $\mathbf{Z}[1/N]$ est remplacé par n'importe quel sous-anneau $R \subset \mathbf{C}$ qui est de type fini sur $\mathbf{Z}$ et (en (5.7)) où X n'est plus supposé lisse, ce dernier cas en suivant une suggestion de Deligne).

Comme on peut s'y attendre, de telles estimations sont obtenues comme conséquence d'une analyse précise de la cohomologie ℓ-adique qui donne lieu à de telles sommes et des résultats fondamentaux de Deligne sur les « conjectures de Weil ». La possibilité de faire cette analyse cohomologique repose sur deux idées.

La première est celle de la *transformation de Fourier* en cohomologie ℓ-adique (cf. n° 2), une opération qui existe « indépendamment » en chaque caractéristique $p > 0$. Grâce à l'interprétation cohomologique des sommes exponentielles et au théorème de changement de base pour la cohomologie à support propre, cette opération est directement reliée aux sommes trigonométriques. Une découverte récente, due à Brylinski, Deligne, Verdier et au second auteur de cet article, est que, bien que cela apparaisse assez étrange *a priori*, la transformation de Fourier commute à la dualité (cf. (2.1.3) et (2.1.5)). Une fois armé de ce résultat inattendu, il suffit de le combiner avec les résultats fondamentaux de Deligne (cf. [8]), à travers le formalisme de la perversité (cf. [1], [6] et n° 1), pour contrôler assez bien la situation en chaque caractéristique $p > 0$ (cf. (5.5)).

La deuxième idée est la suivante : bien que l'on ne puisse pas espérer regrouper les transformations de Fourier pour les caractéristiques $p > 0$ en une seule transformation de Fourier sur $\mathbf{Z}$ (sur $\mathbf{F}_p$, il y a $p - 1$ transformations de Fourier, une pour chaque caractère additif non trivial $\psi : \mathbf{F}_p \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ et il n'y a pas de façon raisonnable de choisir

de manière compatible un tel ψ pour chaque $p > 0$), tout se passe du *point de vue topologique* comme si une telle transformation sur $\mathbf{Z}$ existait (tous les ψ pour tous les $p > 0$ ont un comportement topologique identique, ce qui les distingue est de nature purement arithmétique). Plus précisément, nous démontrons (cf. (4.1)) un énoncé du type *Riemann-Roch* pour « la » transformation de Fourier en se servant d'un argument délicat de balance entre la ramification sauvage et la ramification modérée (cet argument est d'ailleurs déjà à la base des résultats du cours à Orsay du premier auteur, cf. [11]). Comme intermédiaire à la preuve de (4.1), nous obtenons aussi un théorème du type *Riemann-Roch* pour $f: X \to Y$ un morphisme de type fini entre schémas de type fini sur $\mathbf{Z}$ et pour les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux (cf. (3.1.2)) (*).

Une autre transformation, celle-là en caractéristique 0, mérite aussi le nom de transformation de Fourier (cf. [5] et (7.1)) : il s'agit d'une transformation pour les $\mathscr{D}$-Modules. Cette transformation est tout à fait similaire aux transformations de Fourier ℓ-adiques considérées ci-dessus (tout comme $\psi : \mathbf{F}_p \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ est similaire au caractère $t \mapsto e^{2\pi i t}$ de $\mathbf{R}$, tout comme les sommes de Gauss sont similaires aux valeurs de la fonction $\Gamma(s)$ aux $s \in \mathbf{Q}$, ...). Cette similitude et le dictionnaire « Riemann-Hilbert » entre $\mathscr{D}$-Modules holonomes réguliers singuliers et faisceaux constructibles (en géométrie analytique) nous amène tout naturellement à conjecturer un énoncé du type *Riemann-Roch* commun aux transformations de Fourier en caractéristique $p > 0$ et en caractéristique 0. Malheureusement, pour formuler correctement un tel énoncé, il nous manque à l'heure actuelle un outil fondamental, à savoir la notion de cycle caractéristique pour un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau, analogue au cycle caractéristique d'un $\mathscr{D}$-Module; aussi plutôt que d'énoncer une conjecture générale sous une forme plus ou moins étriquée, nous nous limitons à en formuler les conséquences « pratiques » dans la détermination de la constante d et d'un polynôme $F(y_1, \ldots, y_r)$ « optimal » faisant marcher les estimations ci-dessus des sommes trigonométriques (cf. Conjecture (7.4.2)).

Nous traitons aussi une deuxième sorte de sommes exponentielles au n° 6. On considère encore un schéma affine, de type fini sur $\mathbf{Z}$, X, qui est lisse, purement de dimension relative m sur $\mathbf{Z}[1/N]$, pour un certain entier $N \geqslant 1$, et on considère des fonctions $f_1, \ldots, f_r$ ($r \geqslant 1$) sur X et une fonction inversible g sur X telles que le morphisme

$$(f; g) = (f_1, \ldots, f_r; g) : X \to \mathbf{A}^r_{\mathbf{Z}[1/N]} \times \mathbf{G}_{m, \mathbf{Z}[1/N]}$$

soit fini (par exemple, si on part d'une situation $(X_0, f_1, \ldots, f_{r+1})$ comme au début de l'introduction, *i.e.* avec X_0 affine, lisse et purement de dimension relative m sur $\mathbf{Z}[1/N]$ et avec $(f_1, \ldots, f_{r+1}) : X_0 \to \mathbf{A}^{r+1}_{\mathbf{Z}[1/N]}$ fini, alors on peut prendre

$$X = X_0[1/f_{r+1}],$$

i.e. l'ouvert d'inversibilité de f_{r+1} et

$$(f_1, \ldots, f_r; g) := (f_1, \ldots, f_r; f_{r+1}).$$

(*) Dans un esprit déjà envisagé par A. Grothendieck il y a vingt ans.

Étant donnés X et $f_1, \ldots, f_r, g$ comme ci-dessus, pour chaque r-uple $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{Z}^r$, pour chaque nombre premier p ne divisant pas N et pour chaque caractère $\chi_p : \mathbf{F}_p^\times \to \mathbf{C}^\times$, on peut former la somme trigonométrique

$$S(p; a_1, \ldots, a_r; \chi_p) = \sum_{x \in X(\mathbf{F}_p)} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{r} a_j f_j(x)\right) \chi_p(g(x)).$$

Alors, nous prouvons (cf. (6.2), (6.3)) l'existence d'un polynôme non nul

$$F(y_1, \ldots, y_r) \in \mathbf{Z}[y_1, \ldots, y_r],$$

l'existence d'une constante d (qui ne dépend que de la topologie algébrique de la variété complexe $X_{\mathbf{C}}$ munie de l'application $f_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^r_{\mathbf{C}}$ et qui est facilement calculable) et l'existence d'un ensemble fini $\mathscr{S}$ d'entiers $\geqslant 1$ (lui aussi de nature topologique) ayant la propriété suivante : si

$$F(a_1, \ldots, a_r) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

et si $\quad \operatorname{ord}(\chi_p) \notin \mathscr{S}$,

où $\operatorname{ord}(\chi_p)$ est l'ordre exact du caractère χ_p, alors, on a l'estimation

$$|S(p; a_1, \ldots, a_r; \chi_p)| \leqslant d\left(\sqrt{p}\right)^m.$$

Comme auparavant, ces estimations sont conséquence d'une analyse cohomologique. On se sert d'une expression cohomologique de telles sommes comme étant la fibre en $(a_1, \ldots, a_r)$ du transformé de Fourier d'un objet qui vit en caractéristique 0 et qui « contient » le caractère χ_p. C'est alors pour garantir la perversité de cet objet qu'il faut exclure les χ_p de certains ordres. Plus précisément, l'ensemble $\mathscr{S}$ est déterminé par le polynôme caractéristique de la monodromie agissant sur certains faisceaux de cycles évanescents ou encore par le polynôme de *Bernstein-Sato* correspondant. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que la détermination de F, d et $\mathscr{S}$ peut se faire aussi bien via les $\mathscr{D}$-modules que via la cohomologie ℓ-adique, *i.e.* d'énoncer pour ces dernières sommes une conjecture analogue à (7.4.2).

Pour des exemples qui illustrent les résultats généraux de cet article, nous renvoyons à [11] et à [13] (voir aussi (5.6)).

Nous remercions chaleureusement Brylinski, Deligne, Malgrange et Verdier pour de fructueuses discussions sur « la » transformation de Fourier sous toutes ses formes. Nous remercions aussi Madame Bonnardel qui a réalisé avec grand soin la frappe du manuscrit.

1. Dualité, perversité et pureté relatives

(1.0) Dans tout cet article, par « schéma », on entendra toujours un schéma séparé et noethérien; de plus, on dira qu'un schéma est *bon* s'il existe un morphisme de type fini, $X \to S$, avec S un schéma régulier de dimension $\leqslant 1$ (pour tout entier $N \geqslant 1$,

un bon $\mathbf{Z}[1/N]$-schéma est donc un bon schéma sur lequel N est inversible, ce qui ne signifie pas que ce schéma est de type fini sur $\mathbf{Z}[1/N]$; même remarque pour un bon $\mathbf{F}_q$-schéma).

Fixons un nombre premier ℓ et une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ de $\mathbf{Q}_\ell$. Pour tout bon $\mathbf{Z}[1/\ell]$-schéma, on dispose (cf. [8] (1.1.3) et [18]) de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, muni des opérations internes $R\mathscr{H}om$ et $\overset{L}{\otimes}$. Pour tout morphisme de type fini

$$f: X \to Y$$

entre bons $\mathbf{Z}[1/\ell]$-schémas, on dispose (cf. [8] (1.1.2)) des foncteurs

$$Rf_!, Rf_*: D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

$$f^!, f^*: D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

qui satisfont au formalisme habituel de la dualité (cf. [SGA 4], XVIII, § 3).

(1.1) Soit S un bon $\mathbf{Z}[1/\ell]$-schéma, pour tout S-schéma de type fini

$$\pi: X \to S$$

on définit le *complexe dualisant relatif* $K_{X/S}$ comme étant l'objet

$$K_{X/S} = \pi^! \overline{\mathbf{Q}}_\ell$$

de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$; le foncteur

$$D_{X/S}(-) = R\mathscr{H}om(-, K_{X/S}) : D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^\circ \to D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

est, par définition, le *foncteur dualisant relatif.*

On vérifie facilement les propriétés suivantes de $K_{X/S}$ et $D_{X/S}$:

(1.1.1) $$D_{X/S}(K \overset{L}{\otimes} M) = R\mathscr{H}om(K, D_{X/S}(M))$$

et, si $f: X \to Y$ est un S-morphisme entre S-schémas de type fini,

(1.1.2) $$K_{X/S} = f^! K_{Y/S}$$

(1.1.3) $$Rf_* D_{X/S}(K) = D_{Y/S}(Rf_! K)$$

(1.1.4) $$f^! D_{Y/S}(N) = D_{X/S}(f^* N)$$

($K, M \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et $N \in \mathrm{ob}\, D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$; (1.1.3) n'est autre que la dualité de Verdier).

Par contre, pour $\pi: X \to S$ et K donnés, il n'est pas vrai en général que la flèche canonique

(1.1.5) $$K \to D_{X/S} \circ D_{X/S}(K)$$

soit un isomorphisme. On a cependant les résultats suivants :

Proposition (**1.1.6**). — *Soit* $\pi : X \to S$ *un morphisme de type fini, soient* $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *et* $K' = D_{X/S}(K)$. *Si la formation de* $D_{X/S}(K)$ *et* $D_{X/S}(K')$ *commute à tout changement de base* $S' \to S$, *avec* S' *bon, la flèche canonique* (1.1.5) *est un isomorphisme.*

En effet, pour S le spectre d'un corps, $D_{X/S}$ n'est autre que le foncteur dualisant absolu et dans ce cas (1.1.5) est un isomorphisme (cf. [SGA 4 ½], [Th. Finitude] (4.3)).

Proposition (**1.1.7**). — *Soit* $\pi : X \to S$ *un morphisme de type fini et soit* $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Il existe un ouvert dense* $U \subset S$ *tel que la formation de* $D_{X/S}(K)$ *commute à tout changement de base* $S' \to U \subset S$, *avec* S' *bon* (U *dépend de* π *et de* K).

En effet, cela résulte de [SGA 4 ½], [Th. Finitude] (2.9) et (2.10).

Définition (**1.1.8**). — *Soit* $\pi : X \to S$ *un morphisme de type fini. Nous dirons qu'un objet* K *de* $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est réflexif relativement à* S *s'il vérifie les hypothèses et donc la conclusion de* (1.1.6).

Remarques (**1.1.9**). — (i) Par définition, la propriété de réflexivité relativement à S est stable par dualité relativement à S et par tout changement de base $S' \to S$, avec S' bon.

(ii) D'après (1.1.7), pour tout objet K de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, il existe un ouvert dense $U \subset S$ tel que $K \mid \pi^{-1}(U)$ soit réflexif relativement à U; en particulier, si S est le spectre d'un corps, tout objet de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est réflexif relativement à S.

(iii) Si $\pi : X \to S$ est lisse et si les faisceaux de cohomologie de K sont lisses sur X, K est réflexif relativement à S (pour $\mathscr{F}$ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur X, la formation de $R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)[0]$ commute à tout changement de base $S' \to S$, avec S' bon).

(iv) Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme lisse, purement de dimension relative d, entre S-schémas de type fini, il résulte de (1.1.4) que $f^*(-)[d] = f^!(-)[-d](-d)$ préserve la réflexivité relativement à S.

(v) Soit $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas de type fini et soit K un objet de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui est réflexif relativement à S. Supposons que, pour tout changement de base $S' \to S$, avec S' bon, transformant $(f : X \to Y, K)$ en $(f' : X' \to Y', K')$, les flèches d'oubli des supports

$$Rf'_! K' \to Rf'_* K'$$
$$Rf'_! D_{X'/S'}(K') \to Rf'_* D_{X'/S'}(K')$$

soient des isomorphismes. Alors, il résulte de (1.1.3) et du théorème de changement de base pour un morphisme propre (cf. [SGA 4] XII (5.1)) que $Rf_! K \xrightarrow{\sim} Rf_* K$ est un objet de $D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ réflexif relativement à S.

En particulier, si f est un morphisme propre, Rf_* préserve la réflexivité relativement à S.

(vi) Tout facteur direct d'un objet réflexif relativement à S de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est aussi réflexif relativement à S.

(1.2) Soit S un bon $\mathbf{Z}[1/\ell]$-schéma et soit $\pi : X \to S$ un S-schéma de type fini. Pour tout fermé Z de X, on appelle *dimension de* Z *relativement à* S et on note $\dim_S(Z)$ le maximum des dimensions des fibres géométriques de $\pi \mid Z : Z \to S$.

Définition **(1.2.1)**. — *Nous dirons qu'un objet* K *de* $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est pervers relativement à* S *s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) K *est réflexif relativement à* S,
(ii) *pour tout entier* i, *on a*

(A) $\qquad \dim_S(\mathrm{Supp}\, \mathscr{H}^i(K)) \leqslant -i$

(B) $\qquad \dim_S(\mathrm{Supp}\, \mathscr{H}^i(D_{X/S}(K))) \leqslant -i$

où, pour tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau* $\mathscr{F}$ *sur* X, Supp $\mathscr{F}$ *désigne son support.*

Remarques **(1.2.2)**. — (i) Par définition, la propriété de perversité relativement à S est stable par dualité relativement à S et par tout changement de base $S' \to S$, avec S' bon.

(ii) Si S est le spectre d'un corps, un objet K de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est pervers relativement à S si, et seulement si, c'est un faisceau pervers pour la perversité intermédiaire au sens de [6] (2.3) ou [1] § 4. Par suite, pour S de nouveau un bon $\mathbf{Z}[1/\ell]$-schéma, un objet K de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, qui est réflexif relativement à S, est pervers relativement à S si, et seulement si, sa restriction à chaque fibre géométrique de $\pi : X \to S$ est un faisceau pervers pour la perversité intermédiaire.

(iii) Si $\pi : X \to S$ est lisse, purement de dimension relative d, et si K est un objet de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ de la forme $\mathscr{F}[d]$, où $\mathscr{F}$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur X, K est pervers relativement à S (cf. (1.1.9) (iii)).

(iv) Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme lisse, purement de dimension relative d, entre S-schémas de type fini, le foncteur $f^*(-)[d] = f^!(-)[-d](-d)$ préserve la perversité relativement à S (cf. (1.1.9) (iv)).

(v) Soit $f : X \to Y$ un S-morphisme *affine* entre S-schémas de type fini et soit K un objet de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ pervers relativement à S. Supposons que, pour tout changement de base $S' \to S$, avec S' bon, transformant $(f : X \to Y, K)$ en $(f' : X' \to Y', K')$, les flèches d'oubli des supports

$$Rf'_! K' \to Rf'_* K'$$

$$Rf'_! D_{X'/S'}(K') \to Rf'_* D_{X'/S'}(K')$$

sont des isomorphismes. Alors $Rf_! K \xrightarrow{\sim} Rf_* K$ est un objet de $D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ pervers relativement à S (en effet, d'après (1.1.9) (v)), $Rf_! K \xrightarrow{\sim} Rf_* K$ est réflexif relativement à S et d'après (1.2.2) (ii), on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas la conclusion résulte de [1] (4.1.1) et (4.1.2)).

En particulier, si f est fini (affine et propre), le foncteur $Rf_* = f_*$ préserve la perversité relativement à S.

(vi) Tout facteur direct d'un objet pervers relativement à S de $D^b_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est aussi pervers relativement à S.

(1.3) Supposons maintenant que S est un schéma de type fini sur $\mathbf{Z}[1/\ell]$ et soit $\pi : X \to S$ un S-schéma de type fini.

Définition **(1.3.1)**. — *Soit m un entier. Un objet* K *de* $D^b_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *sera dit pur, de poids m, relativement à* S *s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) K *est réflexif relativement à* S,

(ii) *pour tout entier i, le faisceau de cohomologie*

(A) $\mathscr{H}^i(K)$ *est mixte de poids ponctuels* $\leqslant i + m$

(B) $\mathscr{H}^i(D_{X/S}(K))$ *est mixte de poids ponctuels* $\leqslant i - m$.

Remarques **(1.3.2)**. — (i) Par définition, la notion de pureté, de poids m, relativement à S est stable par dualité relativement à S et par tout changement de base $S' \to S$ avec S' de type fini sur $\mathbf{Z}[1/\ell]$.

(ii) Si S est le spectre d'un corps fini, un objet K de $D^b_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est pur, de poids m, relativement à S si, et seulement si, il est pur, de poids m, au sens de [8] (6.2.4). Par suite, pour S de nouveau un schéma de type fini sur $\mathbf{Z}[1/\ell]$ arbitraire, si K est un objet de $D^b_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui est réflexif relativement à S et *qui est mixte ainsi que* $D_{X/S}(K)$, alors K est pur, de poids m, relativement à S si, et seulement si, sa restriction à la fibre de $\pi : X \to S$, en chaque point fermé de S, est pure, de poids m (on fera attention au fait que « mixte » (cf. [8] (1.2.2) et (6.2.2)) ne se teste pas fibre à fibre mais est une propriété absolue de K sur X).

(iii) Si $\pi : X \to S$ est lisse, purement de dimension relative d, et si K est un objet de $D^b_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ de la forme $\mathscr{F}[d]$, où $\mathscr{F}$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur X, ponctuellement pur de poids m, K est pur, de poids $m + d$, relativement à S (cf. (1.1.9) (iii)).

(iv) Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme lisse, purement de dimension relative d, entre S-schémas de type fini, alors le foncteur $f^*(-)[d] = f^!(-)[-d](-d)$ transforme objets purs, de poids m, relativement à S en objets purs, de poids $m + d$, relativement à S (cf. (1.1.9) (iv)).

(v) Soit $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas de type fini et soit K un objet de $D^b_c(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ pur, de poids m, relativement à S. Supposons que, pour tout changement de base $S' \to S$ avec S' de type fini sur $\mathbf{Z}[1/\ell]$, transformant $(f : X \to Y, K)$ en $(f' : X' \to Y', K')$, les flèches d'oubli des supports

$$Rf'_! K' \to Rf'_* K'$$

$$Rf'_! D_{X'/S'}(K') \to Rf'_* D_{X'/S'}(K')$$

soient des isomorphismes. Alors $Rf_! K \xrightarrow{\sim} Rf_* K$ est un objet de $D_c^b(Y, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ pur, de poids m, relativement à S (en effet, d'après (1.1.9) (v), $Rf_! K \xrightarrow{\sim} Rf_* K$ est réflexif relativement à S et, d'après [8] (3.3.1) et (6.2.3), $Rf_! K$ et $D_{Y/S}(Rf_* K) = Rf_! D_{X/S}(K)$ sont mixtes, donc, d'après (1.3.2) (ii), on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps fini; dans ce cas la conclusion résulte de [8] (6.2.3)).

En particulier, si f est propre, le foncteur Rf_* préserve la pureté, de poids m, relativement à S.

(vi) Tout facteur direct d'un objet pur, de poids m, relativement à S de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est aussi pur, de poids m, relativement à S.

(1.4) Soit S un bon $\mathbf{Z}[1/\ell]$-schéma.

Proposition **(1.4.1).** — *Soit* $\pi : X \to S$ *un morphisme lisse, de type fini, purement de dimension relative d, et soit* K *un objet de* $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *dont les faisceaux de cohomologie sont lisses sur* X *et que l'on suppose pervers relativement à* S. *Alors* K *est de la forme* $\mathscr{F}[d]$, *où* $\mathscr{F}$ *est un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse sur* X; *de plus* $D_{X/S}(K) = \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)[d](d)$. *Si l'on suppose en outre que* S *est de type fini sur* **Z** *et que* K *est pur, de poids m, relativement à* S, *alors* $\mathscr{F}$ *est ponctuellement pur de poids* $m - d$ *sur* X.

En effet, les hypothèses de perversité relativement à S de K et de lissité des $\mathscr{H}^i(K)$ sur X assurent que $\mathscr{H}^i(K) = 0$ si $i > -d$. D'autre part, comme π est lisse, purement de dimension relative d, $K_{X/S} = \overline{\mathbf{Q}}_\ell[2d](d)$ et donc

$$\mathscr{H}^i(D_{X/S}(K)) = \mathscr{H}^i(R\,\mathscr{H}om(K, K_{X/S})) = \mathscr{H}om(\mathscr{H}^{-i-2d}(K), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)(d).$$

On déduit de ce qui précède que les $\mathscr{H}^i(D_{X/S}(K))$ sont lisses et l'hypothèse de perversité relativement à S de K assure alors que $\mathscr{H}^i(D_{X/S}(K)) = 0$ si $i > -d$. Par suite, $\mathscr{H}^i(K) = 0$ si $-i-2d > -d$, *i.e.* si $i < -d$ et la cohomologie de K est concentrée en degré $-d$, donc $K = \mathscr{H}^{-d}(K)[d]$. Les autres assertions sont maintenant faciles.

2. La transformation de Fourier pour les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux

(2.0) Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini de caractéristique p et soit ℓ un nombre premier $\ell \neq p$. Pour tout caractère additif *non trivial*

$$\psi : \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

on note $\mathscr{L}_\psi$ le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau d'Artin-Schreier sur* $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ *associé à* ψ (cf. [SGA 4½], [Sommes trig.] (1.7)); *si* x est la coordonnée de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$, c'est le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ déduit du $\mathbf{F}_q$-torseur sur $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ d'équation

$$t^q - t = x$$

par extension du groupe structural via ψ^{-1}.

Pour tout bon $\mathbf{F}_q$-schéma $S \xrightarrow{a} \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q)$, on note encore $\mathscr{L}_\psi$ le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}^1_S$ déduit de $\mathscr{L}_\psi$ par image réciproque via $(\mathrm{id}, a) : \mathbf{A}^1_S \to \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$.

Soient $\pi : E \to S$ un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$ sur un bon $\mathbf{F}_q$-schéma S; on note $\pi^\vee : E^\vee \to S$ son fibré vectoriel dual,

$$E \xleftarrow{\mathrm{pr}} E \times_S E^\vee \xrightarrow{\mathrm{pr}^\vee} E^\vee$$

les deux projections et

$$\mu : E \times_S E^\vee \to \mathbf{A}^1_S$$

la flèche d'évaluation (pour $E = \mathbf{A}^r_S$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_r$ et $E^\vee = \mathbf{A}^r_S$ de coordonnées $x_1^\vee, \ldots, x_r^\vee$, $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\vee) = \sum_{i=1}^{r} x_i x_i^\vee$).

(2.1) Deligne a associé à $\pi : E \to S$ et à ψ comme ci-dessus, deux foncteurs « méritant » le nom de *transformation de Fourier* :

$$\mathscr{F}_{!,\psi} \text{ et } \mathscr{F}_{*,\psi} : D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_c(E^\vee, \overline{\mathbf{Q}}_\ell),$$

définis par

(2.1.1) $$\mathscr{F}_{!,\psi}(-) = R\,\mathrm{pr}^\vee_!(\mathrm{pr}^*(-) \overset{L}{\otimes} \mu^* \mathscr{L}_\psi)[r]$$

(2.1.2) $$\mathscr{F}_{*,\psi}(-) = R\,\mathrm{pr}^\vee_*(\mathrm{pr}^*(-) \overset{L}{\otimes} \mu^* \mathscr{L}_\psi)[r].$$

En fait un résultat fondamental pour notre propos est qu'il n'y a qu'une seule transformation de Fourier; plus précisément, on a (cf. l'Appendice à ce numéro pour une démonstration) :

Théorème **(2.1.3)**. — *La flèche naturelle d'oubli des supports*

$$\mathscr{F}_{!,\psi}(-) \to \mathscr{F}_{*,\psi}(-)$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Nous noterons donc simplement

(2.1.4) $$\mathscr{F}_\psi(-) = \mathscr{F}_{!,\psi}(-) = \mathscr{F}_{*,\psi}(-)$$

le foncteur transformation de Fourier associé à $\pi : E \to S$ et au caractère additif non trivial ψ.

Corollaire **(2.1.5)**. — (i) *La formation de* $\mathscr{F}_\psi(-)$ *commute à tout changement de base* $S' \to S$, *avec* S' *bon.*

(ii) *Soit* $\overline{\psi} = \psi^{-1}$ *le caractère inverse de* ψ, *on a*

$$D_{E^\vee/S} \circ \mathscr{F}_\psi(-) = \mathscr{F}_{\overline{\psi}} \circ D_{E/S}(-)(r).$$

(iii) *Si* K *est un objet de* $D^b_c(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *réflexif relativement à* S (*resp. pervers relativement à* S), $\mathscr{F}_\psi(K)$ *est un objet de* $D^b_c(E^\vee, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *qui a la même propriété.*

En effet, la propriété (i) se vérifie grâce au théorème de changement de base pour un morphisme propre (cf. [SGA 4] XII (5.1)) sur l'expression $\mathscr{F}_{!,\psi}$ de Fourier.

Pour la partie (ii), il résulte facilement de (1.1.1), (1.1.3) et (1.1.4) que

$$D_{E^\vee/S} \circ \mathscr{F}_{!,\psi}(-) = R\,pr_*^\vee\, R\,\mathscr{H}om(\mu^*\mathscr{L}_\psi, pr^!\, D_{E/S}(-))[-r]$$

or $\mu^*\mathscr{L}_\psi$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $E \times_S E^\vee$, de dual $\mathscr{H}om(\mu^*\mathscr{L}_\psi, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = \mu^*\mathscr{L}_{\bar\psi}$ et pr est lisse, purement de dimension relative r, de sorte que

$$R\,\mathscr{H}om(\mu^*\mathscr{L}_\psi, pr^!(-)) = pr^*(-) \overset{L}{\otimes} \mu^*\mathscr{L}_{\bar\psi}[2r](r)$$

d'où la conclusion, compte tenu de (2.1.3).

Pour la partie (iii), on remarque que le foncteur $pr^*(-)[r]$ respecte la réflexivité et la perversité relativement à S (cf. (1.1.9) (iv) et (1.2.2) (iv)) et qu'il en est de même du foncteur $(-) \overset{L}{\otimes} \mu^*\mathscr{L}_\psi$. Maintenant, la conclusion résulte de (1.1.9) (v) et (1.2.2) (v) : en effet, $pr^\vee$ est affine et, grâce à (2.1.3) et à l'égalité

$$D_{E\times_S E^\vee/S}(pr^*(-) \overset{L}{\otimes} \mu^*\mathscr{L}_\psi[r]) = pr^*(D_{E/S}(-)) \overset{L}{\otimes} \mu^*\mathscr{L}_{\bar\psi}[r](r)$$

prouvée ci-dessus, on voit que les hypothèses de (1.1.9) (v) et (1.2.2) (v) sont satisfaites.

(2.2) Supposons maintenant que S est de type fini sur $\mathbf{F}_q$. Si l'on conjugue le résultat fondamental de Deligne [8] (6.2.3) et le théorème (2.1.3) on obtient :

Théorème **(2.2.1).** — *Si* K *est un objet de* $D_c^b(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *pur, de poids* m, *relativement à* S, *alors* $\mathscr{F}_\psi(K)$ *est un objet de* $D_c^b(E^\vee, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *pur, de poids* $m + r$, *relativement à* S.

En effet, le foncteur $pr^*(-)[r]$ transforme objets purs, de poids m, relativement à S en objets purs, de poids $m + r$, relativement à S (cf. (1.3.2) (iv)) et le foncteur $(-) \overset{L}{\otimes} \mu^*\mathscr{L}_\psi$ préserve la pureté, de poids $m + r$, relativement à S.

Maintenant, la conclusion résulte de (1.3.2) (v) : en effet, grâce à (2.1.3) et à l'égalité

$$D_{E\times_S E^\vee}(pr^*(-) \overset{L}{\otimes} \mu^*\mathscr{L}_\psi[r]) = pr^*(D_{E/S}(-)) \overset{L}{\otimes} \mu^*\mathscr{L}_{\bar\psi}[r](r),$$

déjà utilisée dans la preuve de (2.1.5), les hypothèses de (1.3.2) (v) sont satisfaites.

(2.3) Soit S un bon $\mathbf{F}_q$-schéma. Pour tout objet K de $D_c^b(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, il existe un ouvert dense $U^\vee \subset E^\vee$ au-dessus duquel les faisceaux de cohomologie de $\mathscr{F}_\psi(K)$ sont lisses (tout simplement parce que $\mathscr{F}_\psi(K) \in \mathrm{ob}\, D_c^b(E^\vee, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$). On retiendra surtout, des résultats ci-dessus relatifs à Fourier, le scholie suivant :

Scholie **(2.3.1).** — *Soit* K *un objet de* $D_c^b(E, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *pervers relativement à* S *et soit* $U^\vee \subset E^\vee$ *un ouvert au-dessus duquel les faisceaux de cohomologie de* $\mathscr{F}_\psi(K)$ *sont lisses. Alors* :

(i) *la cohomologie de* $\mathscr{F}_\psi(K) \mid U^\vee$ *et de* $\mathscr{F}_{\bar\psi}(D_{E/S}(K)) \mid U^\vee$ *est concentrée en degré* $-r$;

(ii) $\mathscr{H}^{-r}(\mathscr{F}_\psi(K) \mid U^\vee)$ *et* $\mathscr{H}^{-r}(\mathscr{F}_{\bar\psi}(D_{E/S}(K)) \mid U^\vee)$ *sont des* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux lisses de même rang; de plus, si* S *est de type fini sur le corps fini* $\mathbf{F}_q$ *et si* K *est pur, de poids* m, *relativement à* S, *ces* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceaux sont ponctuellement purs de poids* m *et* $-m$ *respectivement*;

(iii) *ces deux $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux lisses sur $\mathrm{U}^\vee$ sont en dualité : on a un accouplement parfait*

$$\mathscr{H}^{-r}(\mathscr{F}_\psi(\mathrm{K}) \mid \mathrm{U}^\vee) \times \mathscr{H}^{-r}(\mathscr{F}_{\bar\psi}(\mathrm{D}_{\mathrm{E}/\mathrm{S}}(\mathrm{K})) \mid \mathrm{U}^\vee) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$$

de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux lisses sur $\mathrm{U}^\vee$.

Cela résulte aussitôt de (1.4.1), (2.1.5) et (2.2.1).

Appendice **(2.4)** : *démonstration de l'égalité* $\mathscr{F}_{!,\psi} = \mathscr{F}_{*,\psi}$.

Dans cet appendice, nous travaillerons avec des faisceaux de torsion plutôt qu'avec des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux. L'énoncé (2.1.3) que nous voulons démontrer résulte, par les arguments standard de passage à la limite, du théorème (2.4.1) ci-dessous.

Soient S un $\mathbf{F}_q$-schéma, $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$ un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$, A un anneau local commutatif fini de caractéristique résiduelle ℓ, $\ell \neq p$, et $\psi : \mathbf{F}_q \to \mathrm{A}^\times$ un caractère additif non trivial. On définit $\mathscr{L}_\psi$, $\mathscr{F}_{!,\psi}$ et $\mathscr{F}_{*,\psi}$ comme en (2.0); maintenant $\mathscr{L}_\psi$ est un faisceau localement constant constructible de A-modules libres de rang 1 sur $\mathbf{A}^1_\mathrm{S}$ et $\mathscr{F}_{!,\psi}$, $\mathscr{F}_{*,\psi}$ sont des foncteurs de $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}, \mathrm{A})$ vers $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{E}^\vee, \mathrm{A})$.

Théorème **(2.4.1)**. — *La flèche d'oubli des supports*

$$\mathscr{F}_{!,\psi}(-) \to \mathscr{F}_{*,\psi}(-)$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Prouvons (2.4.1). Remarquons tout d'abord que l'énoncé (2.4.1) est local pour la topologie de Zariski sur S, ce qui nous permet de supposer $\mathrm{E} = \mathbf{A}^r_\mathrm{S}$.

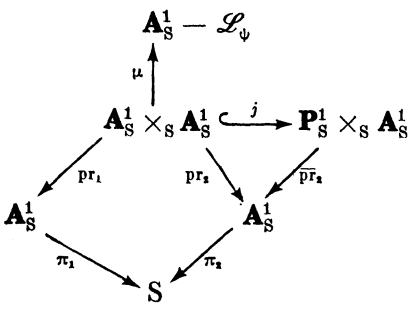
D'autre part, en « s'inspirant » de la relation

$$\sum_{x_1, \ldots, x_r \in \mathbf{F}_q} f(x_1, \ldots, x_r)\, \psi\Big(\sum_{i=1}^{r} x_i\, x_i^\vee\Big) = \sum_{x_r \in \mathbf{F}_q} \psi(x_r\, x_r^\vee) \sum_{x_1, \ldots, x_{r-1} \in \mathbf{F}_q} f(x_1, \ldots, x_r)\, \psi\Big(\sum_{i=1}^{r-1} x_i\, x_i^\vee\Big)$$

on vérifie facilement que la flèche $\mathscr{F}_{!,\psi}(-) \to \mathscr{F}_{*,\psi}(-)$ se calcule variable par variable, ce qui nous ramène par récurrence sur r, au cas où $r = 1$.

Nous prouverons donc (2.4.1) sous les hypothèses supplémentaires : $r = 1$ et $\mathrm{E} = \mathbf{A}^1_\mathrm{S}$.

Fixons les notations par le diagramme



et soient x (resp. y) la coordonnée de la première (resp. seconde) copie de $\mathbf{A}^1_S$ dans $\mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{A}^1_S$ (de sorte que $\mu(x,y) = xy$). Comme

$$\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{2!} = \mathrm{R}\,\overline{\mathrm{pr}}_{2*} \circ j_!$$
$$\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{2*} = \mathrm{R}\,\overline{\mathrm{pr}}_{2*} \circ \mathrm{R}j_*$$

il suffit de montrer que la flèche canonique de foncteurs

$$\textbf{(a)} \qquad j_!(\mathrm{pr}_1^*(-) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A \mu^* \mathscr{L}_\psi) \to \mathrm{R}j_*(\mathrm{pr}_1^*(-) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A \mu^* \mathscr{L}_\psi)$$

est un isomorphisme. Au-dessus de $\mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{A}^1_S$ c'est trivialement le cas, il n'y a de problème qu'au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbf{A}^1_S$ où ∞_S est la section à l'infini de $\mathbf{A}^1_S$.

Nous allons voir maintenant qu'il suffit de montrer que ***(a)*** est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S} \hookrightarrow \infty_S \times_S \mathbf{A}^1_S$. Notons en effet, pour tout $a \in \mathbf{A}^1_S(S)$,

$$[a] : \mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{A}^1_S \to \mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{A}^1_S$$

la translation par a sur le second facteur $((x,y) \mapsto (x, y + a))$ et

$$\langle a \rangle : \mathbf{A}^1_S \to \mathbf{A}^1_S$$

la multiplication par a, alors

$$[a]^* \mu^* \mathscr{L}_\psi = \mu^* \mathscr{L}_\psi \otimes_A \mathrm{pr}_1^* \langle a \rangle^* \mathscr{L}_\psi$$

(en vertu du caractère additif de $\mathscr{L}_\psi$ et de l'égalité $x(y + a) = xy + xa$); donc, si ***(a)*** est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$, c'est aussi un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S 0_S$, où 0_S est la section nulle de $\mathbf{A}^1_S$ (prendre pour a la section constante de valeur 1, 1_S, de $\mathbf{A}^1_S$ pour ramener ce qui se passe sur $\infty_S \times_S 0_S$ en ce qui se passe sur $\infty_S \times_S 1_S$).

Pour montrer que ***(a)*** est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$, considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathbf{P}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathrm{pr}}_1} \\ \mathbf{A}^1_S & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathbf{P}^1_S \end{array}$$

on en déduit un carré commutatif de morphismes de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathrm{pr}}_1^* i_!(-) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A j_! \mu^* \mathscr{L}_\psi & \overset{(c)}{\longrightarrow} & \tilde{\mathrm{pr}}_1^* \mathrm{R}i_*(-) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A j_! \mu^* \mathscr{L}_\psi \\ \downarrow{\scriptstyle (b)} & & \downarrow{\scriptstyle (a)} \\ j_!(\mathrm{pr}_1^*(-) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A \mu^* \mathscr{L}_\psi) & \overset{(a)}{\longrightarrow} & \mathrm{R}j_*(\mathrm{pr}_1^*(-) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A \mu^* \mathscr{L}_\psi) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les flèches d'oubli des supports et où les flèches verticales sont des flèches de changement de base relative au carré cartésien ci-dessus. Il résulte de la formule des projections pour j,

$$j_!(j^*(-) \overset{L}{\otimes}_A \mu^* \mathscr{L}_\psi) = (-) \overset{L}{\otimes}_A j_! \mu^* \mathscr{L}_\psi$$

que ***(b)*** et ***(c)*** sont des isomorphismes de foncteurs. Il reste à montrer que ***(d)*** est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$.

Pour cela, considérons le revêtement d'Artin-Schreier

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbf{A}^1_S \times_S (\mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}) \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S} & \end{array}$$

d'équation $t^q - t = xy$ et son prolongement

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j'} & \tilde{X} & \hookrightarrow & \mathbf{P}^1_S \times_S (\mathbf{P}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & \swarrow & \\ \mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S} & \xrightarrow{j} & \mathbf{P}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S} & & \end{array}$$

d'équation $X_0 T_1^q - X_0 T_1 T_0^{q-1} = X_1 T_0^q y$, avec $T_1/T_0 = t$, $X_1/X_0 = x$; $\tilde{f}$ est fini, galoisien de groupe $\mathbf{F}_q$, totalement ramifié au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$ et étale au-dessus de $\mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$; de plus, $\tilde{X}$ est lisse sur S.

Lemme (**2.4.2**). — *On a un isomorphisme canonique*

$$A_{\mathbf{P}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}} \oplus \Big(\bigoplus_{\psi' \neq 1} j_! \mu^* \mathscr{L}_{\psi'}\Big) \xrightarrow{\sim} \tilde{f}_* A_{\tilde{X}}$$

où $\psi' : \mathbf{F}_q \to A^\times$ *parcourt les caractères additifs non triviaux.*

En effet, puisque f est fini, étale, galoisien de groupe $\mathbf{F}_q$, on a la décomposition

$$A_{\mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}} \oplus \Big(\bigoplus_{\psi' \neq 1} \mu^* \mathscr{L}_{\psi'}\Big) \xrightarrow{\sim} f_* A_X.$$

D'autre part, il est facile de définir la flèche et, pour montrer le lemme, il reste à vérifier que cette flèche est un isomorphisme au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$, ce qui résulte aussitôt du fait que $\tilde{f}$ est totalement ramifié au-dessus de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$.

D'après (2.4.2) la flèche ***(d)*** est facteur direct de la flèche de changement de base

(d') $$\tilde{\mathrm{pr}}_1^* R i_*(-) \overset{L}{\otimes}_A \tilde{f}_* A_{\tilde{X}} \to R j_*(\mathrm{pr}_1^*(-) \overset{L}{\otimes}_A f_* A_X),$$

flèche qui se réécrit encore, grâce aux formules des projections pour f et $\tilde{f}$,

(d') $$\tilde{f}_* \tilde{f}^* \tilde{\mathrm{pr}}_1^* R i_*(-) \to \tilde{f}_* R j'_* f^* \mathrm{pr}_1^*(-).$$

Par suite, pour terminer la démonstration de 2.4.1, il suffit de montrer que la flèche de changement de base

$$(d'') \qquad (\widetilde{\mathrm{pr}}_1 \circ \widetilde{f})^* \, \mathrm{R}i_*(-) \to \mathrm{R}j'_*(\mathrm{pr}_1 \circ f)^* \, (-),$$

relative au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1 \circ f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{pr}}_1 \circ \widetilde{f}} \\ \mathbf{A}^1_S & \xrightarrow{i} & \mathbf{P}^1_S \end{array}$$

est un isomorphisme.

Si $\widetilde{\mathrm{pr}}_1 \circ \widetilde{f}$ était lisse, la conclusion résulterait aussitôt du théorème de changement de base par un morphisme lisse (cf. [SGA 4] XVI (1.2)). En fait, ce n'est pas le cas, mais nous allons voir que, au-dessus d'un voisinage U de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$ dans $\mathbf{P}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$, on peut factoriser $\widetilde{\mathrm{pr}}_1 \circ \widetilde{f}$ en un morphisme radiciel surjectif suivi d'un morphisme lisse et, comme la topologie étale est insensible aux morphismes radiciels surjectifs, cela suffit à prouver que *(d'')* est un isomorphisme.

Prenons comme voisinage U de $\infty_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$, la carte $X_1 \neq 0$ de $\mathbf{P}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$, de coordonnées $(\xi = X_0/X_1, y)$; sur $\widetilde{f}^{-1}(U) \subset \widetilde{X}$, $T_1 \neq 0$ et

$$(\tau = T_0/T_1, y) : \widetilde{f}^{-1}(U) \to \mathbf{A}^1_S \times_S \mathbf{G}_{m,S}$$

est une immersion ouverte dont le fermé complémentaire a pour équation $\tau^{q-1} = 1$. Alors $\widetilde{\mathrm{pr}}_1 \circ \widetilde{f} \,|\, \widetilde{f}^{-1}(U)$ a pour expression

$$\widetilde{\mathrm{pr}}_1 \circ \widetilde{f} \,|\, \widetilde{f}^{-1}(U) : (\tau, y) \mapsto \xi = \frac{\tau^q y}{1 - \tau^{q-1}}$$

et se factorise en un morphisme radiciel surjectif,

$$(\tau, y) \mapsto (\tau', y') = \left(\tau^q, \frac{y}{1 - \tau^{q-1}}\right),$$

suivi d'un morphisme lisse $(y' \neq 0)$,

$$(\tau', y') \mapsto \xi = \tau' y',$$

d'où la conclusion.

Remarque **(2.4.3)**. — Rappelons qu'un morphisme $f : X \to S$ est dit fortement localement acyclique relativement à un objet K de $D^+_{\mathrm{t.d.f.}}(X, A)$ si pour tout point géométrique x de X, d'image s dans S, toute spécialisation $t \to S_{(s)}$ et tout A-module M, la flèche de restriction

$$K_x \overset{L}{\otimes}_A M \to R\Gamma(X_{(x)t}, (K \mid X_{(x)t}) \overset{L}{\otimes}_A M)$$

est un isomorphisme (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$], [Th. Finitude] (A.2.9)). On dira que f est universellement fortement localement acyclique relativement à K si f est fortement localement acyclique relativement à K et s'il le reste après tout changement de base $S' \to S$.

Les arguments développés ci-dessus montrent en fait le résultat plus fort suivant :

Théorème **(2.4.4).** — *La projection* $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q} \times_{\mathbf{F}_q} \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ *est universellement fortement localement acyclique relativement à* $\mu^* \mathscr{L}_\psi$ *prolongé par* 0 *à* $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q} \times_{\mathbf{F}_q} \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ *tout entier.*

3. Stratifications et théorème d'uniformité pour les foncteurs $Rf_!$, $D_{X/S}$ et Rf.

(3.0) *Stratifications des schémas.* Si X est un schéma, une *stratification* $\mathscr{X} = \{X_\alpha\}$ de X est une partition finie

$$X^{red} = \coprod_\alpha X_\alpha$$

de X^{red} par des sous-schémas réduits localement fermés de X (le symbole $\coprod$ est pris ici au sens ensembliste et non au sens schématique; les X_α ne sont supposés ni irréductibles ni même connexes et peuvent être éventuellement vides). Si $f: X' \to X$ est un morphisme de schémas et si $\mathscr{X} = \{X_\alpha\}$ est une stratification de X, la stratification image réciproque de $\mathscr{X}$ par f est la stratification, notée $\mathscr{X}_{X'}$ ou $f^*\mathscr{X}$ ou même simplement $\mathscr{X}'$, de X' définie par

$$(X')^{red} = \coprod_\alpha (f^{-1}(X_\alpha))^{red}.$$

Soient X un bon schéma et $\mathscr{X}$ une stratification de X. On dira qu'une fonction constructible

$$\varphi : X \to \mathbf{Z}$$

est *adaptée à* $\mathscr{X}$ si elle est constante sur chaque strate X_α; pour tout bon X-schéma $f: X' \to X$, la fonction constructible

$$\varphi \circ f : X' \to \mathbf{Z},$$

notée encore $\varphi_{X'}$ ou $\varphi \circ f$ ou même simplement φ', est adaptée à $f^*\mathscr{X}$.

Soient de plus ℓ un nombre premier et $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_\ell$. On dira qu'un objet K de $D^b_c(X[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est adapté à* $\mathscr{X}$ si tous ses faisceaux de cohomologie $\mathscr{H}^i(K)$ sont lisses sur chaque strate $X_\alpha[1/\ell]$.

On notera

$$\chi(K) \text{ et } ||K|| : X[1/\ell] \to \mathbf{Z}$$

les fonctions constructibles définies par

$$\chi(K)(x) = \sum_i (-1)^i \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}[\mathscr{H}^i(K)_{\bar{x}}]$$

et

$$||K||(x) = \sum_i \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}[\mathscr{H}^i(K)_{\bar{x}}],$$

où $\bar{x}$ est un point géométrique arbitraire au-dessus de $x \in X[1/\ell]$; on dira que K est χ-*adapté à* $\mathscr{X}$ si K est adapté à $\mathscr{X}$ et si la fonction constructible $\chi(K) : X[1/\ell] \to \mathbf{Z}$ est adaptée à la stratification $\mathscr{X}[1/\ell]$ de $X[1/\ell]$.

Remarques **(3.0.1)**. — Si K est adapté à $\mathscr{X}$, les fonctions $\chi(K)$ et $||K||$ sont constantes sur les composantes connexes des strates $X_\alpha[1/\ell]$, aussi bien que chaque fonction $x \mapsto \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}[\mathscr{H}^i(K)_{\bar{x}}]$, mais, pour des raisons techniques, nous n'avons pas supposé les strates connexes, de sorte qu'il nous faut distinguer entre « adapté » et « χ-adapté ».

(3.0.2) Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$\chi(K[n]) = (-1)^n \chi(K) \quad \text{et} \quad ||K[n]|| = ||K||;$$

pour tout « triangle » (cf. [8] (1.1.2))

$$K' \to K \to K'' \to K'[1]$$

dans $D_c^b(X[1/\ell], \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a

$$\chi(K) = \chi(K') + \chi(K'') \quad \text{et} \quad ||K|| \leqslant ||K'|| + ||K''||;$$

enfin, on a

$$||K|| = 0 \Leftrightarrow K = 0.$$

Stratifications et $Rf_!$ **(3.1)**. — Soient Y un bon schéma et $f : X \to Y$ un morphisme de type fini.

Une $!$-*stratification de* $f : X \to Y$ est un quadruple $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, C, f_!)$, composé d'une stratification $\mathscr{X} = \{X_\alpha\}$ de X, d'une stratification $\mathscr{Y} = \{Y_\beta\}$ de Y, d'un entier $C \geqslant 1$ et d'une application additive

$$f_! : \begin{Bmatrix} \text{fonctions constructibles} \\ X \to \mathbf{Z} \text{ adaptées à } \mathscr{X} \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} \text{fonctions constructibles} \\ Y \to \mathbf{Z} \text{ adaptées à } \mathscr{Y} \end{Bmatrix}$$

et possédant la propriété suivante : pour tout nombre premier ℓ, pour tout $K \in \text{ob } D_c^b(X[1/\ell], \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ adapté à $\mathscr{X}$, pour tout bon Y-schéma $g : Y' \to Y$ et pour tout facteur direct L de $g_X^*(K)$ dans $D_c^b(X'[1/\ell], \mathbf{Q}_\ell)$, où on a formé le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g_X} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

on a

(i) l'objet $Rf_!' L$ de $D_c^b(Y'[1/\ell], \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est adapté à $g^* \mathscr{Y}$ et on a l'inégalité

$$||Rf_!'(L)||(y') \leqslant C \cdot \operatorname*{Sup}_{f(x')=y'} (||L||(x')),$$

(ii) si L est χ-adapté à $g_X^* \mathscr{X}$, alors $Rf_!' L$ est χ-adapté à $g^* \mathscr{Y}$ et

$$\chi(Rf_!' L) = f_! \chi(L)$$

au sens suivant : pour toute fonction constructible $\varphi : X \to \mathbf{Z}$ adaptée à $\mathscr{X}$ induisant $\chi(L)$ sur $X'[1/\ell]$, $f_! \varphi : Y \to \mathbf{Z}$ induit $\chi(Rf_!' L)$ sur $Y'[1/\ell]$.

Remarque **(3.1.1)**. — L'application $f_!$, si elle existe, est uniquement déterminée par le morphisme $f : X \to Y$; de plus, si $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, C, f_!)$ est une !-stratification de f, $f_!$ est donnée par la « recette » suivante : choisissons, pour chaque β, un point géométrique arbitraire y_β de Y_β, puis, pour chaque α tel que $f^{-1}(y_\beta) \cap X_\alpha$ soit non vide, choisissons un point géométrique arbitraire $x_{\alpha,\beta}$ de $f^{-1}(y_\beta) \cap X_\alpha$ et enfin choisissons un nombre premier ℓ distinct des caractéristiques résiduelles des y_β, alors $f_! \varphi$ est la fonction dont la valeur constante sur Y_β est donnée par

$$(f_! \varphi)(y_\beta) = \sum_{\substack{\alpha \text{ tels que} \\ f^{-1}(y_\beta) \cap X_\alpha \neq \varnothing}} \varphi(x_{\alpha,\beta}) \chi_{\alpha,\beta}$$

avec

$$\chi_{\alpha,\beta} = \sum_i (-1)^i \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}[H_c^i(f^{-1}(y_\beta) \cap X_\alpha, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)].$$

Pour $f : X \to Y$ comme ci-dessus, on dira qu'une !-stratification $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, C, f_!)$ est *universelle* si, pour tout bon Y-schéma $g : Y' \to Y$ qui est plat, le morphisme $f' : X' \to Y'$ déduit de f par le changement de base

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g_X} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

admet $(g_X^* \mathscr{X}, g^* \mathscr{Y}, C, g^* f_!)$ comme !-stratification.

Théorème **(3.1.2)**. — *Soient* Y *un bon schéma,* $f : X \to Y$ *un morphisme de type fini et* $\mathscr{X} = \{X_\alpha\}$ *une stratification de* X. *Alors, il existe un entier* $N \geqslant 1$, *une stratification* $\mathscr{Y} = \{Y_\beta\}$ *de* $Y[1/N]$, *un entier* $C \geqslant 1$ *et une application additive* $f_!$ *tels que* $(\mathscr{X}[1/N], \mathscr{Y}, C, f_!)$ *soit une* !-*stratification universelle du morphisme*

$$f : X[1/N] \to Y[1/N]$$

déduit de $f : X \to Y$ *en inversant* N.

La démonstration de ce théorème sera donnée en Appendice à ce numéro (cf. (3.4.2)).

Stratifications et dualité relative **(3.2)**.

Théorème **(3.2.1)**. — *Soient* S *un bon schéma,* $f : X \to S$ *un morphisme de type fini et* $\mathscr{X}$ *une stratification de* X. *Alors, il existe un entier* $N \geqslant 1$, *un ouvert dense* $U \subset S[1/N]$ *et*

une stratification $\widetilde{\mathscr{X}}$ *de* X_U *ayant la propriété suivante : pour tout nombre premier* ℓ*, pour tout morphisme étale* $X' \to X_U[1/\ell]$ *et pour tout objet* K *de* $D_c^b(X', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *qui est adapté à la stratification* $\mathscr{X}_{X'}$*, on a :*

(i) *l'objet* $D_{X'/U}(K)$ *de* $D_c^b(X', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est adapté à la stratification* $\widetilde{\mathscr{X}}_{X'}$,

(ii) *la formation de* $D_{X'/U}(K)$ *commute à tout changement de base* $T \to U[1/\ell]$, *avec* T *un bon schéma.*

La démonstration de ce théorème sera donnée en Appendice à ce numéro (cf. (3.4.3)).

Corollaire **(3.2.2).** — *Soient* S *un bon schéma,* $f : X \to S$ *un morphisme de type fini et* $\mathscr{X} = \{X_\alpha\}$ *une stratification de* X*. Alors il existe un entier* $N \geqslant 1$, *un ouvert dense* $U \subset S[1/N]$ *et une stratification* $\widetilde{\mathscr{X}}$ *de* X_U *ayant la propriété suivante : pour tout nombre premier* ℓ*, pour tout morphisme étale* $X' \to X_U[1/\ell]$ *et pour tout objet* K *de* $D_c^b(X', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *adapté à* $\mathscr{X}_{X'}$, K *est réflexif relativement à* U *et* $D_{X'/U}(K)$ *est adapté à la stratification* $\widetilde{\mathscr{X}}_{X'}$.

En effet, on applique (3.2.1) deux fois : d'abord à $(f : X \to S, \mathscr{X})$, ce qui produit un entier $N_1 \geqslant 1$, un ouvert dense $U_1 \subset S[1/N_1]$ et une stratification $\mathscr{X}_1^\vee$ de X_{U_1}, puis à $(f_{U_1} : X_{U_1} \to U_1, \widetilde{\mathscr{X}}_1)$, ce qui produit un entier $N_2 \geqslant 1$, un ouvert dense $U_2 \subset U_1[1/N_2]$ (et une stratification que l'on oublie). Alors $N = N_1 N_2$, $U = U_2$ et $\widetilde{\mathscr{X}} = \widetilde{\mathscr{X}}_1$ font marcher (3.2.2).

Stratifications et Rf_* **(3.3).** — Soient S un bon schéma, X et Y des S-schémas de type fini,

$$f : X \to Y$$

un S-morphisme, $\mathscr{X} = \{X_\alpha\}$ une stratification de X et $\mathscr{Y} = \{Y_\beta\}$ une stratification de Y. On dira que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ est une $*$*-stratification de f relativement à* S si, pour tout morphisme étale $Y' \to Y$ fournissant le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \\ & & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

le couple de stratifications $(\mathscr{X}_{X'}, \mathscr{Y}_{Y'})$ a la propriété suivante : pour tout nombre premier ℓ et pour tout objet K de $D_c^b(X'[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ adapté à $\mathscr{X}_{X'}$, l'objet $Rf'_* K$ de $D_c^b(Y'[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est adapté à $\mathscr{Y}_{Y'}$ et sa formation commute à tout changement de base $S' \to S$, avec S' un bon schéma.

Remarque **(3.3.1)**. — Il résulte de [13] (1.1) que les fonctions χ des objets $Rf'_* K$ et $Rf'_! K$, pour K comme ci-dessus, coïncident (faire des changements de base $S' \to S$, avec S' le spectre d'un corps).

Théorème **(3.3.2)**. — *Soient* S *un bon schéma,* X *et* Y *des* S*-schémas de type fini,* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme et* $\mathscr{X} = \{X_\alpha\}$ *une stratification de* X. *Alors, il existe un entier* $N \geqslant 1$, *un ouvert dense* U *de* $S[1/N]$ *et une stratification* $\mathscr{Y}$ *de* Y_U *tels que* $(\mathscr{X}_{X_U}, \mathscr{Y})$ *soit une* $*$*-stratification de* $f_U : X_U \to Y_U$ *relativement à* U.

En effet, montrons que (3.3.2) résulte de (3.1.2), (3.2.1) et (3.2.2).

Par (3.2.2), il existe un entier $N_1 \geqslant 1$, un ouvert dense $U_1 \subset S[1/N_1]$ et une stratification $\widetilde{\mathscr{X}}_1$ de X_{U_1} tels que, pour tout nombre premier ℓ, pour tout morphisme étale $Y' \to Y_{U_1}[1/\ell]$ et pour tout objet K de $D^b_c(X', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ adapté à $\mathscr{X}_{X'}$, K soit réflexif et $D_{X'/U_1}(K)$ soit adapté à $(\widetilde{\mathscr{X}}_1)_{X'}$; grâce à la réflexivité de K, on déduit de (1.1.3) que

$$Rf'_* K = Rf'_*(D_{X'/U_1}(D_{X'/U_1}(K))) = D_{Y'/U_1}(Rf'_!(D_{X'/U_1}(K))).$$

On applique alors (3.1.2) à $(f_{U_1} : X_{U_1} \to Y_{U_1}, \widetilde{\mathscr{X}}_1)$ ce qui produit un entier $N_2 \geqslant 1$ et une stratification $\mathscr{Y}_2$ de $Y_{U_1}[1/N_2]$ tels que $Rf'_!(D_{X'/U_1}(K))$ soit adapté à $\mathscr{Y}_2$, dès que $Y' \to Y_{U_1}[1/\ell]$ se factorise par $Y_{U_1}[1/N_2\ell] \to Y_{U_1}[1/\ell]$; enfin on applique (3.2.1) à $Y_{U_1}[1/N_2] \to U_1[1/N_2]$ et à $\mathscr{Y}_2$, ce qui produit un entier $N_3 \geqslant 1$, un ouvert dense $U_3 \subset U_1[1/N_2 N_3]$ et une stratification $\widetilde{\mathscr{Y}}_2$ de Y_{U_3}. Maintenant, il est clair que $N = N_1 N_2 N_3$, $U = U_3$ (vu comme ouvert dense de $S[1/N]$) et $\mathscr{Y} = \widetilde{\mathscr{Y}}_2$ font marcher (3.3.2).

Prenant un raffinement commun des stratifications produites par (3.1.2) et (3.3.2), on obtient finalement :

Corollaire **(3.3.3)**. — *Soient* $S, X, Y, f : X \to Y$ *et* $\mathscr{X}$ *comme dans* (3.3.2). *Alors, il existe un entier* $N \geqslant 1$, *un ouvert dense* U *de* $S[1/N]$, *une stratification* $\mathscr{Y}$ *de* Y_U, *un entier* $C \geqslant 1$ *et une application additive* $f_!$ *tels que* :

(i) $(\mathscr{X}_{X_U}, \mathscr{Y}, C, f_!)$ *soit une* !*-stratification universelle de* $f : X_U \to Y_U$;
(ii) $(\mathscr{X}_{X_U}, \mathscr{Y})$ *soit une* $*$*-stratification de* $f : X_U \to Y_U$.

Appendice **(3.4)** : *preuve des théorèmes* (3.1.2) *et* (3.2.1).

(3.4.1) *Lemmes d'existence de stratifications.*

Lemme **(3.4.1.1)**. — *Soient* Y *un bon-schéma et* $\mathscr{X}$ *une stratification de* $\mathbf{A}^1_Y = Y[T]$. *Alors, il existe un entier* $N \geqslant 1$, *une stratification* $\mathscr{Y} = \{Y_\beta\}$ *de* $Y[1/N]$, *à strates* Y_β *normales, connexes et plates sur* $\mathbf{Z}$, *et, pour chaque* β, *une décomposition de* $\mathbf{A}^1_{Y_\beta}$ *en*

$$\mathbf{A}^1_{Y_\beta} = (\mathbf{A}^1_{Y_\beta} - D_\beta) \cup D_\beta, \quad D_\beta = \coprod_{1 \leqslant \nu \leqslant n_\beta} D_{\beta,\nu},$$

avec D_β (*resp.* $D_{\beta,\nu}$) *un diviseur de* $\mathbf{A}^1_{Y_\beta}$, *fini étale sur* Y_β, *de degré* d_β (*resp.* $d_{\beta,\nu}$), *défini par un polynôme unitaire* $F_\beta(T)$ (*resp.* $F_{\beta,\nu}(T)$) *de degré* d_β (*resp.* $d_{\beta,\nu}$), *à coefficients dans* $\Gamma(Y_\beta, \mathcal{O}_{Y_\beta})$, *dont le discriminant est inversible sur* Y_β, *et avec*

$$F_\beta(T) = \prod_{\nu=1}^{n_\beta} F_{\beta,\nu}(T),$$

tels que la stratification de $\mathbf{A}^1_{Y[1/N]}$,

$$\mathbf{A}^1_{Y[1/N]} = \coprod_\beta \{(\mathbf{A}^1_{Y_\beta} - D_\beta) \amalg (\coprod_{1\leqslant\nu\leqslant n_\beta} D_{\beta,\nu})\},$$

soit plus fine que la stratification $\mathcal{X}[1/N]$.

En effet, cela résulte, par récurrence noethérienne sur Y, de [11] (4.2).

Nous dirons qu'un morphisme $f: X \to Y$ est *très élémentaire* s'il est Y-isomorphe soit à

$$D \to Y,$$

soit à $$\mathbf{A}^1_Y - D \to Y,$$

où $D \subset \mathbf{A}^1_Y$ est soit vide soit fini étale de degré $d \geqslant 1$ sur Y et défini dans $\mathbf{A}^1_Y$ par un polynôme unitaire de degré d, à coefficients dans $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ dont le discriminant est inversible sur Y.

Nous dirons qu'un morphisme $f: X \to Y$ est une *fibration très élémentaire* (de longueur $\leqslant n$) s'il admet une factorisation en une suite finie (d'au plus n) morphismes très élémentaires.

Lemme **(3.4.1.2).** — *Soient* Y *un bon schéma,* $f: X \to Y$ *un morphisme de type fini et* $\mathcal{X}$ *une stratification de* X. *Alors, il existe un entier* $N \geqslant 1$, *une stratification* $\mathcal{Y} = \{Y_\beta\}$ *de* $Y[1/N]$, *à strates* Y_β *plates sur* **Z**, *et, pour chaque* β, *une stratification*

$$f^{-1}(Y_\beta)^{red} = \coprod_{1\leqslant\nu\leqslant n_\beta} X_{\beta,\nu}$$

de $f^{-1}(Y_\beta)$, *tels que*

(i) *la stratification de* $X[1/N]$,

$$X[1/N]^{red} = \coprod_{\beta,\nu} X_{\beta,\nu},$$

est plus fine que la stratification $\mathcal{X}[1/N]$,

(ii) *pour tout* β *et tout* ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n_\beta$, *le morphisme* $f: X_{\beta,\nu} \to Y_\beta$ *est une fibration très élémentaire.*

En effet, on peut supposer que f est la restriction de la projection canonique $\mathbf{A}^1_Y \to Y$ à un sous-schéma fermé $X \subset \mathbf{A}^1_Y$ (dévissages usuels : couper Y en morceaux, couper X en morceaux, factoriser f). Alors, ou bien $X = \mathbf{A}^1_Y$ et la conclusion résulte aussitôt de (3.4.1.1), ou bien $X \neq \mathbf{A}^1_Y$. Dans ce dernier cas, on peut supposer de plus Y normal,

connexe et plat sur $\mathbf{Z}$, de point générique η (récurrence noethérienne sur Y). Au-dessus de η, qui est le spectre d'un corps de caractéristique nulle, $(X^{red})_\eta$ est soit $\mathbf{A}^1_\eta$ tout entier, soit un sous-schéma de $\mathbf{A}^1_\eta$ fini, étale sur η, défini par un polynôme unitaire à discriminant inversible. Cette situation se propage au-dessus d'un voisinage de η dans Y et on conclut par récurrence noethérienne sur Y.

(3.4.2) *Démonstration du théorème* (3.1.2).

Grâce au lemme (3.4.1.2), il suffit de démontrer (3.1.2) pour $f: X \to Y$ un morphisme très élémentaire, avec Y plat sur $\mathbf{Z}$, et pour la stratification $\mathscr{X}$ triviale, $\mathscr{X} = \{X\}$.

Le cas $X = D \to Y$ est trivial (f est fini étale de degré $d \geqslant 0$) : on prend $N = 1$, $\mathscr{Y} = \{Y\}$, $C = d$ et, si $\varphi : X \to \mathbf{Z}$ est adaptée à $\mathscr{X}$, *i.e.* constante de valeur a, on prend pour $f_! \varphi : Y \to \mathbf{Z}$ la fonction constante de valeur ad (la platitude de Y sur $\mathbf{Z}$ ne sert pas dans ce cas).

Il reste le cas $X = \mathbf{A}^1_Y - D \to Y$ (D est fini étale de degré $d \geqslant 0$) : on prend alors $N = 1$, $\mathscr{Y} = \{Y\}$, $C = d + 1$, et pour $\varphi : X \to \mathbf{Z}$ adaptée à $\mathscr{X}$, *i.e.* constante de valeur a, on prend pour $f_! \varphi : Y \to \mathbf{Z}$ la fonction constante de valeur $(1 - d)\, a$; pour voir que N, $\mathscr{Y}$, C, $f_!$ font marcher (3.1.2) dans ce cas, on remarque que, Y étant plat sur $\mathbf{Z}$, tout objet K de $D^b_c(X[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui est à cohomologie lisse est automatiquement à cohomologie modérément ramifiée le long de $D[1/\ell]$ et le long de la section à l'infini de $\mathbf{A}^1_Y$ (cf. [11] (4.7.1)). Après, tout changement de base $Y' \to Y[1/\ell]$, tout facteur direct L de $K_{Y'}$ est encore à cohomologie lisse sur $X_{Y'}$ et modérément ramifié le long de $D_{Y'}$, et de la section à l'infini de $\mathbf{A}^1_{Y'}$. Il en résulte (cf. [11] (4.7.1)) que les faisceaux de cohomologie de $Rf'_! L$ sont lisses sur Y' et que la fonction χ de $Rf'_! L$ est donnée par

$$\chi(Rf'_! L)(y') = (1 - d)\, \chi(L)(x')$$

pour tout $x' \in X'$ d'image y' dans Y'.

Pour contrôler $||Rf'_! L||$ on utilise les faits suivants : pour un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse $\mathscr{F}$ sur $(\mathbf{A}^1_{Y'} - D_{Y'})[1/\ell]$, seuls $R^1 f'_! \mathscr{F}$ et $R^2 f'_! \mathscr{F}$ peuvent être non nuls et le rang de $R^2 f'_! \mathscr{F}$ en $y' \in Y'[1/\ell]$ est borné par le rang de $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{A}^1_{y'} - D_{y'}$. Soit donc y' un point de $Y'[1/\ell]$ et x' un point de $(\mathbf{A}^1_{Y'} - D_{Y'})[1/\ell]$ au-dessus de y', *i.e.* un point de $\mathbf{A}^1_{y'} - D_{y'}$; on a alors

$$||Rf'_!(L)||(y') = \sum_i \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}[R^i f'_!(L)_{y'}] \leqslant \sum_{i,j} \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}[R^i f'_!(\mathscr{H}^j(L))_{y'}]$$

(suite spectrale d'hypercohomologie), donc

$$||Rf'_!(L)||(y') \leqslant \sum_j \Big(\sum_{i=1}^{2} \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}[R^i f'_!(\mathscr{H}^j(L))_{y'}]\Big),$$

or, pour $\mathscr{F}$ un quelconque des $\mathscr{H}^j(\mathrm{L})$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}[(\mathrm{R}^i f_!' \mathscr{F})_{y'}] &= -\chi(\mathrm{R}f_!' \mathscr{F})(y') + 2\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}[(\mathrm{R}^2 f_!' \mathscr{F})_{y'}] \\ &= (d-1)\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{F}_{x'}) + 2\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}[(\mathrm{R}^2 f_!' \mathscr{F})_{y'}] \\ &\leqslant (d-1)\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{F}_{x'}) + 2\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{F}_{x'}),\end{aligned}$$

d'où $$||\mathrm{R}f_!' \mathrm{L}||(y') \leqslant (d+1)\,||\mathrm{L}||(x'),$$

ce qui achève la preuve de (3.1.2).

(3.4.3) *Démonstration du théorème* (3.2.1).

On peut remplacer X, S par $\mathrm{X}^{\mathrm{red}}$, $\mathrm{S}^{\mathrm{red}}$ sans rien changer. Pour tout bon schéma réduit, il existe un entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ et un ouvert dense U de S[1/N] qui est normal et plat sur $\mathbf{Z}$, et donc réunion disjointe de ses composantes irréductibles; travaillant séparément sur chaque composante irréductible, on est donc ramené à montrer le théorème (3.2.1) dans le cas où $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$, avec R un anneau intègre, normal, de corps des fractions k de caractéristique o.

On procède maintenant par récurrence sur la dimension de $\mathrm{X} \otimes_{\mathrm{R}} k$.

Si $\dim(\mathrm{X} \otimes_{\mathrm{R}} k) = 0$, $\mathrm{X} \otimes_{\mathrm{R}} k$ est fini étale sur k, ainsi que $\mathrm{X}_\alpha \otimes_{\mathrm{R}} k$ pour chaque strate X_α de la stratification donnée $\mathscr{X}$ de X. Cette situation se propage sur un ouvert dense U de S; alors $\mathrm{N} = 1$, U et $\widetilde{\mathscr{X}} = \{(\mathrm{X}_\alpha)_{\mathrm{U}}\}$ font marcher (3.2.1).

Si $\dim(\mathrm{X} \otimes_{\mathrm{R}} k) > 0$, soient $x_1, \ldots, x_r$ les points maximaux de X. Quitte à remplacer S par un ouvert dense de S, on peut supposer que, pour chaque $i = 1, \ldots, r$, l'anneau local de X en x_i est un corps de type fini sur k (rappelons que X est réduit), de sorte qu'il existe un voisinage ouvert V_i de x_i dans X lisse sur R et contenu dans la strate de $\mathscr{X}$ passant par x_i. Posons alors

$$\mathrm{V} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{V}_i, \qquad \mathrm{Y} = (\mathrm{X} - \mathrm{V})^{\mathrm{red}};$$

V est un ouvert de X et $\dim(\mathrm{Y} \otimes_{\mathrm{R}} k) < \dim(\mathrm{X} \otimes_{\mathrm{R}} k)$; de plus, tout complexe K adapté à $\mathscr{X}$ est aussi adapté à la stratification $\mathscr{X}'$ de X donnée par

$$\mathrm{X} = \mathrm{V} \amalg \coprod_{\alpha} (\mathrm{X}_\alpha \cap \mathrm{Y}).$$

Par récurrence, le théorème (3.2.1) est démontré pour Y muni de la stratification $\mathscr{X}_{\mathrm{Y}} = \{\mathrm{X}_\alpha \cap \mathrm{Y}\}$, donc il existe $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{S}$ ouvert dense et une stratification $\mathscr{Y}_1$ de Y faisant marcher (3.2.1) pour $(\mathrm{Y}_{\mathrm{U}_1} \to \mathrm{U}_1, \mathscr{X}_{\mathrm{Y}})$.

Le point central de la démonstration est alors le suivant : par la résolution des

singularités appliquée à $V \otimes_R k \hookrightarrow X \otimes_R k$ (cf. [10]), on sait qu'il existe un ouvert dense $U_2 \subset U_1 \subset S$ et un diagramme dont chaque carré est cartésien

$$(3.4.3.1) \qquad \begin{array}{ccccc} \overline{V} & \xrightarrow{\bar{j}} & \overline{X} & \xleftarrow{\bar{i}} & D \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_D} \\ V_{U_2} & \xrightarrow{j} & X_{U_2} & \xleftarrow{i} & Y_{U_2} \end{array}$$

avec π propre, $\overline{X}$ lisse sur U_2 et D un diviseur dans $\overline{X}$ à croisements normaux relativement à U_2.

Désignons par $\mathscr{D}$ la stratification canonique de D (localement pour la topologie étale, $D^{red} = \bigcup_i D_i$, avec D_i irréductible et lisse sur U_2, et $\mathscr{D}$ est décrite comme la famille des différences successives dans la suite décroissante de fermés

$$D^{red} = \bigcup_i D_i \supset \bigcup_{i \neq j} (D_i \cap D_j) \supset \bigcup_{i \neq j \neq k} (D_i \cap D_j \cap D_k) \supset \ldots .$$

Le théorème (3.1.2) appliqué à $(\pi_D : D \to Y_{U_2}, \mathscr{D})$ nous fournit un entier $N \geqslant 1$ et une stratification $\mathscr{Y}_2$ de $Y_{U_2}[1/N]$ tels que $(\mathscr{D}[1/N], \mathscr{Y}_2)$ soit une !-stratification universelle pour π_D (on oublie C et $\pi_{D!}$).

Nous prétendons maintenant que ce $N \geqslant 1$, l'ouvert dense $U = U_2[1/N]$ de $S[1/N]$ et la stratification

$$\tilde{\mathscr{X}} = \{V_{U_2}[1/N], ((\mathscr{Y}_1)_{U_2}[1/N]) \cap \mathscr{Y}_2\}$$

font marcher (3.2.1).

Notons d'abord que, pour $X' \to X$ étale, le diagramme déduit de (3.4.3.1) par le changement de base $X' \to X$ vérifie toujours les mêmes conditions; ceci nous permet dans la suite de nous limiter au cas $X' = X$.

Soit donc K un objet de $D_c^b(X[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ adapté à la stratification

$$\mathscr{X}' = \{V, \{X_\alpha \cap Y\}\}.$$

La « suite exacte », où $K_U = K \mid X_U[1/\ell]$,

$$0 \to j_! j^* K_U \to K_U \to i_* i^* K_U \to 0$$

donne un « triangle »

$$D_{X_U/U}(i_* i^* K_U) \to D_{X_U/U}(K_U) \to D_{X_U/U}(j_! j^* K_U)$$

(cf. [8] (1.1.2) pour la notion de « triangle » ou « suite exacte »), dans lequel on a, par dualité de Verdier (cf. (1.1.3)),

$$\begin{cases} D_{X_U/U}(i_* i^* K_U) = i_* D_{Y_U/U}(i^* K_U) \\ D_{X_U/U}(j_! j^* K_U) = Rj_* D_{V_U/U}(j^* K_U). \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, $D_{Y_U/U}(i^* K_U)$ est adapté à la stratification $(\mathscr{Y}_1)_U[1/\ell]$ de $Y_U[1/\ell]$ et sa formation est compatible à tout changement de base $T \to U[1/\ell]$, avec T bon. Il résulte trivialement de ceci, puisque i est une immersion fermée, que $D_{X_U/U}(i_* i^* K_U)$ est adapté à la stratification $\widetilde{\mathscr{X}}$ de X_U et que sa formation est compatible à tout changement de base $T \to U$ avec T bon.

Il reste donc à prouver que $Rj_* D_{V_U/U}(j^* K_U)$ est adapté à $\widetilde{\mathscr{X}}$ et que sa formation commute à tout changement de base $T \to U[1/\ell]$, avec T bon.

Sur $V_U[1/\ell]$, $j^* K_U$ est à cohomologie lisse et, V_U/U étant lisse, $D_{V_U/U}(j^* K_U)$ est aussi à cohomologie lisse et sa formation commute à tout changement de base $T \to U[1/\ell]$, avec T bon.

Pour contrôler ce qui se passe sur $X_U - V_U$, on se sert de la factorisation $j = \pi \circ \bar{j}$ (cf. (3.4.3.1)), ce qui donne

$$Rj_* D_{V_U/U}(j^* K_U) = R\pi_* R\bar{j}_* D_{V_U/U}(j^* K_U)$$

puis, comme π est propre, le théorème de changement de base propre (cf. [SGA 4] XII (5.1)) dit que

$$i^* Rj_* D_{V_U/U}(j^* K_U) = R\pi_{D!}(\bar{i}^* R\bar{j}_* D_{V_U/U}(j^* K_U)).$$

Par (3.1.2), appliqué à π_D, on est ramené, pour achever la preuve de (3.2.1), à vérifier le point suivant : si $L \in \mathrm{ob}\, D_c^b(V_U[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est à cohomologie lisse (ici $L = D_{V_U/U}(j^* K_U)$), l'objet $\bar{i}^* R\bar{j}_* L$ de $D_c^b(D_U[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est adapté à la stratification $\mathscr{D}_U$ de D_U et de formation compatible à tout changement de base $T \to U[1/\ell]$ avec T bon.

Or, ceci est bien connu : U étant irréductible avec point générique de caractéristique 0, les faisceaux de cohomologie de L sur $(\overline{X}_U - D_U)[1/\ell]$ sont automatiquement modérément ramifiés le long de $D_U[1/\ell]$ (cf. [SGA 1] XIII) et on peut appliquer [SGA 4 ½], [Th. Finitude] (A.1.3.3).

4. Un théorème d'uniformité pour la transformation de Fourier

(4.0) Soient S un schéma de type fini sur $\mathbf{Z}$, $E \xrightarrow{\pi} S$ un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$, $E^\vee \xrightarrow{\pi^\vee} S$ son fibré vectoriel dual et $\mu : E \times_S E^\vee \to \mathbf{A}^1_S$ l'accouplement canonique.

Pour tout corps fini $\mathbf{F}_q$, pour tout nombre premier ℓ inversible dans $\mathbf{F}_q$ et pour tout caractère additif non trivial $\psi : \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ on dispose du foncteur transformation de Fourier (cf. (2.1.4))

$$\mathscr{F}_{S \otimes \mathbf{F}_q, \psi} : D_c^b(E_{S \otimes \mathbf{F}_q}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(E^\vee_{S \otimes \mathbf{F}_q}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell);$$

plus généralement, si $T \to S$ est un morphisme avec T un bon $\mathbf{F}_q$-schéma, on dispose du foncteur transformation de Fourier

$$\mathscr{F}_{T, \psi} : D_c^b(E_T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(E^\vee_T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell).$$

Théorème (**4.1**). — *Soit, de plus,* $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}$ *une stratification de* E. *Alors il existe un entier* $N \geqslant 1$, *une stratification* $\mathscr{E}^\vee = \{E^\vee_\beta\}$ *de* $E^\vee[1/N]$, *à strates* $E^\vee_\beta$ *non vides et plates sur* $\mathbf{Z}$, *un entier* $C \geqslant 1$ *et une application additive*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fonctions constructibles}\\ E[1/N] \to \mathbf{Z} \text{ adaptées}\\ \text{à } \mathscr{E}[1/N]\end{array}\right\} \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^\vee} \left\{\begin{array}{c}\text{fonctions constructibles}\\ E^\vee[1/N] \to \mathbf{Z} \text{ adaptées}\\ \text{à } \mathscr{E}^\vee[1/N]\end{array}\right\}$$

ayant la propriété suivante : pour tout nombre premier ℓ, *pour tout morphisme étale* $S' \to S[1/N\ell]$, *pour tout corps fini* $\mathbf{F}_q$ *tel que* $S' \otimes \mathbf{F}_q \neq \varnothing$, *pour tout* $\mathbf{F}_q$*-morphisme* $T \to S' \otimes \mathbf{F}_q$ *avec* T *un bon* $\mathbf{F}_q$*-schéma, pour tout caractère additif non trivial* $\psi : \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, *pour tout objet* K *de* $D^b_c(E_{S'}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *adapté à* $\mathscr{E}_{S'}$ *et pour tout facteur direct* L *de* K_T *dans* $D^b_c(E_T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *le transformé de Fourier*

$$\mathscr{F}_{T,\psi}(L) \in \mathrm{ob}\, D^b_c(E^\vee_T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

est adapté à $\mathscr{E}^\vee_T$ *et, pour tout point* $t \in T$, *il vérifie l'inégalité*

$$\operatorname*{Sup}_{e^\vee \in E^\vee_t} ||\mathscr{F}_{T,\psi}(L)||(e^\vee) \leqslant C . \operatorname*{Sup}_{e \in E_t} ||L||(e);$$

de plus, si L *est* χ*-adapté à* $\mathscr{E}_T$, $\mathscr{F}_{T,\psi}(L)$ *est* χ*-adapté à* $\mathscr{E}^\vee_T$ *et on a (au sens de* (3.1) (iii))

$$\chi(\mathscr{F}_{T,\psi}(L)) = (\chi(L))^\vee.$$

Remarque (**4.1.1**). — L'application $\varphi \mapsto \varphi^\vee$, si elle existe, est uniquement déterminée par $E \to S$. De plus, pour $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\vee$ comme ci-dessus, elle est donnée par la « recette » suivante : pour chaque α, soit x_α un point géométrique de $E_\alpha[1/N]$, pour chaque β, soient y_β un point géométrique de $E^\vee_\beta$, s_β le point géométrique de S en dessous de y_β (*i.e.* $s_\beta = \pi^\vee(y_\beta)$) et u_β un point géométrique générique de $\mathbf{A}^1_{s_\beta}$, soit ℓ un nombre premier distinct des caractéristiques résiduelles des s_β, alors

$$\varphi^\vee(y_\beta) = \sum_\alpha \varphi(x_\alpha) . [\chi_{\alpha,\beta} - \chi'_{\alpha,\beta}]$$

avec
$$\chi_{\alpha,\beta} = \sum_i (-1)^i \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}[H^i_c((E_\alpha)_{s_\beta}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)]$$

et
$$\chi'_{\alpha,\beta} = \sum_i (-1)^i \dim_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}[H^i_c((E_\alpha)_{s_\beta} \cap H_{y_\beta,u_\beta}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)]$$

où H_{y_β,u_β} est l'hyperplan géométrique de E_{s_β} d'équation $\mu(x, y_\beta) = u_\beta$.

Corollaire (**4.2**). — *On suppose de plus* S *intègre, avec point générique de caractéristique zéro, et soit encore* $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}$ *une stratification de* E. *Alors, il existe un ouvert dense* $U^\vee \subset E^\vee$ *de* $E^\vee$ *vérifiant la condition suivante : pour tout nombre premier* ℓ, *pour tout morphisme étale* $S' \to S[1/\ell]$, *pour tout corps fini* $\mathbf{F}_q$ *tel que* $S' \otimes \mathbf{F}_q \neq \varnothing$, *pour tout* $\mathbf{F}_q$*-morphisme* $T \to S' \otimes \mathbf{F}_q$ *avec* T *un bon* $\mathbf{F}_q$*-schéma et* $U^\vee_T \neq \varnothing$, *pour tout caractère additif non trivial* $\psi : \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, *pour tout objet* K *de* $D^b_c(E_{S'}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *qui est adapté à* $\mathscr{E}_{S'}$ *et pour tout facteur direct* L *de* K_T *dans* $D^b_c(E_T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *on a* :

(0) *les faisceaux de cohomologie de*

$$\mathscr{F}_{T,\psi}(L) \mid U_T^V \quad \text{et} \quad \mathscr{F}_{T,\bar{\psi}}(D_{E_T/T}(L)) \mid U_T^V$$

sont lisses,

(i) *si* K *est pervers relativement à* S, *ces faisceaux de cohomologie sur* U_T^V *sont tous nuls sauf éventuellement ceux en dimension* $-r$; *les* $\mathscr{H}^{-r}$ *sont lisses sur* U_T^V *et en dualité parfaite à valeurs dans le faisceau constant* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ *sur* U_T^V;

(ii) *si* K *est pervers relativement à* S *et si* L *est* χ*-adapté à* $\mathscr{E}_T$, *alors le rang commun des* $\mathscr{H}^{-r}$ *est constant sur* U_T^V;

(iii) *si* K *est pervers relativement à* S *et si on suppose que* T *est de type fini sur* $\mathbf{F}_q$ *et que* L *est pur, de poids* m, *relativement à* T, *alors les* $\mathscr{H}^{-r}$ *sont ponctuellement purs de poids* m *et* $-m$ *respectivement sur* U_T^V.

Remarque (**4.2.1**). — Pour L comme en (4.2) (ii), le rang commun des $\mathscr{H}^{-r}$ est donné par la recette suivante : soit $\widetilde{L}$ un objet quelconque de $D_c^b(E[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui est χ-adapté à $\mathscr{E}$ et dont la fonction χ induit celle de L sur E_T; notons $\bar{\eta}$ un point géométrique générique de S, u un point géométrique générique de $\mathbf{A}^1_{\bar{\eta}}$ et y un point géométrique générique de $E^V_{\bar{\eta}}$; notons $H_{y,u}$ l'hyperplan générique géométrique de $E_{\bar{\eta}}$ d'équation $\mu(x,y) = u$, alors

$$\operatorname{rang} \mathscr{H}^{-r} = (-1)^r[\chi_c(E_{\bar{\eta}}, \widetilde{L}) - \chi_c(H_{y,u}, \widetilde{L})].$$

(**4.2.2**) *Preuve du corollaire.* — Prenons une stratification $\mathscr{E}^V$ de $E^V[1/N]$, pour un certain $N \geqslant 1$, faisant marcher (4.1) et prenons pour U^V un ouvert de E^V qui contient le point générique δ^V de E^V et qui est contenu dans l'unique strate E^V_β qui contient δ^V. L'énoncé est maintenant une conséquence formelle de (4.1) et de (2.3.1); de même la remarque (4.2.1) résulte formellement de la remarque (4.1.1).

Lemme (**4.2.3**). — *Dans* (4.2), *on peut choisir l'ouvert dense* $U^V \subset E^V$ *homogène, i.e. on peut supposer que le complément* $Z = E^V - U^V$ *est défini dans* E^V *par un idéal homogène.*

Preuve de (4.2.3). — Soit $U^V \subset E^V$ un ouvert dense faisant marcher (4.2) et soit $Z = V(\mathscr{I}) \subset E^V$ un sous-schéma fermé tel que $U^V = E^V - Z$. Après le changement de base $T \to S' \otimes \mathbf{F}_q$, les $\mathscr{F}_{T,\psi}(L)$ sont lisses sur U_T^V pour *tout* caractère additif non trivial ψ de $\mathbf{F}_q$. Pour $a \in \mathbf{F}_q^\times$, on peut donc remplacer ψ par $\psi(a^{-1}x) = \psi_a$: les $\mathscr{F}_{T,\psi_a}(L)$ sont encore lisses sur U_T^V; cela revient à dire que les $\mathscr{F}_{T,\psi}(L)$ sont lisses sur $a.U_T^V$, pour tout $a \in \mathbf{F}_q^\times$. Par conséquent, les $\mathscr{F}_{T,\psi}(L)$ sont lisses sur l'ouvert

$$\bigcup_{a \in \mathbf{F}_q^\times} a.U_T^V$$

de E_T^V.

Le complément de cet ouvert est défini par le plus petit idéal qui contient $\mathscr{I}_T$ et qui est « gradué mod $q-1$ », appelons-le $\mathscr{I}_{T,q-1}$. Remarquons alors que si $\mathscr{I}_T$

est engendré par des éléments de degré $\leqslant q-2$, alors $\mathscr{I}_{T,q-1}$ n'est autre que le plus petit idéal gradué $\mathscr{I}_{T,\mathrm{homog}}$ qui contient $\mathscr{I}_T$. Il en résulte que, si $\mathscr{I}$ est engendré par des éléments de degré $\leqslant \delta$, alors l'ouvert dense homogène

$$E^\vee - V((\delta+1)!\,\mathscr{I}_{\mathrm{homog}}),$$

où $\mathscr{I}_{\mathrm{homog}}$ est le plus petit idéal gradué qui contient $\mathscr{I}$, fait marcher (4.2).

(4.3) *Preuve du théorème* (4.1). — On se sert de l'analogue cohomologique de la formule classique (factorisation de la transformation de Fourier par la transformation de Radon) :

$$\hat{f}(y) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \int_{\mathbf{R}^r} f(x)\, e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\, dx = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i u}\Big[\int_{\langle x,y\rangle = u} f(x)\, dx\Big]\, du.$$

Désignons par $\mathrm{pr} : E \times_S E^\vee \to E$, $\mathrm{pr}^\vee : E \times_S E^\vee \to E^\vee$ les deux projections, par $\nu : \mathbf{A}^1_{E^\vee} \to \mathbf{A}^1_S$, $\rho : \mathbf{A}^1_{E^\vee} \to E^\vee$ les morphismes canoniques et par

$$\gamma : E \times_S E^\vee \to \mathbf{A}^1_{E^\vee} = \mathbf{A}^1_S \times_S E^\vee$$

le morphisme défini par $\gamma(x,y) = (\mu(x,y), y)$; on a alors un diagramme commutatif de S-schémas

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{\mathrm{pr}} & E \times_S E^\vee & & \\ & \swarrow^{\mu} & \downarrow^{\gamma} & \searrow^{\mathrm{pr}^\vee} & \\ \mathbf{A}^1_S & \xleftarrow{\nu} & \mathbf{A}^1_{E^\vee} & \xrightarrow{\rho} & E^\vee \end{array}$$

et, par la formule des projections, on a

$$\mathscr{F}_{T,\psi}(L) = R\rho_{T!}[(R\gamma_{T!}\,\mathrm{pr}_T^*\,L) \otimes \nu_T^*\,\mathscr{L}_\psi]; \tag{4.3.1}$$

c'est l'analogue cohomologique voulu.

Pour se servir de (4.3.1) pour démontrer (4.1), on applique d'abord (3.1.2) au morphisme $\gamma : E \times_S E^\vee \to \mathbf{A}^1_{E^\vee}$ et à la stratification $\mathrm{pr}^*\,\mathscr{E}$ de $E \times_S E^\vee$; ceci nous donne un entier $N_1 \geqslant 1$ et une stratification $\mathscr{X}$ de $\mathbf{A}^1_{E^\vee}[1/N_1]$ qui contrôle $R\gamma_!\,\mathrm{pr}_T^*$. Pour contrôler $\mathscr{F}_{T,\psi}(L)$ on applique alors (3.4.1) à $Y = E^\vee[1/N_1]$ et à la stratification $\mathscr{X}$ de $\mathbf{A}^1_{E^\vee}[1/N_1]$; ceci nous donne un entier $N_2 \geqslant 1$ et une stratification $\mathscr{E}^\vee$ de $Y[1/N_2] = E^\vee[1/N_1 N_2]$. Que $N = N_1 N_2 \geqslant 1$ et $\mathscr{E}^\vee$ (stratification de $E^\vee$ à strates normales connexes et plates sur $\mathbf{Z}$) fassent marcher (4.1) résulte alors du lemme suivant :

Lemme **(4.3.2)**. — *Soient* Y *un schéma de type fini et plat sur* $\mathbf{Z}$ *et*

$$\mathscr{X} = \{\mathbf{A}^1_Y - D, D_1, \ldots, D_n\}, \qquad D = \coprod_{i=1}^{n} D_i$$

une stratification de $\mathbf{A}^1_Y$, *avec* $D_1, \ldots, D_n$ *des diviseurs dans* $\mathbf{A}^1_Y$, *finis étales sur* Y, *de rangs constants* $d_1, \ldots, d_n$. *Pour tout corps fini* $\mathbf{F}_q$, *pour tout* $\mathbf{F}_q$*-morphisme* $T \to Y \otimes \mathbf{F}_q$, *avec* T *un bon*

$\mathbf{F}_q$-schéma, pour tout nombre premier ℓ inversible dans $\mathbf{F}_q$, pour tout caractère additif non trivial $\psi : \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, pour tout objet K *de* $\mathrm{D}_c^b(\mathbf{A}^1_Y[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *adapté à* $\mathscr{X}$ *et pour tout facteur direct* L *de* K_T *dans* $\mathrm{D}_c^b(\mathbf{A}^1_T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *on a alors* :

(i) *l'objet* $\mathrm{R}\rho_{T!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi)$ *de* $\mathrm{D}_c^b(\mathrm{T}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *où* $\rho_T : \mathbf{A}^1_T \to \mathrm{T}$ *est la projection canonique et* $\mathscr{L}_\psi$ *le* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau d'Artin-Schreier associé à* ψ *sur* $\mathbf{A}^1_T$ (cf. (2.0)), *est à cohomologie lisse sur* T;

(ii) *pour tout* $t \in \mathrm{T}$, *on a l'inégalité*

$$|| \mathrm{R}\rho_{T!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi) || \,(t) \leqslant 2d \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbf{A}^1_t} || \mathrm{L} || \,(x)$$

où d est le degré constant de $\mathrm{D} \to \mathrm{Y}$;

(iii) *si on suppose que* L *est* χ*-adapté à* $\mathscr{X}_T$, *alors la fonction* χ *de* $\mathrm{R}\rho_{T!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi)$ *sur* T *est constante de valeur (pour tout* $t \in \mathrm{T}$)

a) $$\chi(\mathrm{R}\rho_{T!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi))\,(t) = \chi(\mathrm{R}\rho_! \,\widetilde{\mathrm{L}})\,(y) - \chi(\widetilde{\mathrm{L}})\,(x)$$

pour un choix arbitraire d'un $\widetilde{\mathrm{L}} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}_c^b(\mathbf{A}^1_Y[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ χ*-adapté à* $\mathscr{X}$, *dont la fonction* χ *induit celle de* L, *et de points* $x \in \mathbf{A}^1_Y[1/\ell]$, $y \in \mathrm{Y}[1/\ell]$ (*en particulier, on peut prendre* $x \in \mathbf{A}^1_Y(\mathbf{C})$, $y \in \mathrm{Y}(\mathbf{C})$); *on a*

b) $$\chi(\mathrm{R}\rho_{T!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi))\,(t) = -\,da + \sum_{i=1}^{n} d_i\, a_i$$

où a (*resp.* a_i) *est la valeur constante de* $\chi(\mathrm{L})$ *sur* $\mathbf{A}^1_T - \mathrm{D}_T$ (*resp.* $\mathrm{D}_{i,T}$ *pour* $i = 1, \ldots, n$) *et où* $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ *est le degré constant de* D *sur* Y.

(4.3.3) *Preuve de* (4.3.2). — La platitude sur $\mathbf{Z}$ de Y assure que K est modérément ramifié le long de $\mathrm{D}[1/\ell]$ et de la section à l'infini de $\mathbf{A}^1_Y[1/\ell]$ (cf. [8] (4.7.1)); par suite, L sur $\mathbf{A}^1_T$ est aussi modérément ramifié le long de D_T et de la section à l'infini de $\mathbf{A}^1_T$. D'autre part, $\mathscr{L}_\psi$ est lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}^1_T$, avec conducteur de Swan constant 1 le long de la section à l'infini de $\mathbf{A}^1_T$ ($\mathrm{Swan}_\infty(\mathscr{L}_\psi \mid \mathbf{A}^1_t) = 1$, pour tout point géométrique t de T). La lissité des faisceaux de cohomologie de $\mathrm{R}\rho_{T!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi)$ sur T est donc un cas particulier du théorème de semi-continuité du conducteur de Swan, démontré par Deligne (cf. [12] (2.1.2)).

Les formules pour $\chi(\mathrm{R}\rho_{T!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi))$ résultent de la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič ([15] et [11] (4.8.2)) : pour t un point géométrique de T et $\overline{\eta}$ un point géométrique générique de $\mathbf{A}^1_t$, on a par modération des $\mathscr{H}^j(\mathrm{L})$,

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{R}\rho_{T!}(\mathscr{H}^j(\mathrm{L}) \otimes \mathscr{L}_\psi))\,(t) &= \chi(\mathrm{R}\rho_{T!}\,\mathscr{H}^j(\mathrm{L}))\,(t) - \mathrm{Swan}_\infty(\mathscr{L}_\psi)\,.\,\chi(\mathscr{H}^j(\mathrm{L}))\,(\overline{\eta}) \\ &= \chi(\mathrm{R}\rho_{T!}\,\mathscr{H}^j(\mathrm{L}))\,(t) - \chi(\mathscr{H}^j(\mathrm{L}))\,(\overline{\eta})\end{aligned}$$

d'où $$\chi(\mathrm{R}\rho_{T!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi))\,(t) = \chi(\mathrm{R}\rho_{T!}\,\mathrm{L})\,(t) - \chi(\mathrm{L})\,(\overline{\eta})$$

ce qui achève la démonstration de (iii).

Pour démontrer (ii), on utilise les faits suivants (cf. [11] (4.8)) : pour un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{A}^1_t$ qui est modérément ramifié et adapté à $(\mathbf{A}^1_t - \mathrm{D}_t, \mathrm{D}_{1,t}, \ldots, \mathrm{D}_{n,t})$, on a

$$\mathrm{H}^2_c(\mathbf{A}^1_t, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\psi) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathrm{H}^0_c(\mathbf{A}^1_t, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\psi)) &\leqslant \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathrm{H}^0_c(\mathrm{D}_t, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\psi)) \\ &\leqslant \sum_{x \in \mathrm{D}_t} \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{F}_x),\end{aligned}$$

et, par suite, on a

$$\begin{aligned}&\sum_i \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathrm{H}^i_c(\mathbf{A}^1_t, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\psi)) \\ &\qquad = -\chi_c(\mathbf{A}^1_t, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\psi) + 2\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathrm{H}^0_c(\mathbf{A}^1_t, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\psi)) \\ &\qquad = d.\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{F}_{\bar{\eta}}) - \sum_{x \in \mathrm{D}_t} \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{F}_x) + 2\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathrm{H}^0_c(\mathbf{A}^1_t, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\psi)) \\ &\qquad \leqslant d.\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{F}_{\bar{\eta}}) + \sum_{x \in \mathrm{D}_t} \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{F}_x).\end{aligned}$$

Pour $t \in \mathrm{T}$, on a donc

$$\begin{aligned}||\mathrm{R}\rho_{\mathrm{T}!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi)||(t) &\leqslant \sum_{i,j} \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathrm{H}^i_c(\mathbf{A}^1_t, \mathscr{H}^j(\mathrm{L}) \otimes \mathscr{L}_\psi)) \\ &\leqslant \sum_j [d.\dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{H}^j(\mathrm{L})_{\bar{\eta}}) + \sum_{x \in \mathrm{D}_t} \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(\mathscr{H}^j(\mathrm{L})_x)]\end{aligned}$$

d'où

$$||\mathrm{R}\rho_{\mathrm{T}!}(\mathrm{L} \otimes \mathscr{L}_\psi)||(t) \leqslant \sum_{x \in \mathrm{D}_t} [||\mathrm{L}||(\bar{\eta}) + ||\mathrm{L}||(x)]$$

et la conclusion. Ceci achève la démonstration de (4.3.2) et par conséquent celle de (4.1) et de la remarque (4.1.1).

5. Une première application du théorème d'uniformité de la transformation de Fourier aux sommes trigonométriques

(5.0) Soient $\mathrm{R} \subset \mathbf{C}$ une sous-$\mathbf{Z}$-algèbre de $\mathbf{C}$ de type fini, r un entier > 0, $\mathbf{A}^r_{\mathrm{R}}$ l'espace affine standard de coordonnées $x_1, \ldots, x_r$ sur R, X un R-schéma *affine*, *lisse*, purement de dimension relative m, et

$$f = (f_1, \ldots, f_r) : \mathrm{X} \to \mathbf{A}^r_{\mathrm{R}}$$

un R-morphisme *fini*. Fixons d'autre part une clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$.

Les données ci-dessus sont les données « fixes »; à ces données fixes, nous adjoindrons des données « mobiles » :

— une fonction *inversible* g sur X (éventuellement $g \equiv 1$) qui sera aussi vue comme un R-morphisme $g : \mathrm{X} \to \mathbf{G}_{m,\mathrm{R}}$,

— un quintuple $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ composé d'un corps fini $\mathbf{F}_q$, d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathrm{R} \to \mathbf{F}_q$ avec $\varphi(1) = 1$, d'un élément $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ de $(\mathbf{F}_q)^r$, d'un caractère additif *non trivial* $\psi : \mathbf{F}_q \to \bar{\mathbf{Q}}^\times$ et d'un caractère multiplicatif (éventuellement trivial) $\chi : \mathbf{F}_q^\times \to \bar{\mathbf{Q}}^\times$.

Nous noterons $f_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}} \to \mathbf{A}^r_{\mathbf{C}}$ et $g_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}} \to \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}}$ les morphismes de $\mathbf{C}$-schémas $f \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ et $g \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$; plus généralement, pour tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : R \to k$, avec $\varphi(1) = 1$, nous noterons $f_\varphi : X_\varphi \to \mathbf{A}^r_k$ et $g_\varphi : X_\varphi \to \mathbf{G}_{m,k}$ les morphismes de k-schémas $f \otimes_{R,\varphi} k$ et $g \otimes_{R,\varphi} k$.

(5.1) Le R-morphisme $f : X \to \mathbf{A}^r_{\mathbf{R}}$ étant fixé comme en (5.0), à toute fonction inversible g sur X et à tout quintuple $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ comme en (5.0), on associe la famille de sommes trigonométriques $(S_n)_{n \geqslant 1}$ (n entier), avec

$$S_n = S_n(g, \mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi) = \sum_{x \in X_\varphi(\mathbf{F}_{q^n})} \psi_n\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i \cdot f_{i,\varphi}(x)\Big)\, \chi_n(g_\varphi(x)),$$

où $\qquad \psi_n = \psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{F}_{q^n}/\mathbf{F}_q} \quad$ et $\quad \chi_n = \chi \circ \mathrm{Nr}_{\mathbf{F}_{q^n}^\times/\mathbf{F}_q^\times}$,

et on associe la fonction L définie par

$$L(T) = L(g, \mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi; T) = \exp\Big(\sum_{n \geqslant 1} \frac{T^n}{n} S_n\Big).$$

Théorème **(5.2).** — *Pour tout* R*-morphisme* $f : X \to \mathbf{A}^r_{\mathbf{R}}$ *comme en* (5.0), *il existe un polynôme homogène non nul* $F(y_1, \ldots, y_r) \in R[y_1, \ldots, y_r]$ *ayant la propriété suivante : pour toute fonction inversible* g *sur* X *et pour tout quintuple* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$, *comme en* (5.0), *tel que*

$$(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0,$$

la fonction $L(T) = L(g, \mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi; T)$ *est de la forme*

$$L(T) = P(T)^{(-1)^{m+1}}$$

où

$$P(T) = \prod_{\lambda=1}^{d} (1 - \alpha_\lambda T)$$

est un polynôme, avec $P(0) = 1$, *vérifiant :*

(i) *les* $(\alpha_\lambda)_{\lambda=1,\ldots,d}$ *sont des entiers algébriques tels que*

$$|\alpha_\lambda| = q^{m/2}$$

pour tout $\lambda = 1, \ldots, d$ *et pour toute valeur absolue archimédienne* $|\ |$ *sur* $\overline{\mathbf{Q}}$,

(ii) *le degré* d *de* $P(T)$ *est indépendant des choix de* g *et de* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ *et est donné par la formule topologique*

$$d = (-1)^m [\chi(X_{\mathbf{C}}) - \chi(H_{\mathbf{C}})]$$

où $H_{\mathbf{C}}$ *est l'hypersurface de* $X_{\mathbf{C}}$ *d'équation*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\mathbf{C}}(x) = b$$

pour n'importe quels $a_1, \ldots, a_r, b$ *dans* $\mathbf{C}$ *qui sont algébriquement indépendants sur* R.

De plus, la fonction $\bar{\mathrm{L}}(\mathrm{T}) = \mathrm{L}(g, \mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \bar{\psi}, \bar{\chi}; \mathrm{T})$ *pour* $\bar{\psi} = \psi^{-1}$ *et* $\bar{\chi} = \chi^{-1}$ *s'écrit*

$$\bar{\mathrm{L}}(\mathrm{T}) = [\prod_{\lambda=1}^{d} (1 - q^m \alpha_\lambda^{-1} \mathrm{T})]^{(-1)^{m+1}}.$$

Corollaire **(5.2.1).** — *Pour toute fonction inversible* g *sur* X, *pour tout quintuple* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$, *comme en* (5.0), *tel que*

$$(\varphi \mathrm{F})(a_1, \ldots, a_r) \neq 0,$$

pour tout entier $n \geqslant 1$ *et pour toute valeur absolue archimédienne* $|\ |$ *sur* $\bar{\mathbf{Q}}$, *on a la majoration*

$$|\mathrm{S}_n(g, \mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)| \leqslant (-1)^m [\chi(\mathrm{X}_0) - \chi(\mathrm{H}_0)]\, q^{mn/2},$$

avec H_0 *comme en* (5.2).

(5.3) Nous allons déduire (5.2) d'un énoncé cohomologique.

Etant donné $g \in \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})^\times$ et un quintuple $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ comme en (5.0), choisissons un nombre premier ℓ inversible dans $\mathbf{F}_q$ et un plongement $\bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_\ell$; l'homomorphisme $\varphi : \mathrm{R} \to \mathbf{F}_q$ se prolonge en un homomorphisme, noté encore φ, de $\mathrm{R}[1/\ell(q-1)]$ dans $\mathbf{F}_q$.

Le revêtement $\pi_\varphi : \tilde{\mathrm{X}}_\varphi \to \mathrm{X}_\varphi$, déduit par image réciproque par g_φ du torseur de Lang de $\mathbf{G}_{m,\mathbf{F}_q}$,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathrm{X}}_\varphi = \mathrm{X}_\varphi[\sqrt[q-1]{g_\varphi}] & \longrightarrow & \mathbf{G}_{m,\mathbf{F}_q} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle z,\ z^{q-1}} \\ \mathrm{X}_\varphi & \xrightarrow{\quad g_\varphi \quad} & \mathbf{G}_{m,\mathbf{F}_q} \end{array}$$

est fini étale et encore un $\mathbf{F}_q^\times$-torseur; on note $\mathscr{L}_\chi(g_\varphi)$ le $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur X_φ image réciproque par g_φ du $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau $\mathscr{L}_\chi$ lisse de rang 1 sur $\mathbf{G}_{m,\mathbf{F}_q}$ déduit du $\mathbf{F}_q^\times$-torseur de Lang par extension du groupe structural via

$$\mathbf{F}_q^\times \xrightarrow{\bar{\chi}} \bar{\mathbf{Q}}^\times \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$$

(cf. [SGA 4½], [Sommes trig.] (1.7)). Alors on a une décomposition

$$\pi_{\varphi *} \bar{\mathbf{Q}}_\ell = \bigoplus_\chi \mathscr{L}_\chi(g_\varphi),$$

la somme étant étendue aux $q-1$ caractères χ de $\mathbf{F}_q^\times$ à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}^\times$.

De même, on note $\mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi})$ le $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur X_φ image réciproque par

$$\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi} : \mathrm{X}_\varphi \to \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$$

du $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau d'Artin-Schreier $\mathscr{L}_\psi$ sur $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ (cf. (2.0)).

Les faisceaux $\mathscr{L}_\chi(g_\varphi)$ et $\mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi})$ sont ponctuellement purs de poids o et lisses sur un schéma affine et lisse X_φ sur $\mathbf{F}_q$, purement de dimension m. Compte tenu de l'interprétation cohomologique des sommes exponentielles (cf. [11] 3 ou [SGA $4\frac{1}{2}$], [Sommes trig.] (1.9)) et des résultats de Deligne (cf. [8] (3.3.1)), le théorème (5.2) résulte aussitôt du théorème suivant :

Théorème **(5.4).** — *Soient* R, X *et* $f: X \to \mathbf{A}^r_R$ *comme en* (5.0). *Alors il existe un polynôme homogène non nul* $F(y_1, \ldots, y_r) \in R[y_1, \ldots, y_r]$ *tel que, pour toute fonction inversible g sur* X, *pour tout quintuple* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ *tel que*

$$(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$$

et pour tout nombre premier ℓ *inversible dans* $\mathbf{F}_q$, *on ait* :

(i) *les groupes de cohomologie* ℓ*-adique*

$$H^j_c = H^j_c(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_q} \overline{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_\chi(g_\varphi))$$

sont nuls pour tout $j \neq m$, *et l'accouplement défini par le cup-produit et la trace*

$$H^m_c \otimes \overline{H}^m_c \to H^{2m}_c(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_q} \overline{\mathbf{F}}_q, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \overline{\mathbf{Q}}_\ell(-m)$$

où $\overline{H}^m_c$ *est défini comme* H^m_c *mais avec* $\overline{\psi}$, $\overline{\chi}$ *à la place de* ψ, χ, *est une dualité parfaite,*

(ii) *si on pose*

$$H^j = H^j(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_q} \overline{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_\chi(g_\varphi)),$$

la flèche d'oubli des supports

$$H^j_c \to H^j$$

est un isomorphisme pour tout j,

(iii) *pour tout* j, $H^j_c \xrightarrow{\sim} H^j$ *est pur de poids* j, *et même nul si* $j \neq m$,

(iv) *la formule*

$$\chi_c(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_q} \overline{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_\chi(g_\varphi)) = \chi_c(X_{\mathbf{C}}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) - \chi_c(H_{\mathbf{C}}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell).$$

Remarque **(5.4.1).** — Les assertions (i) et (ii) de l'énoncé ci-dessus sont équivalentes et (iii) en résulte (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$], [Sommes trig.] (1.2.0)).

(5.4.2) *Prouvons* (5.4). — Construisons d'abord un candidat pour $F(y_1, \ldots, y_r)$. Pour cela, appliquons d'abord (3.1.2) au morphisme fini $X \to \mathbf{A}^r_R$ et à la stratification triviale $\mathscr{X} = \{X\}$ de X, ceci nous fournit un entier $N \geqslant 1$ et une stratification $\mathscr{E}$ de $\mathbf{A}^r_R[1/N]$. Puis appliquons (4.2) et (4.2.3) à $S = \mathrm{Spec}(R[1/N])$, $E = \mathbf{A}^r_S$, $\mathscr{E}$; ceci nous fournit un ouvert dense homogène $U^\vee$ de $E^\vee = \mathbf{A}^r_S$ et donc un ouvert dense $U^\vee$ de $\mathbf{A}^r_R = \mathrm{Spec}(R[y_1, \ldots, y_r])$. On prend pour $F(y_1, \ldots, y_r)$ un polynôme homogène non nul qui s'annule sur $\mathrm{Spec}(R[y_1, \ldots, y_r]) - U^\vee$, de sorte que

$$\mathrm{Spec}(R[y_1, \ldots, y_r][1/F]) \subset U^\vee.$$

Pour voir que F fait marcher (5.4), on considère pour chaque fonction g inversible et chaque corps fini le revêtement

$$\pi : \tilde{X} \to X[1/q-1]$$

déduit par image réciproque par g du μ_{q-1}-torseur de Kummer de $\mathbf{G}_{m,R[1/q-1]}$,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \mathbf{G}_{m,R[1/q-1]} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle z \mapsto z^{q-1}} \\ X[1/q-1] & \xrightarrow{g} & \mathbf{G}_{m,R[1/q-1]} \end{array}$$

c'est un revêtement fini étale de degré $q-1$, de sorte que, pour tout nombre premier ℓ inversible dans $\mathbf{F}_q$, le $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau $\pi_* \bar{\mathbf{Q}}_\ell$ sur $X[1/\ell(q-1)]$ est lisse de rang $q-1$, ponctuellement pur de poids 0.

Parce que $X[1/\ell(q-1)]$ est lisse sur $R[1/\ell(q-1)]$, purement de dimension relative m, l'objet

$$K_1 = \pi_* \bar{\mathbf{Q}}_\ell[m]$$

de $D^b_c(X[1/\ell(q-1)], \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, qui est adapté à la stratification triviale $\mathscr{X} = \{X\}$ de X, est pervers et pur, de poids m, relativement à $\mathrm{Spec}(R[1/\ell(q-1)])$ (cf. (1.2.2) (iii) et (1.3.2) (iii)). Parce que $f : X \to \mathbf{A}^r_R$ est fini, l'objet

$$K = (f_* \pi_* \bar{\mathbf{Q}}_\ell[m]) \mid \mathbf{A}^r_R[1/\ell(q-1)\,N]$$

de $D^b_c(\mathbf{A}^r_R[1/\ell(q-1)\,N], \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est encore pervers et pur, de poids m, relativement à $\mathrm{Spec}(R[1/\ell(q-1)\,N])$; de plus, par choix de N, K est adapté à la stratification $\mathscr{E}[1/\ell(q-1)]$ de $E[1/\ell(q-1)]$.

L'hypothèse

$$(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$$

nous permet de prolonger φ à $R[1/\ell(q-1)\,N]$ de sorte que l'on dispose de l'objet K_φ sur $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$ déduit de K par le changement de base

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q) \to \mathrm{Spec}(R[1/\ell(q-1)\,N]).$$

On a

$$K_\varphi = (f_{\varphi *}\, \pi_{\varphi *}\, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)[m],$$

où π_φ coïncide avec le revêtement du même nom considéré en (5.3) (identification du torseur de Lang et du μ_{q-1}-torseur de Kummer de $\mathbf{G}_{m,\mathbf{F}_q}$); par suite, K_φ se décompose en

$$K_\varphi = \bigoplus_\chi f_{\varphi *} \mathscr{L}_\chi(g_\varphi)[m]$$

où χ parcourt les $q-1$ caractères $\mathbf{F}_q^\times \to \bar{\mathbf{Q}}^\times \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$.

Il ne reste plus qu'à appliquer (4.2) à $S' = \mathrm{Spec}(R[1/\ell(q-1)N])$, $T = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_q)$, $T \to S' \otimes \mathbf{F}_q$ induit par φ, ψ, K et

$$L = f_{\varphi *}\, \mathscr{L}_\chi(g_\varphi)\,[m]$$

qui est facteur direct de $K_T = K_\varphi$ dans $D_c^b(E_T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. L'hypothèse

$$(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$$

assure que le point $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ se trouve dans $U_\varphi^\vee$ et, par application en ce point de $U_\varphi^\vee$ des énoncés (4.2) (i), (ii), (iii) et de la remarque (4.2.1), on obtient (à un décalage près) les assertions (5.4) (i), (iii) et (iv).

(5.5) *La situation en égale caractéristique* $p > 0$. Que deviennent (5.2) et (5.4) si l'on permet à l'anneau R d'être un anneau intègre de type fini sur un corps fini $\mathbf{F}_q$?

Théorème **(5.5.1)**. — *Soient* R *un anneau intègre, de type fini sur un corps fini* $\mathbf{F}_q$, X *un* R*-schéma affine et lisse, purement de dimension relative* m, $r \geqslant 1$ *un entier,*

$$f = (f_1, \ldots, f_r) : X \to \mathbf{A}^r_R$$

un R*-morphisme fini,*

$$g : X \to \mathbf{G}_{m,R}$$

une fonction inversible sur X, $\psi : \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}^\times$ *un caractère additif non trivial,* $\chi : \mathbf{F}_q^\times \to \overline{\mathbf{Q}}^\times$ *un caractère multiplicatif (éventuellement trivial),* ℓ *un nombre premier inversible dans* $\mathbf{F}_q$ *et* $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ *un plongement fixé. Alors, il existe un polynôme non nul* $F(y_1, \ldots, y_r) \in R[y_1, \ldots, y_r]$ *et un entier* $d \geqslant 0$ *tels que, pour tout triple* $(\mathbf{F}_{q^\nu}, \varphi, \mathbf{a})$ *composé d'une extension finie* $\mathbf{F}_{q^\nu}$ *de* $\mathbf{F}_q$, *d'un* $\mathbf{F}_q$*-homomorphisme* $\varphi : R \to \mathbf{F}_{q^\nu}$ *avec* $\varphi(1) = 1$ *et d'un élément* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in (\mathbf{F}_{q^\nu})^r$ *tel que*

$$(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0,$$

on ait :

(i) *la fonction* L *associée aux sommes exponentielles*

$$S_n = \sum_{x \in X_\varphi(\mathbf{F}_{q^{\nu n}})} \psi_{\nu n}\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}(x)\Big)\, \chi_{\nu n}(g_\varphi(x))$$

($n \geqslant 1$) *est de la forme*

$$L(T) = \Big[\prod_{\lambda=1}^{d} (1 - \alpha_\lambda T)\Big]^{(-1)^{m+1}}$$

où les α_λ $(\lambda = 1, \ldots, d)$ *sont des entiers algébriques dont toutes les valeurs absolues archimédiennes satisfont*

$$|\alpha_\lambda| = q^{\nu m/2},$$

(ii) *en cohomologie ℓ-adique, pour tout entier j, l'application d'oubli des supports*

$$H^j_c(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_{q^\nu}} \overline{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_{\psi_\nu}(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_{\chi_\nu}(g_\varphi)) \to H^j(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_{q^\nu}} \overline{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_{\psi_\nu}(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_{\chi_\nu}(g_\varphi))$$

est un isomorphisme (de sorte que $H^j_c \xrightarrow{\sim} H^j$ est pur de poids j, pour tout j, et nul pour $j \neq m$) et on a la formule

$$\chi_c(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_{q^\nu}} \overline{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_{\psi_\nu}(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_{\chi_\nu}(g_\varphi)) = (-1)^m d.$$

En effet, cet énoncé résulte immédiatement de (2.3.1) appliqué à $\mathscr{F}_\psi(f_* \mathscr{L}_\chi(g)[m])$ et de (2.1.5) (i) (commutation de Fourier aux changements de base).

Remarque **(5.5.2).** — Une grande différence entre (5.5.1) d'une part et (5.2), (5.4) d'autre part, est qu'en (5.5.1), le polynôme F et le degré d dépendent *a priori* des choix de g, ψ, χ, ℓ; l'interprétation de d comme degré de la fonction L montre cependant que d ne dépend pas de ℓ et son interprétation comme caractéristique d'Euler-Poincaré de X_φ à coefficients dans $\mathscr{L}_{\psi_\nu}(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_{\chi_\nu}(g_\varphi)$ montre de plus que d ne dépend pas de g et χ (cf. [11] (5.5.2), cor. 2); d ne peut donc dépendre que du choix de ψ (pour R, X et f fixés bien entendu). Est-ce que d dépend vraiment de ψ? On n'en sait rien. Est-ce que, pour un ψ donné, on peut choisir un polynôme F_ψ qui « marche » pour tous les g, χ, ℓ? Existe-t-il un seul ψ pour lequel un tel F_ψ existe?

(5.6) *Remarques à propos des applications concrètes de* (5.2) *et* (5.2.1).

(5.6.1) Pour $f: X \to \mathbf{A}^r_R$ donné comme en (5.0), les démonstrations (4.3) et (5.4.2) fournissent une condition suffisante, que l'on peut expliciter, de pureté géométrique des sommes trigonométriques $S_n(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$, à savoir $(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$.

Par exemple, pour les sommes trigonométriques étudiées en [11] (5.1.1), on vérifie aisément que la condition $(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$ s'exprime, avec les notations de *loc. cit.*, de la manière suivante : le pinceau d'hypersurfaces de degré d de $\mathbf{P}$, engendré par H et L^d, induit sur $X \hookrightarrow \mathbf{P}$ un pinceau de Lefschetz. On peut constater d'autre part sur cet exemple que la condition $(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$ est en général plus restrictive que les critères de pureté que l'on peut dégager par une analyse précise des sommes trigonométriques considérées (toujours dans *loc. cit.*, le critère de pureté est simplement : H est transverse à $X \cap L$, autrement dit l'axe du pinceau engendré par H et L^d est transverse à X, ce qui n'est qu'une seule des conditions exigées pour que le pinceau induit sur X soit de Lefschetz).

(5.6.2) L'hypothèse que X est *fini* sur $\mathbf{A}^r_R$ est moins innocente qu'on peut le penser. Bien sûr, si l'on part d'un sous-schéma fermé $X \subset \mathbf{A}^r_R$, qui est lisse sur R, il y a beaucoup de façons de trouver des morphismes finis

$$f = (f_1, \ldots, f_r) : X \to \mathbf{A}^r_R.$$

La façon la plus simple est de restreindre à X des polynômes $f_1, \ldots, f_r$ qui définissent un endomorphisme fini de $\mathbf{A}^r_R$; par exemple, ceci est automatique si l'on a

$$\begin{cases} f_1 \in R[x_1], \ f_1 \text{ unitaire de degré } d_1 \geqslant 1 \\ \vdots \\ f_i \in R[x_1, \ldots, x_{i-1}][x_i], \ f_i \text{ unitaire en } x_i \text{ de degré } d_i \geqslant 1 \\ \vdots \end{cases}$$

Par contre, si l'on part du sous-schéma ouvert

$$X = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x, x^{-1}]) = \mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}} \subset \mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x]),$$

alors « on n'a pas le droit » de considérer X muni de la fonction $f = x$ et nos résultats (5.2), (5.4), ne disent donc rien sur les sommes de Gauss

$$\sum_{x \in \mathbf{F}_q^\times} \psi(x)\, \chi(x).$$

Nous allons combler en partie cette lacune dans le prochain chapitre.

(5.6.3) Considérons $X = \mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}}$, muni du morphisme $f : \mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}} \to \mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}}$ défini par un « vrai » polynôme de Laurent,

$$f(x) = \sum_{i=-d_1}^{d_2} a_i x^i$$

avec $d_1, d_2 \geqslant 1$ et $a_{d_2} = a_{-d_1} = 1$; alors f est un morphisme fini et nos résultats disent donc quelque chose sur les sommes correspondantes,

$$S_n = \sum_{x \in \mathbf{F}_{p^n}^\times} \psi_n(f(x))\, \chi_n(x) \quad (n \geqslant 1),$$

à savoir que la fonction L associée est, pour $p \gg 0$, un polynôme de degré $d_1 + d_2$, pur de poids 1.

Mais une analyse détaillée de ces sommes montre qu'en *toute* caractéristique p première à $d_1 d_2$, c'est en fait le cas : L(T) est un polynôme de degré $d_1 + d_2$, pur de poids 1.

Cet exemple illustre la limitation fondamentale de nos résultats : ce sont des résultats génériques en p, *i.e.* pour $p \gg 0$. Bien sûr, nos résultats sont aussi génériques en $(a_1, \ldots, a_r)$, mais alors que nos méthodes permettent de contrôler la restriction à $\mathbf{A}^r_{R \otimes \mathbf{Q}}$ de l'ouvert $\{F(y_1, \ldots, y_r) \neq 0\}$, elles ne permettent en rien de contrôler la restriction de ce même ouvert à $\mathbf{A}^r_{R \otimes \mathbf{F}_p}$ pour un nombre premier p *donné.*

(5.7) *La situation quand* X *n'est plus supposé lisse sur* R. — La variante suivante de (5.2) nous a été suggérée par Deligne :

Théorème **(5.7.0).** — *Soient* $R \subset \mathbf{C}$ *une sous-*$\mathbf{Z}$*-algèbre de* $\mathbf{C}$ *de type fini, r un entier* > 0, $\mathbf{A}^r_R$ *l'espace affine standard de coordonnées* $x_1, \ldots, x_r$ *sur* R, X *un* R*-schéma* affine, *de dimension relative* $\leqslant m$, *et*

$$f = (f_1, \ldots, f_r) : X \to \mathbf{A}^r_R$$

un R*-morphisme* fini. *Alors il existe un polynôme homogène non nul* $F(y_1, \ldots, y_r) \in R[y_1, \ldots, y_r]$ *et un entier* $C \geqslant 1$ *ayant la propriété suivante : pour toute fonction inversible g sur* X, *pour tout quintuple* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ *comme en* (5.0) *tel que*

$$(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0,$$

pour tout entier $n \geqslant 1$ *et pour toute valeur absolue archimédienne* $|\ |$ *sur* $\bar{\mathbf{Q}}$, *on a la majoration* (*avec les notations de* (5.1))

$$|S_n(g, \mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)| \leqslant C.q^{mn/2}.$$

Modulo l'interprétation cohomologique des sommes exponentielles et les résultats de Deligne sur les poids des H^j_c, le théorème (5.7.0) résulte aussitôt de la variante suivante de (5.4).

Théorème **(5.7.1).** — *Dans la situation de* (5.7.0), *il existe un polynôme homogène non nul* $F(y_1, \ldots, y_r) \in R[y_1, \ldots, y_r]$ *et un entier* $C \geqslant 1$ *tel que, pour toute fonction inversible g sur* X, *pour tout quintuple* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ *tel que*

$$(\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$$

et pour tout nombre premier ℓ *inversible dans* $\mathbf{F}_q$, *on ait :*

(i) *les groupes de cohomologie* ℓ*-adiques*

$$H^j_c = H^j_c(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^r a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_\chi(g_\varphi))$$

sont nuls pour $j > m$,

(ii) *l'inégalité*

$$\sum_j \dim_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}(H^j_c) \leqslant C.$$

Preuve de (5.7.1). — Tout comme dans la démonstration (5.4.2) de (5.4), on applique d'abord (3.1.2) au morphisme fini $f : X \to \mathbf{A}^r_R$ et à la stratification triviale de X; ceci nous fournit un entier $N_1 \geqslant 1$, une stratification $\mathscr{E}$ de $\mathbf{A}^r_R[1/N_1]$ et une constante $C_1 \geqslant 1$. Puis on applique (4.1) à $S = \mathrm{Spec}(R[1/N_1])$, $E = \mathbf{A}^r_S$ et à $\mathscr{E}$; ceci nous fournit un entier $N_2 \geqslant 1$, une stratification $\mathscr{E}^\vee$ de $\mathbf{A}^r_R[1/N_1 N_2]$ et une constante $C_2 \geqslant 1$. On prend alors un ouvert homogène $U^\vee$ de $\mathbf{A}^r_R$ contenant le point générique de $\mathbf{A}^r_R$ et contenu dans l'unique strate de $\mathscr{E}^\vee$ qui contient ce point générique (que

l'on puisse prendre un tel $U^\vee$ homogène se démontre comme en (4.2.3)), on prend pour $F(y_1, \ldots, y_r)$ un polynôme homogène non nul à coefficients dans R quelconque qui s'annule sur le complémentaire de $U^\vee$ dans $\mathbf{A}^r_R$ et on prend pour C le produit $C_1 C_2$.

Avec ces choix de F et C, l'estimation (ii) résulte immédiatement de (3.1.2) et (4.1). Il reste à prouver (i). Pour toute fonction inversible g sur X et pour tout $(\mathbf{F}_q, \varphi, \psi, \chi)$ tel que $(\varphi F)(y_1, \ldots, y_r) \neq 0$, les groupes de cohomologie, pour j fixé et $\mathbf{a}$ variable.

$$H^j_c(\mathbf{a}) = H^j_c(X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_q} \overline{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^r a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_\chi(g_\varphi)),$$

sont les fibres d'un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux lisse $\mathscr{H}^j_c$ sur $U^\vee_\varphi$ (cf. la démonstration (5.4.2) de (5.4)); il nous faut démontrer que $\mathscr{H}^j_c$ est *nul* sur $U^\vee_\varphi$ dès que $j > m$.

Or, par le « miracle » fondamental $\mathscr{F}_{\psi,!} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_{\psi,*}$ (cf. (2.1.3)) et le théorème de changement de base générique de Deligne (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$], [Th. Finitude] (1.9)), il existe un ouvert dense W de $U^\vee_\varphi$ tel que la flèche d'oubli des supports

$$H^j_c(\mathbf{a}) \to H^j(\mathbf{a})$$

est un isomorphisme pour tout $\mathbf{a} \in W$. De cela et du théorème de Lefschetz affine (cf. [SGA 4] XIV (3.2)), on déduit la nullité des $H^j_c(\mathbf{a})$ pour tous $j > m$ et $\mathbf{a} \in W$, *i.e.* la nullité des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux $\mathscr{H}^j_c \mid W$ pour tout $j > m$ ($X_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_q} \overline{\mathbf{F}}_q$ est un $\overline{\mathbf{F}}_q$-schéma affine de type fini de dimension $\leqslant m$). Comme les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux $\mathscr{H}^j_c$ sont lisses sur $U^\vee_\varphi$, qui est connexe, il s'ensuit que $\mathscr{H}^j_c = 0$ sur tout $U^\vee_\varphi$, pour tout $j > m$, ce qu'il fallait démontrer.

6. Sommes trigonométriques que l'on peut rendre pures par adjonction d'un caractère multiplicatif auxiliaire d'ordre assez grand

(6.0) Nous avons étudié au n° 5 des sommes trigonométriques où interviennent des caractères multiplicatifs, mais dont la pureté n'est en rien liée à la présence de ceux-ci. Dans ce numéro, nous allons au contraire étudier des sommes trigonométriques qui, *a priori*, ne sont pas (géométriquement) pures mais qui le deviennent après adjonction d'un caractère multiplicatif supplémentaire d'ordre assez grand; l'exemple type est celui des sommes de Gauss : les sommes

$$\sum_{x \in \mathbf{F}^\times_{q^n}} \psi_n(x) = -1,$$

où $\psi : \mathbf{F}_q \to \overline{\mathbf{Q}}^\times$ est un caractère additif non trivial, ne sont pas (géométriquement) pures, mais, si $\chi : \mathbf{F}^\times_q \to \overline{\mathbf{Q}}^\times$ est un caractère multiplicatif *non trivial* (*i.e.* d'ordre > 1), les sommes

$$\sum_{x \in \mathbf{F}^\times_{q^n}} \psi_n(x)\, \chi_n(x),$$

elles, sont (géométriquement) pures.

(6.1) Soient $R \subset \mathbf{C}$ une sous-algèbre de $\mathbf{C}$, de type fini sur $\mathbf{Z}$, r un entier $\geqslant 1$, $\mathbf{A}^r_R$ l'espace affine standard de coordonnées $x_1, \ldots, x_r$, X un R-schéma *affine, lisse,* purement de dimension relative m, et

$$(f; g) = (f_1, \ldots, f_r; g) : X \to \mathbf{A}^r_R \times_R \mathbf{G}_{m,R}$$

un morphisme *fini* (par exemple, $r = 1$, $X = \mathbf{G}_{m,R}$ de coordonnée t, $f = g = t$). Fixons d'autre part une clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$.

A tout quintuple $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ composé d'un corps fini $\mathbf{F}_q$, d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : R \to \mathbf{F}_q$ avec $\varphi(1) = 1$, d'un élément $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ de $(\mathbf{F}_q)^r$, d'un caractère additif *non trivial* $\psi : \mathbf{F}_q \to \bar{\mathbf{Q}}^\times$ et d'un caractère multiplicatif $\chi : \mathbf{F}_q^\times \to \bar{\mathbf{Q}}^\times$, nous attachons la famille des sommes trigonométriques $(S_n)_{n \geqslant 1}$ définies par

$$S_n = S_n(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi) = \sum_{x \in X_\varphi(\mathbf{F}_{q^n})} \psi_n\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}(x)\Big)\, \chi_n(g(x))$$

et la fonction L correspondante

$$L(T) = L(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi; T) = \exp\Big(\sum_{n \geqslant 1} \frac{T^n}{n} S_n\Big).$$

Théorème **(6.2).** — *Soient* $R, X, (f; g) : X \to \mathbf{A}^r_R \times_R \mathbf{G}_{m,R}$ *comme en* (6.1). *Alors il existe un polynôme non nul* $F(y_1, \ldots, y_r) \in R[y_1, \ldots, y_r]$ *et un ensemble fini* $\mathscr{S} \subset \mathbf{N}^*$ *d'entiers strictement positifs ayant la propriété suivante : pour tout quintuple* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$, *comme en* (6.1), *tel que*

$$\begin{cases} (\varphi F)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0 \\ \mathrm{ord}(\chi) \notin \mathscr{S} \end{cases}$$

où $\mathrm{ord}(\chi)$ *est l'ordre exact du caractère* χ, *on a :*

(I) *La fonction* $L(T) = L(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi; T)$ *est de la forme*

$$L(T) = P(T)^{(-1)^{m+1}},$$

où

$$P(T) = \prod_{\lambda=1}^{d} (1 - \alpha_\lambda T)$$

est un polynôme, avec $P(0) = 1$, *qui vérifie :*

(i) *les* α_λ *sont des entiers algébriques tels que*

$$|\alpha_\lambda| = q^{m/2}$$

pour tout $\lambda = 1, \ldots, d$ *et toute valeur absolue archimédienne* $|\ |$ *sur* $\bar{\mathbf{Q}}$,

(ii) *le degré d de* $P(T)$ *est donné par la formule topologique*

$$d = (-1)^m[\chi(X_{\mathbf{C}}) - \chi(H_{\mathbf{C}})]$$

où $X_{\mathbf{C}}$ *est la variété complexe* $X \otimes_R \mathbf{C}$ *et où* $H_{\mathbf{C}}$ *est l'hypersurface de* $X_{\mathbf{C}}$ *d'équation*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\mathbf{C}}(x) = b$$

pour n'importe quels $a_1, \ldots, a_r, b$ *dans* $\mathbf{C}$ *qui sont algébriquement indépendants sur* R,

(iii) *la fonction* $\bar{\mathrm{L}}(\mathrm{T})$ *associée à* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \bar{\psi}, \bar{\chi})$ *pour* $\bar{\psi} = \psi^{-1}$, $\bar{\chi} = \chi^{-1}$, *s'écrit*

$$\bar{\mathrm{L}}(\mathrm{T}) = [\prod_{\lambda=1}^{r} (1 - q^m \alpha_\lambda^{-1} \mathrm{T})]^{(-1)^{m+1}};$$

(II) *Pour tout entier* $n \geqslant 1$ *et toute valeur absolue archimédienne sur* $\bar{\mathbf{Q}}$, *on a la majoration*

$$|\mathrm{S}_n(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)| \leqslant (-1)^m[\chi(\mathrm{X}_0) - \chi(\mathrm{H}_0)]\, q^{nm/2}.$$

Les mêmes arguments qu'en (5.3) montrent que le théorème (6.2) résulte de l'énoncé cohomologique suivant :

Théorème **(6.3).** — *Soient* $\mathrm{R}, \mathrm{X}, (f; g) : \mathrm{X} \to \mathbf{A}^r_{\mathrm{R}} \times_{\mathrm{R}} \mathbf{G}_{m,\mathrm{R}}$ *comme en* (6.1). *Alors, il existe un polynôme non nul* $\mathrm{F}(y_1, \ldots, y_r) \in \mathrm{R}[y_1, \ldots, y_r]$ *et un ensemble fini* $\mathscr{S} \subset \mathbf{N}^*$ *d'entiers strictement positifs ayant la propriété suivante : pour tout quintuple* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$, *comme en* (6.1), *tel que*

$$\begin{cases} (\varphi\mathrm{F})(a_1, \ldots, a_r) \neq 0 \\ \mathrm{ord}(\chi) \notin \mathscr{S} \end{cases}$$

et pour tout nombre premier ℓ *inversible dans* $\mathbf{F}_q$, *on a les assertions* (i), (ii), (iii) *et* (iv) *de* (5.4).

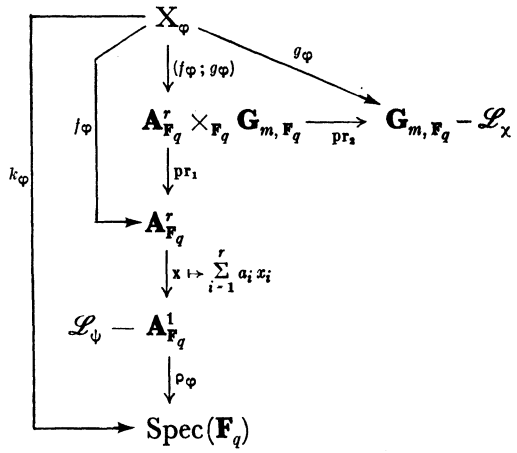
(6.4) *Les idées de la démonstration de* (6.3). — Fixons d'abord un quintuple $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ et un nombre premier ℓ inversible dans $\mathbf{F}_q$. Comment calculer les

$$\mathrm{H}^i_c = \mathrm{H}^i_c(\mathrm{X}_\varphi \otimes_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q, \mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_\chi(g_\varphi))$$

(les notations étant celles de (5.3))?

On considère le diagramme

(6.4.1)



où $k : \mathrm{X} \to \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ et $\rho : \mathbf{A}^1_{\mathrm{R}} \to \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ sont les morphismes structuraux et où $\mathscr{L}_\psi$ et $\mathscr{L}_\chi$ sont les $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de rang 1 définis en (2.0) et (5.3) respectivement.

Alors, la formule de projection et la définition de la transformation $\mathscr{F}_\psi$ (dans sa version $\mathscr{F}_{!,\psi}$, cf. (2.1.1)) montrent que

$$R k_{\varphi!}(\mathscr{L}_\psi(\sum_{i=1}^{r} a_i f_{i,\varphi}) \otimes \mathscr{L}_\chi(g_\varphi))[m+r]$$

est la fibre au point $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbf{A}^r_{\mathbf{F}_q}$ de

(6.4.2) $\qquad \mathscr{F}_\psi(\mathrm{Rpr}_{1!}(\mathrm{K}_{\ell,\varphi} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{L}_\chi))$

avec $\qquad \mathrm{K}_{\ell,\varphi} = (f_\varphi; g_\varphi)_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell[m].$

Le point important est alors que, mis à part le $\mathscr{L}_\psi$ qui intervient dans $\mathscr{F}_\psi$, toutes les autres données dans (6.4.2) « proviennent de la caractéristique nulle ». Précisons ceci. Pour tout entier $\nu \geqslant 1$, considérons le revêtement de Kummer de degré ν de $\mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}[1/\nu]}$, *i.e.* le $\mu_{\nu,\mathbf{Z}[1/\nu]}$-torseur

$$\begin{array}{c} \mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}[1/\nu]} \\ \Big\downarrow [\nu] : z \mapsto z^\nu \\ \mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}[1/\nu]} \end{array}$$

c'est un revêtement fini étale de degré ν qui, par le changement de base

$$\mathbf{Z}[1/\nu] \to \mathbf{Z}[1/\nu, \zeta_\nu] = \mathbf{Z}[1/\nu, T]/\Phi_\nu(T)$$

où $\Phi_\nu(T)$ est le ν-ième polynôme cyclotomique, devient un revêtement fini étale galoisien, de groupe de Galois

$$G_\nu = \mu_\nu(\mathbf{Z}[1/\nu, \zeta_\nu]),$$

cyclique d'ordre ν. Pour tout nombre premier ℓ, on a donc, sur $\mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}[1/\nu\ell,\zeta_\nu]}$, une décomposition

$$[\nu]_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell = \bigoplus_\chi \mathscr{K}_\chi$$

étendue aux ν caractères $\chi : G_\nu \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, où chaque $\mathscr{K}_\chi$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$], [Sommes trig.] (4.7)). Mais on voit immédiatement que, pour chaque diviseur ν_1 de ν, la somme

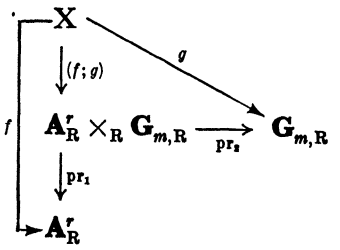
$$\bigoplus_{\substack{\chi \\ \mathrm{ord}(\chi) = \nu_1}} \mathscr{K}_\chi \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathscr{K}_{[\nu_1,\nu]}$$

se descend canoniquement en un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang $\varphi(\nu_1)$ (φ = indicateur d'Euler) sur $\mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}[1/\nu]}$, $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau encore noté $\mathscr{K}_{[\nu_1,\nu]}$, et on voit que, pour ν_1 fixe et ν un multiple variable de ν_1, on a l'identification canonique

$$\mathscr{K}_{[\nu_1,\nu]} = \mathscr{K}_{[\nu_1,\nu_1]} \mid \mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}[1/\nu]}.$$

Nous noterons simplement $\mathscr{K}_{[\nu_1]}$ le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang $\varphi(\nu_1)$ $\mathscr{K}_{[\nu_1,\nu_1]}$ sur $\mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}[1/\nu_1]}$.

Reprenons alors la moitié supérieure de notre diagramme (6.4.1), mais cette fois-ci au-dessus de R :



et posons, pour tout nombre premier ℓ,

$$K_\ell = (f; g)_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell[m]$$

c'est un objet de $D^b_c((\mathbf{A}^r_R \times_R \mathbf{G}_{m,R})[1/\ell], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui est pervers et pur, de poids m, relativement à $\mathrm{Spec}(R[1/\ell])$ (cf. (1.2.2) (v) et (1.3.2) (v) : X est lisse sur R purement de dimension relative m et $(f; g)$ est fini) ; de plus, à torsion à la Tate près, il est autodual (pour la dualité relative à $\mathrm{Spec}(R[1/\ell])$).

Par (3.1.2) appliqué à $(f; g) : X \to \mathbf{A}^r_R \times_R \mathbf{G}_{m,R}$ et à la stratification triviale $\mathscr{X} = \{X\}$ de X, il existe un entier N_1 et une stratification $\mathscr{A}$ de $(\mathbf{A}^r_R \times_R \mathbf{G}_{m,R})[1/N_1]$ à laquelle K_ℓ est adapté pour tout ℓ.

Par (3.3.3) appliqué à $\mathrm{pr}_1 : (\mathbf{A}^r_R \times_R \mathbf{G}_{m,R})[1/N_1] \to \mathbf{A}^r_R[1/N_1]$ et à la stratification $\mathscr{A}$, il existe un élément $b \in R - \{0\}$, une stratification $\mathscr{E}$ de $\mathbf{A}^r_R[1/N_1.b]$ et un entier $C \geqslant 1$ tels que

(1) $(\mathscr{A}, \mathscr{E}, C, \mathrm{pr}_{1!})$ soit une !-stratification universelle de pr_1;
(2) $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ soit une $*$-stratification de pr_1.

Grâce à l'énoncé (4.2) d'uniformité de la transformation de Fourier, notre théorème (6.3) est maintenant conséquence immédiate de l'énoncé suivant :

(6.4.3) *Il existe un ensemble fini* $\mathscr{S} \subset \mathbf{N}^*$ *tel que, pour tout entier* $\nu \notin \mathscr{S}$ *et pour tout nombre premier* ℓ, *l'objet*

$$R\mathrm{pr}_{1!}(K_\ell \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]})$$

de $D^b_c(\mathbf{A}^r_R[1/N_1\, b\ell^\nu], \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est pervers et pur, de poids* m, *relativement à* $\mathrm{Spec}(R[1/N_1\, b\ell^\nu])$.

Remarque. — Bien entendu, on utilise le fait que pour $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ et ℓ fixé, $R\mathrm{pr}_{1!}(K_{\ell,\varphi} \otimes \mathrm{pr}^* \mathscr{L}_\chi)$ est un facteur direct de $(R\mathrm{pr}_{1!}(K_\ell \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]}))_\varphi$, pour $\nu = \mathrm{ord}(\chi)$: cela résulte du théorème de changement de base propre (cf. [SGA 4] XII (5.1)) et de l'identification du torseur de Lang de $\mathbf{G}_{m,\mathbf{F}_q}$ avec le torseur de Kummer de degré $q - 1$ de $\mathbf{G}_{m,\mathbf{F}_q}$ (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$], [Sommes trig.] (4.9)).

Pour prouver (6.4.3), nous allons appliquer les critères (1.2.2) (v) et (1.3.2) (v) : l'objet $K_\ell \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]}$ étant pervers et pur, de poids m, relativement à $R[1/N_1\, b\ell^\nu]$, et autodual (à torsion à la Tate près), son $R\mathrm{pr}_{1!}$ est pervers et pur, de poids m, relativement à $R[1/N_1\, b\ell^\nu]$ si, après tout changement de base

$$T \to \mathrm{Spec}(R[1/N_1\, b\ell^\nu]),$$

avec T bon, la flèche d'oubli des supports

$$(*) \qquad \mathrm{Rpr}_{1!}(K_{\ell,T} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu],T}) \to \mathrm{Rpr}_{1*}(K_{\ell,T} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu],T})$$

est un isomorphisme.

Comme $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ est une $*$-stratification de pr_1, la formation de $\mathrm{Rpr}_{1*}(K_\ell \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]})$ est compatible aux changements de base $T \to \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$ ci-dessus; d'autre part, il en est de même de la formation de $\mathrm{Rpr}_{1!}(K_\ell \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]})$ d'après [SGA 4] XII (5.1). Par suite, pour montrer que $(*)$ est un isomorphisme pour tout T, il suffit de montrer que $(*)$ est un isomorphisme pour $T = \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$.

Comme $(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ est aussi une !-stratification de pr_1, la source et le but de $(*)$ pour $T = \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$ sont tous deux adaptés à la stratification $\mathscr{E}$; donc, pour vérifier que $(*)$ pour $T = \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$ est un isomorphisme, il suffit de le faire en chaque point maximal de chaque strate de $\mathscr{E}$. Mais quitte à rétrécir $R[1/N_1 b\ell\nu]$, *i.e.* à « agrandir » b, on peut supposer que chaque point maximal de chaque strate de $\mathscr{E}$ s'envoie sur le point générique de Spec(R); par suite, pour vérifier que $(*)$ est un isomorphisme pour $T = \mathrm{Spec}(R[1/N_1 b\ell\nu])$, il suffit de vérifier que $(*)$ pour $T = \mathrm{Spec}(\mathbf{C})$, $R[1/N_1 b\ell\nu] \hookrightarrow \mathbf{C}$, est un isomorphisme.

Enfin, la comparaison avec la cohomologie transcendante et le fait que nos données de départ (le faisceau constant $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ et les $\mathscr{K}_{[\nu]}$ sur $X \otimes_R \mathbf{C}$ et $\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}}$ respectivement) se déduisent par $(-) \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}} \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ à partir de systèmes locaux de $\overline{\mathbf{Q}}$-vectoriels sur $(X \otimes_R \mathbf{C})^{\mathrm{an}}$ et sur $(\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})^{\mathrm{an}}$ montrent que, pour un ν donné, le morphisme $(*)$ pour $T = \mathrm{Spec}(\mathbf{C})$ est un isomorphisme soit pour tout ℓ, soit pour aucun ℓ.

La discussion ci-dessus montre clairement que (6.4.3) (et par suite notre théorème (6.3)) est conséquence de l'énoncé suivant :

Théorème **(6.5).** — *Soient* Y *un* $\mathbf{C}$*-schéma de type fini,* ℓ *un nombre premier et* $\mathscr{F}$ *un* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau sur* $Y \times_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}}$. *Notons*

$$\begin{array}{ccc} Y \times_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

les projections et, pour tout $\nu \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{K}_{[\nu]}$ *le facteur direct du* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-faisceau lisse* $[\nu]_* \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ *sur* $\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}}$ *défini en* (6.4). *Alors, il existe un ensemble fini* $\mathscr{S} \subset \mathbf{N}^*$ *tel que, pour tout* $\nu \notin \mathscr{S}$, *la flèche d'oubli des supports*

$$\mathrm{Rpr}_{1!}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]}) \to \mathrm{Rpr}_{1*}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]})$$

soit un isomorphisme.

(6.5.1) *Preuve de* (6.5). — On a la compactification suivante de pr_1

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G}_{m,Y} & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathbf{P}^1_Y & \overset{i}{\hookleftarrow} & \{0,\infty\}\times Y \\ & \searrow^{\mathrm{pr}_1} & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{pr}}_1} & & \\ & & Y & & \end{array}$$

et, pour vérifier que la flèche d'oubli des supports de l'énoncé est un isomorphisme, il suffit de vérifier que

$$i^* \mathrm{R}j_*(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[v]}) = 0$$

dans $\mathrm{D}^b_c(\{0,\infty\}\times Y, \overline{\mathbf{Q}}_l)$ (on a $\mathrm{R}\mathrm{pr}_{1!} = \mathrm{R}\overline{\mathrm{pr}}_{1*} j_!$, $\mathrm{R}\mathrm{pr}_{1*} = \mathrm{R}\overline{\mathrm{pr}}_{1*}\mathrm{R}j_*$ et le triangle $j_! \to \mathrm{R}j_* \to i^*\mathrm{R}j_*$).

Considérons alors la « situation de cycles évanescents »

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G}_{m,Y} & \hookrightarrow & \mathbf{P}^1_Y & \hookleftarrow & \{0,\infty\}\times Y \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow \\ \mathbf{G}_{m,C} & \hookrightarrow & \mathbf{P}^1_C & \hookleftarrow & \{0,\infty\} \end{array}$$

et, pour $\alpha = 0, \infty$, le complexe des cycles évanescents (cf. [SGA 7] XIII (2.1) et [SGA $4\frac{1}{2}$], [Th. Finitude] (3.2))

$$\mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}_\alpha}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[v]}) \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_c(\{\alpha\}\times Y, \overline{\mathbf{Q}}_l)$$

muni de l'action du groupe d'inertie $\mathrm{I}_\alpha = \mathrm{Gal}(\overline{\eta}_\alpha/\eta_\alpha)$ du localisé strict $(\mathbf{P}^1_C)_{(\alpha)}$ de $\mathbf{P}^1_C$ en α (η_α est le point générique de ce localisé strict et $\overline{\eta}_\alpha$ un point géométrique au-dessus de η_α).

Si on note $i_\alpha : \{\alpha\}\times Y \hookrightarrow \mathbf{P}^1_Y$ l'inclusion, on a (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$], [Th. Finitude], (3.11))

$$i_\alpha^* \mathrm{R}j_*(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[v]}) = \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{I}_\alpha, \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}_\alpha}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[v]}));$$

or, d'après [SGA 7] I (0.3), on a

$$\mathrm{I}_\alpha \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \boldsymbol{\mu}_n(\overline{\eta}_\alpha) \xleftarrow{\sim} \varprojlim_n \boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{C}),$$

de sorte que I_α est (non canoniquement) isomorphe à $\hat{\mathbf{Z}}$. Par suite, si on choisit un générateur topologique T_α de I_α, l'isomorphisme ci-dessus dans $\mathrm{D}^b_c(\{\alpha\}\times Y, \overline{\mathbf{Q}}_l)$ se traduit plus concrètement par le triangle de $\mathrm{D}^b_c(\{\alpha\}\times Y, \overline{\mathbf{Q}}_l)$ suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}_\alpha}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[v]}) & \\ {\scriptstyle +1}\swarrow & & \nwarrow{\scriptstyle \mathrm{T}_\alpha - 1} \\ i_\alpha^* \mathrm{R}j_*(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[v]}) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Psi_{\overline{\eta}_\alpha}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[v]}) \end{array}$$

(c'est la version « catégorie dérivée » du calcul par Serre des $\mathrm{H}^i(\hat{\mathbf{Z}}, -)$, cf. [16] chap. I, p. 31).

Enfin, on a la formule de projection

$$(R\Psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]}), T_\alpha) = (R\Psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathscr{F}), T_\alpha) \otimes ((\mathscr{K}_{[\nu]})_{\bar{\eta}_\alpha}, T_\alpha),$$

où $(\mathscr{K}_{[\nu]})_{\bar{\eta}_\alpha}$ est un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie $\varphi(\nu)$ sur lequel T_α agit avec, pour valeurs propres, les racines primitives ν-ième de 1 dans $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$.

Maintenant, par « constructibilité » de $R\Psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathscr{F})$, il existe un polynôme unitaire $P_\alpha(T_\alpha) \in \bar{\mathbf{Q}}_\ell[T_\alpha]$ tel que

$$P_\alpha(T_\alpha) \mid R\Psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathscr{F}) = 0 \quad (\alpha = 0, \infty).$$

Soit alors $\mathscr{S} \subset \mathbf{N}^*$ l'ensemble (fini) des entiers $\nu \geqslant 1$ tels que P_0 ou P_∞ admette au moins un zéro qui soit une racine primitive ν-ième de 1 dans $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$; $\mathscr{S}$ fait marcher (6.5) : en effet, pour un $\nu \notin \mathscr{S}$, T_α, agissant sur une quelconque des fibres d'un des faisceaux de cohomologie de $R\Psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]})$, n'admet jamais la valeur propre 1, donc $T_\alpha - 1$ est un isomorphisme de $R\Psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathscr{F} \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{K}_{[\nu]})$, c.q.f.d.

Remarque **(6.5.2).** — Essentiellement la même démonstration montre le même théorème où l'on a remplacé $\mathbf{C}$ par un corps, disons algébriquement clos, de caractéristique $p \geqslant 0$ (avec bien entendu $\ell \neq p$) et où l'on ne considère que des ν premiers à p.

7. Lien avec la transformation de Fourier pour les $\mathscr{D}$-Modules et application (conjecturale) à la détermination d'un « gros » ouvert de pureté géométrique des sommes trigonométriques

(7.0) Commençons par des rappels sur les $\mathscr{D}$-Modules dans le cadre algébrique (cf. [2], [3] et [4]).

Dans tout ce numéro, k désignera un corps de caractéristique *zéro*, une variété X sera un k-schéma quasi projectif, lisse, purement de dimension d_X et un morphisme entre variétés sera un k-morphisme.

Pour X une variété, on note

$$\pi : T^* X = \mathbf{V}((\Omega^1_{X/k})^\vee) \to X$$

le fibré cotangent, muni de sa structure symplectique naturelle, et $(\mathscr{D}_X, \mathscr{D}_{X,i})$ l'Anneau des opérateurs différentiels sur X (relatifs à k), muni de la filtration par l'ordre des opérateurs; on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_X$-Algèbres

(7.0.1) $$\pi_* \mathscr{O}_{T^*X} = \mathrm{gr}\, \mathscr{D}_X.$$

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-Module (à gauche) cohérent, la variété caractéristique de $\mathscr{M}$ et le cycle caractéristique de $\mathscr{M}$ sont respectivement le fermé réduit

$$|\mathrm{Car}(\mathscr{M})| = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i \subset T^* X$$

et le cycle

$$\mathrm{Car}(\mathscr{M}) = \sum_{i \in I} m_i [\Lambda_i]$$

de $T^* X$ définis comme suit : on munit $\mathscr{M}$ d'une filtration croissante exhaustive $(\mathscr{M}_i)_{i\in\mathbf{N}}$ par des sous-$\mathscr{O}_X$-Modules quasi cohérents, faisant de $(\mathscr{M}, \mathscr{M}_i)$ un $(\mathscr{D}_X, \mathscr{D}_{X,i})$-Module filtré et telle que $\mathrm{gr}\,\mathscr{M}$ soit un $\mathrm{gr}\,\mathscr{D}_X$-Module cohérent (une telle filtration existe toujours) ; alors $\mathrm{gr}\,\mathscr{M}$ définit, *via* (7.0.1), un $\mathscr{O}_{T^*X}$-Module cohérent dont le support réduit

$$\bigcup_{i\in I} \Lambda_i \subset T^* X$$

et les longueurs m_i au point générique des composantes irréductibles Λ_i $(i \in I)$ de ce support ne dépendent que de $\mathscr{M}$ et non de la filtration $(\mathscr{M}_i)_{i\in\mathbf{N}}$ choisie.

Chaque composante Λ_i de $|\mathrm{Car}(\mathscr{M})|$ est conique et involutive (d'après Kashiwara, cf. S-K-K, *Lecture Notes, 287*, et Gabber, cf. *Amer. J. of Math., 103* (1981), 445-468) et, en particulier, on a l'inégalité de Bernstein :

$$\dim(\Lambda_i) \geqslant d_X \quad (\forall\, i \in I).$$

Un $\mathscr{D}_X$-Module (à gauche) $\mathscr{M}$ est dit *holonome* s'il est cohérent et s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

a) $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X) = 0$ pour tout $i < d_X$,
b) $\dim |\mathrm{Car}(\mathscr{M})| \leqslant d_X$.

En particulier, si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-Module holonome non nul, chaque composante Λ_i de $|\mathrm{Car}(\mathscr{M})|$ est conique et lagrangienne et coïncide donc avec $T^*_{Y_i} X$ où Y_i est le fermé réduit $\pi(\Lambda_i)$ de X (par abus de notation, on désigne encore par $T^*_{Y_i} X$ l'adhérence dans $T^* X$ du fibré conormal à la partie lisse de Y_i dans X).

Pour $k = \mathbf{C}$ et $\mathscr{M}$ holonome, on a une interprétation topologique de $\mathrm{Car}(\mathscr{M})$ essentiellement due à Kashiwara (cf. [7] II) : soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-Module holonome de cycle caractéristique

$$\mathrm{Car}(\mathscr{M}) = \sum_{i\in I} m_i [T^*_{Y_i} X];$$

notons $(-)^{an}$ le foncteur « passage à l'analytique », alors le complexe de de Rham

$$\mathrm{DR}(\mathscr{M}^{an}) = [\mathscr{M}^{an} \to \Omega^1_{X^{an}} \otimes_{\mathscr{O}_{X^{an}}} \mathscr{M}^{an} \to \cdots \to \Omega^{d_X}_{X^{an}} \otimes_{\mathscr{O}_{X^{an}}} \mathscr{M}^{an}]$$

(où $\mathscr{M}^{an}$ est placé en degré $-d_X$) est un objet pervers de la catégorie $D^b_c(X^{an}, \mathbf{C})$ des complexes bornés de faisceaux de $\mathbf{C}$-vectoriels sur X^{an} à cohomologie algébriquement constructible ; de plus, $\mathrm{DR}(\mathscr{M}^{an})$ est adapté à toute stratification de Whitney $\mathscr{X}^{an} = \{X^{an}_\alpha\}$ de X^{an} pour laquelle chaque Y^{an}_i $(i \in I)$ est réunion de strates X^{an}_α et la fonction $\chi(\mathrm{DR}(\mathscr{M}^{an}))$ est donnée par

$$\chi(\mathrm{DR}(\mathscr{M}^{an}))(x) = \sum_{i\in I} (-1)^{\dim Y_i} \mathrm{Eu}_{Y_i}(x) \cdot m_i$$

($\mathrm{Eu}_{Y_i}(x)$ désignant l'obstruction d'Euler de Y_i en x).

Nous noterons $D^b_{hol}(\mathscr{D}_X)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathscr{D}_X$-Modules (à gauche) quasi cohérents à cohomologie holonome. Les définitions et énoncés qui suivent sont empruntés à Bernstein et Kashiwara (cf. [3] pour plus de détails).

La catégorie $D^b_{hol}(\mathscr{D}_X)$ est munie de trois opérations internes, D, $\widetilde{\otimes}$, $\widetilde{\mathscr{H}om}$ définies par

$$D(M) = R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{D}_X) \otimes_{\mathscr{O}_X} \omega_X^{-1}[d_X]$$

$$M \widetilde{\otimes} N = (M \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{O}_X} N)[-d_X]$$

$$\widetilde{\mathscr{H}om}(M, N) = D(M) \widetilde{\otimes} N$$

pour tous $M, N \in \text{ob } D^b_{hol}(\mathscr{D}_X)$. En outre, pour tout morphisme de variétés $f: X \to Y$, on dispose des foncteurs

$$f_*, f_! : D^b_{hol}(\mathscr{D}_X) \to D^b_{hol}(\mathscr{D}_Y)$$

$$f^!, f^* : D^b_{hol}(\mathscr{D}_Y) \to D^b_{hol}(\mathscr{D}_X)$$

où $$f_* M = Rf_\bullet(\mathscr{D}_{Y \leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{D}_X} M),$$

$$f^! N = (\mathscr{D}_{X \to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^\bullet \mathscr{D}_Y} f^\bullet N)[d_X - d_Y]$$

et $$f_! = Df_* D, \quad f^* = Df^! D$$

avec $$\mathscr{D}_{Y \leftarrow X} = f^\bullet(\mathscr{D}_Y \otimes_{\mathscr{O}_Y} \omega_Y^{-1}) \otimes_{f^\bullet \mathscr{O}_Y} \omega_X$$

et $$\mathscr{D}_{X \to Y} = \mathscr{O}_X \otimes_{f^\bullet \mathscr{O}_Y} f^\bullet \mathscr{D}_Y.$$

Ces opérations et foncteurs satisfont le formalisme usuel, à cela près que $\widetilde{\otimes}$ et, donc $\widetilde{\mathscr{H}om}$, ne jouent pas les rôles des $\otimes$ et $\mathscr{H}om$ usuels : en fait $\widetilde{\otimes}$ joue le rôle de $D(D(-) \otimes D(-))$ (ce qui justifie le « tilda »); en particulier, on a la bidualité et pour tout carré cartésien de morphismes de variétés

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\alpha} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

on a les isomorphismes de changement de base

(7.0.2) $$\beta^! f_* = f'_* \alpha^!,$$

(7.0.3) $$\beta^* f_! = f'_! \alpha^*.$$

Nous dirons, suivant Bernstein (cf. [3]), qu'un $\mathscr{D}_X$-Module holonome $\mathscr{M}$ est à *singularités régulières* ou est RS s'il vérifie

— pour $d_X = 1$, la propriété suivante : il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que $\mathscr{M} \mid U$ soit un $\mathscr{O}_U$-Module localement libre de rang fini à connexion (intégrable) et que $\mathscr{M} \mid U$ soit à singularités régulières au sens classique en tout point de $\overline{U} - U$, $\overline{U}$ étant la complétion non singulière de U,

— pour $d_X > 1$, la propriété suivante : $i^*(\mathscr{M}[0])$ est à cohomologie RS pour toute courbe lisse localement fermée $i: Y \hookrightarrow X$ dans X.

Remarque (7.0.4). — La condition RS ci-dessus porte aussi bien sur les singularités de $\mathscr{M}$ à distance finie que sur celles « à l'infini de X ».

Nous noterons $D^b_{RS}(\mathscr{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b_{hol}(\mathscr{D}_X)$ formée des complexes à cohomologie RS; $D^b_{RS}(\mathscr{D}_X)$ est stable par les opérations D, $\widetilde{\otimes}$, $\widetilde{\mathscr{H}om}$ et f_*, $f_!$, $f^!$, f^* préservent $D^b_{RS} \subset D^b_{hol}$.

Pour $k = \mathbf{C}$, le foncteur $DR((-)^{an})$ induit une équivalence de catégories entre $D^b_{RS}(\mathscr{D}_X)$ et $D^b_c(X^{an}, \mathbf{C})$ et envoie un $\mathscr{D}_X$-Module holonome RS placé en degré o sur un objet pervers de $D^b_c(X^{an}, \mathbf{C})$. Cette équivalence de catégorie transforme les opérations D, $\widetilde{\otimes}$, $\widetilde{\mathscr{H}om}$ et les foncteurs f_*, $f_!$, $f^!$, f^* sur D^b_{RS} en les opérations et foncteurs du même nom sur D^b_c (avec, bien entendu, $(-)\,\widetilde{\otimes}\,(-) = D(D(-) \otimes D(-))$ sur D^b_c et idem pour $\widetilde{\mathscr{H}om}$, cf. [20]).

Exemple (7.0.5). — Soit $E = \mathbf{A}^r_k = \mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_r])$ avec $r \geqslant 1$, alors

$$\Gamma(E, \mathscr{D}_E) = k[x_1, \ldots, x_r, \partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_r]$$

(algèbre de polynômes non commutatifs); si $\mathscr{J}$ est un $\mathscr{D}_E$-Idéal (à gauche), $\mathscr{M} = \mathscr{D}_E/\mathscr{J}$ est un $\mathscr{D}_E$-Module (à gauche) cohérent que l'on peut filtrer par les

$$\mathscr{M}_i = \mathscr{D}_{E,i}/(\mathscr{J} \cap \mathscr{D}_{E,i}) \quad (i \in \mathbf{N}),$$

de sorte que $\mathrm{gr}\,\mathscr{J}$ est l'Annulateur de $\mathrm{gr}\,\mathscr{M}$; alors, si $P_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \ldots, P_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ sont des générateurs homogènes en les $\xi_1, \ldots, \xi_r$ (images de $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_r$ dans $\mathrm{gr}\,\Gamma(E, \mathscr{D}_E)$) de l'idéal gradué $\Gamma(E, \mathrm{gr}\,\mathscr{J})$, $|\mathrm{Car}(\mathscr{M})|$ est définie par l'annulation des polynômes $P_1, \ldots, P_s$ dans $T^*X = \mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_r, \xi_1, \ldots, \xi_r])$.

En particulier, soit $f \in k[x_1, \ldots, x_r]$ tel que $X = f^{-1}(0) \overset{i}{\hookrightarrow} E$ soit une hypersurface lisse et soit $\mathscr{J}$ l'Idéal (à gauche) de $\mathscr{D}_E$ engendré par f et les

$$f'_i \,.\, \partial/\partial x_j - f'_j \,.\, \partial/\partial x_i \quad (1 \leqslant i < j \leqslant r),$$

où f'_i est la dérivée partielle de f par rapport à x_i, alors $\mathscr{M} = \mathscr{D}_E/\mathscr{J}$ n'est autre que

$$\mathscr{M} = \mathscr{H}^1_X(\mathscr{O}_E) = i_*(\mathscr{O}_X[0]);$$

$\mathscr{M}$ est holonome RS, on a

$$\mathrm{Car}(\mathscr{M}) = [T^*_X E]$$

et, si $k = \mathbf{C}$, on a

$$DR(\mathscr{M}^{an}) = \mathbf{C}_{X^{an}}[d_X].$$

(7.1) La transformation de Fourier (dite aussi « de Laplace ») pour les équations différentielles est bien classique, cf. Ince ([19] (8.2), p. 187). Pour une présentation dans le langage des $\mathscr{D}$-Modules, cf. [2] (3.3), et [5] (7.16).

Fixons un corps k de caractéristique o et un entier $r \geqslant 1$; soient

$$\mathrm{E} = \mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_r])$$

l'espace vectoriel type de dimension r sur k et $\mathrm{E}^\vee = \mathrm{Spec}(k[y_1, \ldots, y_r])$ l'espace affine dual.

La *transformation de Fourier* pour les $\mathscr{D}$-Modules est l'équivalence de catégories, notée $\mathscr{F}$, entre la catégorie des $\mathscr{D}_{\mathrm{E}}$-Modules (à gauche) quasi cohérents et celle des $\mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}$-Modules (à gauche) quasi cohérents, définie comme suit : on a un isomorphisme de k-algèbres

$$\mathrm{F} : \Gamma(\mathrm{E}^\vee, \mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{E}, \mathscr{D}_{\mathrm{E}}) \tag{7.1.1}$$

défini par

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(y_i) &= \partial/\partial x_i \\ \mathrm{F}(\partial/\partial y_i) &= -x_i \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

et, si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{\mathrm{E}}$-Module quasi cohérent, $\mathscr{F}(\mathscr{M})$ est le $\mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}$-Module quasi cohérent caractérisé par

$$\Gamma(\mathrm{E}^\vee, \mathscr{F}(\mathscr{M})) = \mathrm{F}^*(\Gamma(\mathrm{E}, \mathscr{M}))$$

(le k-vectoriel $\Gamma(\mathrm{E}, \mathscr{M})$ « vu » comme $\Gamma(\mathrm{E}^\vee, \mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee})$-Module *via* F).

Si $\mathscr{F}^\vee$ est défini comme $\mathscr{F}$ mais en échangeant les rôles de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, E et $\mathrm{E}^\vee$, on a

$$\mathscr{F}^\vee \circ \mathscr{F} = (-1_{\mathrm{E}})^* \qquad \mathscr{F} \circ \mathscr{F}^\vee = (-1_{\mathrm{E}^\vee})^*.$$

D'autre part, il est clair sur la définition de $\mathscr{F}$ que $\mathscr{F}$ respecte la cohérence sur $\mathscr{D}$ et l'holonomie (cf. la définition homologique de l'holonomie). *Par contre, $\mathscr{F}$ ne respecte pas en général la condition* RS (pour $r = 1$, $\mathscr{D}_{\mathrm{E}}/\mathscr{D}_{\mathrm{E}}(x - 1)$ est holonome RS, mais $\mathscr{F}(\mathscr{D}_{\mathrm{E}}/\mathscr{D}_{\mathrm{E}}(x - 1)) = \mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}/\mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}(\partial/\partial y + 1)$ est holonome, irrégulier à l'infini).

Exemple **(7.1.2)** (cf. [5] (8.2)). — Soit $f \in k[x_1, \ldots, x_r]$ définissant dans E une hypersurface lisse $\mathrm{X} = f^{-1}(0)$, alors le $\mathscr{D}_{\mathrm{E}}$-Module $\mathscr{H}^1_{\mathrm{X}}(\mathscr{O}_{\mathrm{E}})$ (cf. (7.0.7)) admet pour transformé de Fourier

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}^1_{\mathrm{X}}(\mathscr{O}_{\mathrm{E}})) = \mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}/\mathscr{J}^\vee$$

où $\mathscr{J}^\vee$ est le $\mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}$-Idéal à gauche engendré par

$$f(\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_r)$$

et les

$$f'_j(\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_r).y_i - f'_i(\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_r).y_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant r).$$

$\mathscr{F}$ se dérive trivialement et induit une équivalence de catégories, notée encore $\mathscr{F}$, entre $\mathrm{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee})$.

Lemme **(7.1.3).** — *Fourier « commute » à la dualité; plus précisément, on a un isomorphisme canonique de foncteurs*

$$\mathrm{D} \circ \mathscr{F} \simeq (-\,1_{\mathrm{E}^\vee})^* \circ \mathscr{F} \circ \mathrm{D}$$

de $\mathrm{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_{\mathrm{E}})$ *vers* $\mathrm{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee})$.

En effet, on peut définir une transformation de Fourier $\mathscr{F}_d$ pour les $\mathscr{D}$-Modules à droite de manière analogue à $\mathscr{F}$ et de telle sorte que l'on ait trivialement

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}}(\mathscr{F}(\mathrm{M}), \mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee}) = \mathscr{F}_d(\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_{\mathrm{E}}}(\mathrm{M}, \mathscr{D}_{\mathrm{E}}))$$

pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_{\mathrm{E}})$; il reste alors à vérifier que pour tout $\mathscr{D}_{\mathrm{E}}$-Module à droite $\mathscr{N}$, on a canoniquement

$$\mathscr{F}_d(\mathscr{N}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}^\vee}} \omega_{\mathrm{E}^\vee}^{-1} \simeq (-\,1_{\mathrm{E}^\vee})^* \mathscr{F}(\mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}}} \omega_{\mathrm{E}}^{-1}),$$

ce que nous laissons au lecteur.

On trouvera en (7.5) une démonstration du lemme « bien connu » suivant :

Lemme **(7.1.4).** — *Notons* $\mathrm{pr} : \mathrm{E} \times_k \mathrm{E}^\vee \to \mathrm{E}$, $\mathrm{pr}^\vee : \mathrm{E} \times_k \mathrm{E}^\vee \to \mathrm{E}^\vee$ *les projections canoniques et* $\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{E} \times_k \mathrm{E}^\vee \to \mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$ *la flèche d'évaluation; soit* $\mathscr{L}$ *le* $\mathscr{D}_{\mathbf{A}^1_k}$*-Module défini par*

$$\Gamma(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{L}) = k[t]$$

et
$$(\partial/\partial t).\mathrm{P}(t) = \mathrm{P}'(t) - \mathrm{P}(t)$$

et soit
$$\mathrm{L} = \mathscr{L}[-1] \in \mathrm{ob}\, \mathrm{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_{\mathbf{A}^1_k}).$$

Alors, on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$\mathscr{F}(-) \simeq \mathrm{pr}^\vee_*(\mathrm{pr}^!(-) \mathbin{\widetilde{\otimes}} \langle\ \rangle^! \mathrm{L})[2 - r]$$

de $\mathrm{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_{\mathrm{E}})$ *dans* $\mathrm{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathscr{D}_{\mathrm{E}^\vee})$.

Remarque **(7.1.5).** — Ce lemme met en évidence une analogie entre la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ ci-dessus et les transformations de Fourier $\mathscr{F}_\psi$ définies au n° 2. Cette analogie est renforcée par les faits suivants :

(1) On a, pour $\mathscr{F}_\psi$, la formule

$$\mathscr{F}_\psi(-) = \mathrm{R}\mathrm{pr}^\vee_*(\mathrm{pr}^!(-) \mathbin{\widetilde{\otimes}} \langle\ \rangle^! \mathscr{L}_\psi)[2 - r](1 - r)$$

où $(-) \mathbin{\widetilde{\otimes}} (-) = \mathrm{D}(\mathrm{D}(-) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{D}(-))$ dans $\mathrm{D}^b_c(-, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(2) Pour $k = \mathbf{C}$, $\mathrm{DR}(\mathrm{L}^{\mathrm{an}})$ est lisse de rang 1 concentré en degré 0 (en fait égal au faisceau constant $\mathbf{C}$ sur $(\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}})^{\mathrm{an}}$),

(3) On a le dictionnaire ci-dessous entre propriétés de $\mathscr{L}$ et de $\mathscr{L}_\psi$

$\mathscr{L}$ libre de rang 1 sur $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^1_k}$	$\mathscr{L}_\psi$ lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_q}$
$\mathscr{L}$ a pour irrégularité 1 à l'infini	$\mathscr{L}_\psi$ a pour conducteur de Swan 1 à l'infini
$\Lambda(\mathscr{L}) = \mathscr{O}_{\mathbf{A}^1_k}$	$\Lambda(\mathscr{L}_\psi) = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$

où $\Lambda(-) = s^*(-) \otimes \mathrm{pr}_1^*(-)^{-1} \otimes \mathrm{pr}_2^*(-)^{-1}$, avec $\mathrm{pr}_i : \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ $(i = 1, 2)$ les deux projections canoniques et $s : \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ le morphisme somme.

Plus généralement, si S est une variété sur k (au sens de (7.0)) et si $E \xrightarrow{\pi} S$ est un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$ et de fibré dual $E^\vee \xrightarrow{\pi^\vee} S$, on a un isomorphisme

$$F : (\pi^\vee)^* \mathscr{D}_{E^\vee} \xrightarrow{\sim} \pi^* \mathscr{D}_E$$

généralisant (7.1.1) qui permet de définir une équivalence de catégories

$$\mathscr{F} : D^b_{hol}(\mathscr{D}_E) \to D^b_{hol}(\mathscr{D}_{E^\vee}),$$

encore appelée *transformation de Fourier*; les lemmes (7.1.3) et (7.1.4) s'étendent tels quels à cette situation relative.

(7.2) Soient X une variété (au sens de (7.0)) sur un corps k de caractéristique o et $\mathscr{X} = \{X_\alpha\}$ une stratification de X (cf. (3.0)), à strates lisses sur k; pour chaque α, on note $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ l'inclusion.

On dira qu'un objet M de $D^b_{hol}(\mathscr{D}_X)$ est *adapté à* $\mathscr{X}$ si, pour chaque α, tous les faisceaux de cohomologie de $i_\alpha^* M$ sont cohérents sur $\mathscr{O}_{X_\alpha} \subset \mathscr{D}_{X_\alpha}$ et, donc *a fortiori*, sont $\mathscr{O}_{X_\alpha}$-localement libres de rang fini.

On notera $\chi(M) : X \to \mathbf{Z}$ la fonction constructible définie par

$$\chi(M)(x) = \sum_j (-1)^j \dim_{k(x)} H^j(i_x^* M)$$

où $i_x : \{x\} \hookrightarrow X$ est l'inclusion et $k(x)$ le corps résiduel de x; on dira que M est χ-adapté à $\mathscr{X}$ si M et $\chi(M)$ sont adaptés à $\mathscr{X}$ (cf. (3.0)).

Remarque **(7.2.1)**. — En remplaçant les i_α^*, i_x^* par des $i_\alpha^!$, $i_x^!$, on obtient les notions !-adapté à $\mathscr{X}$, fonction $\chi^!$, et χ-!-adapté à $\mathscr{X}$; M est alors adapté (resp. χ-adapté) à $\mathscr{X}$ si et seulement si D(M) est !-adapté (resp. χ-!-adapté) à $\mathscr{X}$ et $\chi^!(D(M)) = \chi(M)$.

Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-Module holonome et $M = \mathscr{M}[0] \in \mathrm{ob}\, D^b_{hol}(\mathscr{D}_X)$. Si M est χ-adapté à une stratification $\mathscr{X}$ comme ci-dessus et si $X_\alpha \in \mathscr{X}$ est une strate ouverte dans X, $\mathscr{M} \mid X_\alpha$ est localement libre de rang fini constant m_α sur $\mathscr{O}_{X_\alpha}$ (m_α est la valeur de $\chi(M)$ sur X_α) et

$$\mathrm{Car}(\mathscr{M}) \mid \pi^{-1}(X_\alpha) = m_\alpha . [T^*_{X_\alpha} X_\alpha].$$

Réciproquement, si $U \subset X$ est un ouvert tel que

$$\mathrm{Car}(\mathscr{M}) \mid \pi^{-1}(U) = m . [T^*_U U]$$

pour un entier $m \geqslant 0$, $\mathscr{M} \mid U$ est $\mathscr{O}_U$-localement libre de rang constant m.

Remarque **(7.2.2)**. — Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-Module holonome RS, la donnée du cycle caractéristique $\mathrm{Car}(\mathscr{M})$ est essentiellement équivalente aux données de $\chi(\mathscr{M}[0])$ et d'une stratification $\mathscr{X}$ de X comme ci-dessus à laquelle $\mathscr{M}[0]$ est χ-adapté; de plus, pour $k = \mathbf{C}$, $\mathrm{DR}(\mathscr{M}^{an})$ est adapté (resp. χ-adapté) à $\mathscr{X}^{an}$ dès que $\mathscr{M}[0]$ est adapté (resp. χ-adapté) à $\mathscr{X}$ et $\chi(\mathrm{DR}(\mathscr{M}^{an})) = \chi(\mathscr{M}[0])$. Mais tout ceci tombe en défaut dès que $\mathscr{M}$ n'est plus RS.

(7.3) Soient S un schéma de type fini sur $\mathbf{Z}$, $E \xrightarrow{\pi} S$ un fibré vectoriel de rang constant $r \geqslant 1$ et $E^\vee \xrightarrow{\pi^\vee} S$ son fibré vectoriel dual.

Pour toute variété T sur un corps k de caractéristique 0 (comme en (7.0)) et pour tout morphisme $T \to S$, on dispose du foncteur transformation de Fourier

$$\mathscr{F}_T : D^b_{hol}(\mathscr{D}_{E_T}) \to D^b_{hol}(\mathscr{D}_{E_T^\vee}).$$

Alors, le théorème (4.1) et son corollaire (4.2) admettent les prolongements suivants :

Théorème **(7.3.1)**. — *Soit, de plus,* $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}$ *une stratification de* E *à strates* E_α *lisses sur* S. *Alors, il existe un entier* $N \geqslant 1$, *une stratification* $\mathscr{E}^\vee = \{E^\vee_\beta\}$ *de* $E^\vee[1/N]$, *à strates* $E^\vee_\beta$ *non vides, lisses sur* $S[1/N]$ *et plates sur* $\mathbf{Z}$ *et une application additive*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fonctions constructibles}\\ E[1/N] \to \mathbf{Z} \text{ adaptées}\\ \text{à } \mathscr{E}[1/N]\end{array}\right\} \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^\vee} \left\{\begin{array}{c}\text{fonctions constructibles}\\ E^\vee[1/N] \to \mathbf{Z} \text{ adaptées}\\ \text{à } \mathscr{E}^\vee[1/N]\end{array}\right\}$$

ayant les propriétés suivantes :

a) *il existe un entier* $C \geqslant 1$ *tel que* N, $\mathscr{E}^\vee$, C *et* $\varphi \mapsto \varphi^\vee$ *fassent marcher* (4.1);

b) *pour toute variété* T (*comme en* (7.0)) *sur un corps k de caractéristique* 0, *pour tout morphisme* $T \to S$ *et pour tout objet* M *de* $D^b_{RS}(\mathscr{D}_{E_T})$ *adapté à* $\mathscr{E}_T$, *le transformé de Fourier*

$$\mathscr{F}_T(M) \in \text{ob } D^b_{hol}(\mathscr{D}_{E_T^\vee})$$

est adapté à $\mathscr{E}^\vee_T$ *et si, de plus,* M *est* χ*-adapté à* $\mathscr{E}_T$, $\mathscr{F}_T(M)$ *est aussi* χ*-adapté à* $\mathscr{E}^\vee_T$ *et on a*

$$\chi(\mathscr{F}_T(M)) = (\chi(M))^\vee.$$

Corollaire **(7.3.2)**. — *On suppose de plus* S *intègre, avec point générique de caractéristique zéro, et soit encore* $\mathscr{E} = \{E_\alpha\}$ *une stratification de* E *à strates* E_α *lisses sur* S. *Alors, il existe un ouvert dense* $U^\vee \subset E^\vee$ *de* $E^\vee$ *satisfaisant aux conditions suivantes* :

a) $U^\vee$ *fait marcher* (4.2);

b) *pour toute variété* T (*comme en* (7.0)) *sur un corps k de caractéristique* 0, *pour tout morphisme* $T \to S$ *avec* $U^\vee_T \neq \varnothing$ *et pour tout* $\mathscr{D}_{E_T}$*-Module holonome* RS $\mathscr{M}$, *avec* $\mathscr{M}[0]$ *adapté à* $\mathscr{E}_T$,

$$\mathscr{F}_T(\mathscr{M}) \mid U^\vee_T \quad \text{et} \quad (-1_{E_T^\vee})^* \mathscr{F}_T(\mathscr{M}^*) \mid U^\vee_T,$$

où $\mathscr{M}^* = \mathscr{H}^0(D(\mathscr{M}[0]))$, *sont des* $\mathscr{O}_{U^\vee_T}$*-Modules localement libres de rang fini à connexions intégrables en dualité parfaite; de plus, si* $\mathscr{M}[0]$ *est* χ*-adapté à* $\mathscr{E}_T$, *le rang commun de ces deux* $\mathscr{O}_{U^\vee_T}$*-Modules est constant sur* $U^\vee_T$.

Remarques **(7.3.3.1)**. — Nous n'avons pas eu le courage de développer une théorie de dualité relative (cf. 1) pour les $\mathscr{D}$-Modules; dans (7.3.2 b), on utilise la dualité absolue, mais cela revient au même car on suppose T et donc E_T lisses sur k.

(7.3.3.2) L'hypothèse essentielle est l'hypothèse RS; elle correspond à la modération dans le cadre ℓ-adique.

(7.3.3.3) On aimerait pouvoir formuler et démontrer un énoncé analogue à (4.2) (iii) pour les $\mathscr{D}$-Modules, la pureté étant comprise au sens de la théorie de Hodge.

(7.3.4) *Preuve de* (7.3.1) *et* (7.3.2). — Compte tenu du formalisme rappelé en (7.0), de (7.1.4), de (7.2.1) et du théorème de changement de base (7.0.2), par des arguments en tout point parallèles à ceux de (4.3), on ramène ces énoncés au lemme (4.3.2) et à son analogue suivant pour les $\mathscr{D}$-Modules :

Lemme **(7.3.4.1)**. — *Soit* T *une variété* (cf. (7.0)) *sur un corps k de caractéristique* o *et soit*

$$\mathscr{X} = \{\mathbf{A}^1_T - D, D_1, \ldots, D_n\}, \quad D = \coprod_{i=1}^{n} D_i,$$

une stratification de $\mathbf{A}^1_T$, *avec* $D_1, \ldots, D_n$ *des diviseurs dans* $\mathbf{A}^1_T$ *finis étales sur* T, *de rangs constants* $d_1, \ldots, d_n$. *Pour tout objet* M *de* $D^b_{RS}(\mathscr{D}_{\mathbf{A}^1_T})$ *!-adapté à* $\mathscr{X}$ (cf. (7.2.1)), *on a alors* :

(i) *l'objet* $\rho_{T*}(M \widetilde{\otimes} \alpha^!_T L)$ *de* $D^b_{hol}(\mathscr{D}_T)$, *où* $\rho_T : \mathbf{A}^1_T \to T$ *et* $\alpha_T : \mathbf{A}^1_T \to \mathbf{A}^1_k$ *sont les projections canoniques et où* $L = \mathscr{L}[-1]$ *est défini en* (7.1.4), *est à cohomologie* $\mathscr{O}_T$*-localement libre de rang fini*,

(ii) *si on suppose que* M *est* χ*-!-adapté à* $\mathscr{X}$ (cf. (7.2.1)), *alors la fonction* $\chi^!$ *de* $\rho_{T*}(M \widetilde{\otimes} \alpha^!_T L)$ *est constante sur* T *de valeur*

$$-da + \sum_{i=1}^{n} d_i a_i$$

où a (*resp.* a_i) *est la valeur constante de* $\chi^!(M)$ *sur* $\mathbf{A}^1_T - D$ (*resp.* D_i, $i = 1, \ldots, n$) *et où* $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ *est le degré constant de* D *sur* T.

(7.3.4.2) *Prouvons* (7.3.4.1). — Soit

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}^1_T & \xhookrightarrow{j_T} & \mathbf{P}^1_T & \xhookleftarrow{i_T} & \infty_T = \mathbf{P}^1_T - \mathbf{A}^1_T \\ & {\scriptstyle \rho_T}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \bar{\rho}_T} & \swarrow & \\ & & T & & \end{array}$$

la compactification naturelle de ρ_T, alors

$$\rho_{T*}(M \widetilde{\otimes} \alpha^!_T L) = \bar{\rho}_{T*}\, j_{T*}(M \widetilde{\otimes} \alpha^!_T L)$$

et il suffit de montrer, pour la partie (i), que la variété caractéristique de chaque faisceau de cohomologie de $j_{T*}(M \widetilde{\otimes} \alpha^!_T L) \in \mathrm{ob}\, D^b_{hol}(\mathscr{D}_{\mathbf{P}^1_T})$ est contenue dans

$$T^*_{\mathbf{P}^1_T} \mathbf{P}^1_T \cup T^*_{\infty_T} \mathbf{P}^1_T \cup \bigcup_{i=1}^{n} T^*_{D_i} \mathbf{P}^1_T \subset T^* \mathbf{P}^1_T$$

(en effet, cela implique, puisque $\bar{\rho}_T$ est propre, que la variété caractéristique de chaque faisceau de cohomologie de $\bar{\rho}_{T*} j_{T*}(M \tilde{\otimes} \alpha_T^* L)$ est contenue dans la section nulle du cotangent à T). Or, au-dessus de $\mathbf{A}^1_T \subset \mathbf{P}^1_T$, c'est clair puisque

$$|\mathrm{Car}(\mathscr{H}^j(M))| \subset T^*_{\mathbf{A}^1_T} \mathbf{A}^1_T \cup \bigcup_{i=1}^{n} T^*_{D_i} \mathbf{A}^1_T$$

pour tous $j \in \mathbf{Z}$ (M est RS et !-adapté à $\mathscr{X}$); d'autre part, localement pour la topologie étale le long de ∞_T, M est de la forme $\alpha_T^! N$ avec $N \in \mathrm{ob}\, D^b_{RS}(\mathscr{D}_{\mathbf{A}^1_k})$ et : si $j : \mathbf{A}^1_k \hookrightarrow \mathbf{P}^1_k$ est l'inclusion et $\bar{\alpha}_T : \mathbf{P}^1_T \to \mathbf{P}^1_k$ la projection canonique,

$$j_{T*}(\alpha_T^! N \tilde{\otimes} \alpha_T^! L) = \bar{\alpha}_T^! j_*(N \tilde{\otimes} L),$$

ce qui entraîne la conclusion.

Pour la partie (ii), la preuve est la même que celle de (4.3.2) (iii) à condition de remplacer la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič par la formule de l'indice de Deligne (cf. P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 163, Springer-Verlag, formule (6.21.1)).

Remarque. — La preuve de (7.3.4.1) (i) ci-dessus nous a été suggérée par Mebkhout.

(7.4) Comme nous l'avons déjà remarqué en (5.6.1), les démonstrations (4.3) et (5.4.2) fournissent des conditions suffisantes de pureté des sommes trigonométriques $S_n(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ définies en (5.0), conditions que l'on peut expliciter mais qui sont en général plus restrictives que les critères de pureté que l'on peut dégager par une analyse géométrique précise. On peut alors se demander s'il existe une « recette » générale fournissant les critères de pureté « optimals » des sommes $S_n(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$. Nous apportons ci-dessous une réponse conjecturale à cette question.

Reprenons les notations de (5.0). De plus, notons K le corps des fractions de R et $(-)_K$ le changement de base $(-) \otimes_R K$. Alors

$$f_{K*} \mathcal{O}_{X_K}$$

est un $\mathscr{D}_{\mathbf{A}^r_K}$-Module holonome RS (cf. (7.0); f_{K*} est l'image directe au sens des $\mathscr{D}$-Modules), et son transformé de Fourier (cf. (7.1))

$$\mathscr{F}(f_{K*} \mathcal{O}_{X_K})$$

est un $\mathscr{D}_{\mathbf{A}^r_K}$-Module holonome. Par suite, il existe un plus grand ouvert dense $U^\vee_K$ de $\mathbf{A}^r_K$ tel que

$$\mathrm{Car}(\mathscr{F}(f_{K*} \mathcal{O}_{X_K})) \mid \pi^{-1}(U^\vee_K) = d.[T^*_{U^\vee_K} U^\vee_K] \qquad (7.4.1)$$

où d est un entier $\geqslant 0$ et $\pi : T^* \mathbf{A}^r_K \to \mathbf{A}^r_K$ est le cotangent à $\mathbf{A}^r_K$; cet ouvert est homogène (cf. (4.2.3)). Soit

$$F_1, \ldots, F_s \in R[y_1, \ldots, y_r]$$

un système d'équations homogènes du fermé réduit $\mathbf{A}^r_K - U^\vee_K$ de $\mathbf{A}^r_K$.

Conjecture **(7.4.2).** — *Il existe* $\rho \in R - \{0\}$ *tel que pour tout quintuple* $(\mathbf{F}_q, \varphi, \mathbf{a}, \psi, \chi)$ *vérifiant*

$$\varphi(\rho F_i)(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$$

pour au moins un $i \in \{1, \ldots, s\}$, *toutes les conclusions de* (5.2) *sont satisfaites avec pour d l'entier défini par* (7.4.1).

Commentaires **(7.4.2.1).** — On trouvera dans [5] (8.7) une démonstration de l'égalité des entiers d définis en (5.2) et (7.4.1); une autre démonstration est fournie par (7.3.4.1) (ii).

(7.4.2.2) Dans le cas où X est une hypersurface lisse de $\mathbf{A}^r_R$ définie par une équation $f \in R[x_1, \ldots, x_r]$, les considérations développées en (7.0.5) et (7.1.2) permettent en principe une détermination explicite de l'ouvert U^V_K et donc d'un système de polynômes $F_1, \ldots, F_s$.

(7.4.2.3) Le critère conjectural de pureté (7.4.2) est meilleur que le critère que l'on peut expliciter à partir des démonstrations (4.3) et (5.4.2) (cf. (5.6.1)) et coïncide pour $\rho \in R - \{0\}$ assez divisible avec les critères de pureté que l'on peut dégager d'analyses géométriques précises (cf. [5] (8.7), [11] et [14]); cependant, notre conjecture ne dit rien sur le $\rho \in R - \{0\}$ (mis à part son existence!).

Appendice **(7.5)** : *preuve de* (7.1.4).

On donnera la démonstration pour $r = 1$ (c'est le cas essentiel) et pour simplifier les notations on posera $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$.

Les foncteurs f_*, $f^!$ et $\widetilde{\otimes}$ s'étendent naturellement à $D^b_{q\,coh} \supset D^b_{hol}$, tout comme $\mathscr{F}$, et on montrera en fait (7.1.4) pour les $\mathscr{D}$-Modules quasi cohérents. Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_E$-Module quasi cohérent et $M = \Gamma(E, \mathscr{M})$. On a alors

$$\Gamma(E \times_k E^V, \mathrm{pr}^! \mathscr{M}[-1]) = M \otimes_k k[y]$$

en tant que $k[x, y]$-module et

$$\partial_x.(m \otimes P(y)) = (\partial_x.m) \otimes P(y)$$
$$\partial_y.(m \otimes P(y)) = m \otimes P'(y);$$

on a de même

$$\Gamma(E \times_k E^V, \langle\ ,\ \rangle^! L) = k[x, y]$$

en tant que $k[x, y]$-module et

$$\partial_x.P(x, y) = P'_x(x, y) - yP(x, y)$$
$$\partial_y.P(x, y) = P'_y(x, y) - xP(x, y).$$

Par suite,

$$\Gamma(\mathrm{E}\times_k \mathrm{E}^\vee, \mathrm{pr}^!\mathscr{M}\widetilde{\otimes}\langle\ ,\ \rangle^!\mathrm{L}[1]) = \mathrm{M}\otimes_k k[y]$$

en tant que $k[x,y]$-module et

$$\partial_x.(m\otimes \mathrm{P}(y)) = (\partial_x.m)\otimes \mathrm{P}(y) - m\otimes(y\mathrm{P}(y))$$
$$\partial_y.(m\otimes \mathrm{P}(y)) = m\otimes \mathrm{P}'(y) - (x.m)\otimes \mathrm{P}(y);$$

enfin, on obtient que

$$\Gamma(\mathrm{E}^\vee, \mathrm{pr}_*^\vee(\mathrm{pr}^!\mathscr{M}\widetilde{\otimes}\langle\ ,\ \rangle^!\mathrm{L})[1]) = [\mathrm{M}\otimes_k k[y]\xrightarrow{\partial_x}\mathrm{M}\otimes_k k[y]]$$

dans $\mathrm{D}^b(k[y,\partial_y])$ (complexe concentré en degré -1 et 0). Il ne reste plus qu'à remarquer que la suite de k-vectoriels

$$0\to \mathrm{M}\otimes_k k[y]\xrightarrow{\partial_x}\mathrm{M}\otimes_k k[y]\to \mathrm{M}\to 0$$
$$\sum_{i\geqslant 0} m_i y^i \mapsto \sum_{i\geqslant 0}\partial_x^i.m_i$$

est exacte et que la multiplication par y (resp. ∂_y) sur $[\mathrm{M}\otimes_k k[y]\xrightarrow{\partial_x}\mathrm{M}\otimes_k k[y]]$ induit la multiplication par ∂_x (resp. $-x$) sur M.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. A. Beilinson, I. N. Bernstein et P. Deligne, Faisceaux pervers, Conférence de Luminy, juillet 1981, Analyse et Topologie sur les expaces singuliers, I, *Astérisque* **100** (1982).

[2] I. N. Bernstein, Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients, *Funct. Anal.* **5** (1971), 1-16.

[3] I. N. Bernstein, Lectures on $\mathscr{D}$-Modules, Conférence de Luminy, juillet 1983, « Systèmes différentiels et singularités », preprint.

[4] J. E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North-Holland (1979).

[5] J. L. Brylinski, *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques*, prepint de l'Ecole polytechnique (1983).

[6] J. L. Brylinski, (Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki 1981-1982, n° 585, *Astérisque* **92-93** (1982), p. 129-157.

[7] J. L. Brylinski, A. S. Dubson et M. Kashiwara, Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale, *C.R.A.S.* **293** (30 novembre 1981), 573-576.

[8] P. Deligne, La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES* **52** (1980), 313-428.

[9] P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Notes in Math.* **163**, Springer Verlag (1970).

[10] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zéro, I et II, *Annals of Math.* **79** (1964), 109-326.

[11] N. M. Katz, Sommes exponentielles, Cours à Orsay, automne 1979, *Astérisque* **79** (1980).

[12] G. Laumon, Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après Deligne), dans Caractéristique d'Euler-Poincaré, Séminaire E.N.S. 1978-1979, *Astérisque* **82-83** (1981), 173-219.

[13] G. Laumon, Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ℓ-adique, *C.R.A.S.* **292** (19 janvier 1981), 209-212.

[14] G. Laumon, Majoration de sommes exponentielles attachées aux hypersurfaces diagonales, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, **16** (1983), 1-58.

[15] M. RAYNAUD, Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, *Séminaire Bourbaki 1964-1965*, exposé n° 286, W. A. Benjamin (1966).
[16] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne, *Lecture Notes in Math.* **5**, Springer Verlag (1964).
[17] J.-P. SERRE, Majoration de sommes exponentielles, Journées Arithmétiques de Caen, *Astérisque* **41-42** (1977), 111-126.
[18] T. EKEDAHL, On the adic formalism, to appear.
[19] E. L. INCE, *Ordinary Differential Equations*, Dover (1956).
[20] Z. MEBKHOUT, The Riemann-Hilbert problem in higher dimension, *Proc. Conf. Generalized Functions Appl. in Math. Phys.* (Moscow, Nov. 1980), Steklov Inst. 1981, 334-341.

Sigles

[SGA 1] Revêtements étales et groupe fondamental, *Lecture Notes in Math.* **224**, Springer Verlag (1971).
[SGA 4] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, *Lecture Notes in Math.* **269**, **270** et **305**, Springer-Verlag (1972-1973).
[SGA 4½] Cohomologie étale, *Lecture Notes in Math.* **569**, Springer Verlag (1977).
[SGA 7] Groupe de monodromie en géométrie algébrique, *Lecture Notes in Math.* **288** et **340**, Springer Verlag (1972-1973).

Pour une bibliographie plus complète sur les sommes trigonométriques, on pourra consulter celle de [11].

Princeton University
Department of Mathematics
Fine Hall
Princeton, New Jersey 08544
U.S.A.

Université Paris XI
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cédex
France

Manuscrit reçu le 16 novembre 1983.