PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

VALENTIN POÉNARU

Un théorème des fonctions implicites pour les espaces d'applications C^∞

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 38 (1970), p. 93-124

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1970__38__93_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES POUR LES ESPACES D'APPLICATIONS C^∞

par VALENTIN POÉNARU [1]
Faculté des Sciences d'Orsay

INTRODUCTION

Ce travail est un essai pour dégager un « vrai » théorème des fonctions implicites à partir des travaux de J. Mather sur la stabilité (structurelle) des applications C^∞ (voir [3], [4], [6]) et s'inspire d'une manière très essentielle de ses méthodes.

On rappelle que le théorème des fonctions implicites est faux, en général, pour les espaces de Fréchet (ou même les espaces nucléaires), en particulier pour les espaces d'applications infiniment différentiables d'une variété dans une autre.

On va considérer ici trois variétés C^∞ : X_1, X, Y (disons compactes, en une première étape, puisque dans le cas localement compact les choses s'énoncent d'une manière moins jolie), un sous-groupe $G \subset \mathrm{Diff}^\infty(X_1)$, un sous-ensemble $M \subset C^\infty(X, Y)$ et une application « différentiable » $\Phi : G \times M \to M$ ayant des propriétés qui généralisent légèrement celles d'une action de groupe. G et M ne sont *pas* localement des E.V.T., donc ce ne sont pas nécessairement des variétés infinies, mais ils satisfont seulement à quelques conditions très faibles qui sont toujours trivialement satisfaites pour les sous-variétés Fréchétiques des espaces d'application C^∞. Ces propriétés seront explicitées au chapitre suivant et définissent ce qu'on va appeler les *variétés faibles* (il faudrait dire « très faibles »). Φ est assujetti, en plus, à quelques conditions « algébriques », plus ou moins raisonnables, en termes de structures de modules sur les anneaux de fonctions C^∞. C'est le point de vue utilisé par Malgrange [1] et Mather [3], et qui nous semble pouvoir remplacer avantageusement, ici au moins, les E.V.T.

Notre résultat principal est que le théorème des fonctions implicites reste vrai pour les orbites de Φ. Au moins dans le cas compact, on se refuse à mettre des topologies sur $C^\infty(X, Y)$, mais on *définit* la « structure différentiable (faible) » par :

$$C^\infty(Z, C^\infty(X, Y)) = C^\infty(Z \times X, Y).$$

Ceci fait que notre « théorème des fonctions implicites » est formulé d'une manière un peu inhabituelle, mais telle que, si G et M sont des variétés Fréchétiques, on retombe sur la formulation ordinaire.

---

[1] Ce travail a été effectué pendant que l'auteur était invité par la Scuola Normale Superiore, à Pise.

Comme cas particuliers on a le théorème de stabilité de Mather ([3], [4], [6]) et des théorèmes analogues pour les sections C^∞ des fibrés, des applications paramétrées, « changements » de coordonnées plus généraux que $\mathrm{Diff}^\infty(X)\times\mathrm{Diff}^\infty(Y)$, etc.

Vu les conditions dans lesquelles on se place, notre théorème ne pourrait être déduit d'aucun résultat analogue, pour les « vraies » variétés de dimension infinie.

Dans un travail ultérieur on va donner, dans le même esprit, un théorème des fonctions implicites pour les espaces des germes d'applications C^∞. Ceci montre en particulier que pour les germes paramétrés d'applications C^∞, la stabilité infinitésimale entraîne la stabilité. On se propose aussi d'y montrer qu'un germe paramétré, stable :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbf{R}^m,0)\times(\mathbf{R}^p,0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbf{R}^n,0)\times(\mathbf{R}^p,0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbf{R}^n,0) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & (\mathbf{R}^p,0) & & \end{array}$$

est caractérisé par la $C^\infty_0(\mathbf{R}^p)$-algèbre :

$$C^\infty_0(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^p)/(\pi\varphi)^*(\mathfrak{m}C^\infty_0(\mathbf{R}^n))C^\infty_0(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^p)$$

(où $C^\infty_0(\ldots)$ = les germes de fonctions C^∞ sur ..., au point 0).

***

La notation $C^\infty(\ldots,\ldots)$ est utilisée dans ce travail dans un sens un peu abusif.

Si P, Z sont deux variétés Fréchetiques, avec $\dim P=\infty$, $\dim Z<\infty$, $C^\infty(P\times Z,\ldots)$ doit être lu comme $C^{0,\infty}(P\times Z,\ldots)$ (c'est-à-dire C^0 en P et C^∞ en Z) sauf dans les parties que je vais expliquer maintenant, où il peut être lu comme $C^{0,\infty}$, mais *aussi* comme C^∞, si l'on veut.

Il s'agit de la partie introductive du premier chapitre (jusqu'aux données fondamentales), du § 1 du chapitre II, *sans* le cas particulier 2, et aussi des §§ 2 et 3 du chapitre II.

Dans la démonstration du cas particulier 2 et du lemme 5 on utilise la division par une fonction *continue* r, « bien choisie » $r: Z\to\mathbf{R}$, avec $r^{-1}(0)=z_0$ et il n'y a pas moyen de choisir $r\in C^\infty$. Donc tout ce qui dépend de cela est $C^{0,\infty}$. (En fait, on pourrait adapter les arguments du chapitre III, pour prouver le corollaire 2 dans le cadre C^∞...)

Chapitre I

DÉFINITIONS ET ÉNONCÉS DES THÉORÈMES PRINCIPAUX EXEMPLES (cas compact)

On va considérer des variétés C^∞ Fréchétiques X, Y et par $C^\infty(X, Y)$ on désignera l'ensemble des applications de classe C^∞ de X dans Y. Si Z est une troisième variété Fréchétique, une application $Z \to C^\infty(X, Y)$ est *par définition* « différentiable » si l'application induite $Z \times X \to Y$ est de classe C^∞.

On pose donc, par définition :

$$C^\infty(Z, C^\infty(X, Y)) = C^\infty(Z \times X, Y)$$

l'identification entre les deux termes provenant de l'égalité naturelle « ensembliste » :

$$(Y^X)^Z = Y^{X \times Z}$$

où A^B = l'ensemble de *toutes* les applications de B dans A. Quelquefois, pour éviter les confusions, l'élément $f \in (Y^X)^Z$ sera désigné par $[f]$ quand on le considère dans $Y^{X \times Z}$, mais souvent cela compliquerait trop les notations et le même f sera un élément de $(Y^X)^Z$ et de $Y^{X \times Z}$, à la fois.

D'une manière analogue, si $k \geq 0$ est un entier, on définit :

$$C^k(Z, C^\infty(X, Y)) \subset C^k(Z \times X, Y), \quad \text{et ainsi de suite}$$

Si $P \subset C^\infty(X, Y)$, une application $f : Z \to P$ est dite différentiable si

$$Z \to P \subset C^\infty(X, Y)$$

est différentiable. Si $*$ est la variété constituée par un seul point, on peut identifier Z à $C^\infty(*, Z)$, en englobant ainsi le point de vue de la différentiabilité « ordinaire » dans le nôtre.

Soient $P_i \subset C^\infty(X_i, Y_i)$ $i = 1, \ldots, k$ et

$$\Phi : P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k \to C^\infty(X, Y).$$

Φ est dite « différentiable » si pour toute variété Fréchétique Z et $\varphi_i \in C^\infty(Z, P_i)$, l'application suivante est différentiable :

$$Z \xrightarrow{\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_k} P_1 \times \ldots \times P_k \xrightarrow{\Phi} C^\infty(X, Y).$$

En prenant $\psi_i \in C^\infty(Z_i, P_i)$, $Z = \prod_i Z_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\varphi_i : Z \xrightarrow{pr_i} Z_i \xrightarrow{\psi_i} P_i$, on en déduit que :

$$\prod_i Z_i \xrightarrow{\prod_i \psi_i} \prod_i P_i \xrightarrow{\Phi} C^\infty(X, Y)$$

est aussi différentiable.

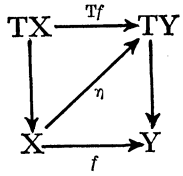
En particulier $\Phi \in C^\infty(C^\infty(X', Y'), C^\infty(X, Y))$ transforme les applications différentiables $Z \to C^\infty(X', Y')$ en applications différentiables $Z \to C^\infty(X, Y)$.

La composition d'applications différentiables est encore différentiable.

On va considérer les fibrés tangents TX, TY, et pour $f \in C^\infty(X, Y)$ le fibré induit :

$$f^*TY \to X$$

$\Gamma^\infty(f^*TY)$ va désigner l'ensemble des sections C^∞ de f^*TY, qu'on identifie avec le sous-ensemble de $C^\infty(X, TY)$ formé par les applications $\eta : X \to TY$ qui rendent commutatif le triangle inférieur du diagramme suivant :



$\Gamma^\infty(f^*TY)$ sera considéré avec sa structure naturelle de $C^\infty(X, \mathbf{R}) = C^\infty(X)$-module. ($\mathbf{R}$ désignera toujours la droite réelle.)

Si $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}, C^\infty(X, Y))$, $t_0 \in \mathbf{R}$ et $f(x) = [\varphi](t_0, x)$, on définit :

$$T_{t_0}\varphi \in \Gamma^\infty(f^*TY)$$

comme étant l'application :

$$x \mapsto \left.\frac{\partial[\varphi](t, x)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0} \in T_{f(x)}Y.$$

On va considérer une sous-$\mathbf{R}$-algèbre $S \subset C^\infty(X)$ et $\Gamma^\infty(f^*TY)$ comme S-module.

Définition. — Une partie $M \subset C^\infty(X, Y)$ est appelée S-*sous-variété* si elle satisfait aux axiomes suivants :

SV_0 : Tout $\varphi \in C^\infty([0, \infty), M)$ peut s'étendre à un $\Phi \in C^\infty((-\infty, +\infty), M)$.

SV_1 : Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}, M)$, $\xi \in C^\infty(\mathbf{R}, S) \subset C^\infty(\mathbf{R} \times X, \mathbf{R})$. On considère

$$\psi \in C^\infty(\mathbf{R}, C^\infty(X, Y))$$

définie par :

$$\psi(t, x) = \varphi(\xi(t, x), x).$$

Alors $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}, M)$.

SV_2 : Soit $f \in M$ et $\varphi_i \in C^\infty([0, 1], M)$, $(i = 1, \ldots, k)$ tels que $\varphi_i(0) = f$. Il existe $\Phi \in C^\infty(I^k, M)$ tel que $\Phi(0, \ldots, 0, t_i, 0 \ldots 0) = \varphi_i(t_i)$.

SV_3 : Si $f \in M$, Z est une variété Fréchétique, $\varphi \in C^\infty((Z, z_0), (M, f))$, $(z_0 \in Z)$ alors il existe un voisinage U de z_0 dans Z et une application

$$\Phi \in C^\infty(U, C^\infty(I, M)) \subset C^\infty(U \times \mathbf{R} \times X, Y)$$

telle que

(i) $\Phi(z_0, t, x)=f(x)$.

(ii) $\Phi(z, 0, x)=f(x)$, $\Phi(z, 1, x)=\varphi(z, x)$.

En fait (faute d'un théorème de préparation « relatif », qu'on sait énoncer, mais non prouver, pour le moment) les seuls cas qu'on va considérer ici seront $S=C^\infty(X)$ (et on dira qu'une $C^\infty(X)$-sous-variété est une *variété faible*) et $S=\mathbf{R}$ où $\mathbf{R}\subset C^\infty(X)$ représente les fonctions constantes.

Définition. — Soit $M\subset C^\infty(X, Y)$ une S-sous-variété, où $S\subset C^\infty(X)$ est une $\mathbf{R}$-sous-algèbre. On définit, pour $f\in M$, $T_fM\subset\Gamma^\infty(f^*TY)$ comme étant l'ensemble de tous les $T_0\varphi\in\Gamma^\infty(f^*TY)$ pour $\varphi\in C^\infty((\mathbf{R}, 0), (M, f))$.

D'après SV_0 et SV_1 ceci est la même chose que de considérer les $\varphi'\in C^\infty((I, 0), (M, f))$. T_fM est un sous-S-module de $\Gamma^\infty(f^*TY)$. En effet, si

$$\alpha=T_0\varphi_1, \qquad \beta=T_0\varphi_2 \quad (\varphi_i\in C^\infty((I, 0), (M, f))$$

sont deux « vecteurs » de T_fM, alors $\alpha+\beta\in\Gamma^\infty(f^*TY)$ est aussi dans T_fM, parce qu'on peut considérer un $\Phi\in C^\infty(I^2, M)$ (avec $\Phi(t, 0)=\varphi_1(t)$, $\Phi(0, t)=\varphi_2(t)$) et en désignant par ψ la restriction de Φ à la diagonale de I^2 on a : $T_fM\ni T_0\psi=\alpha+\beta$. De même, si $\gamma\in T_fM$, $\gamma=T_0\varphi$, $\varphi\in C^\infty((\mathbf{R}, 0), (M, f))$, et $g\in S$, alors :

$$g.\gamma=T_0(tg(x), x)\in T_fM.$$

A partir de maintenant, X et Y seront, sauf mention explicite du contraire, *compactes.*

On a alors :

Lemme 0. — a) $C^\infty(X, Y)$ *pour* X *et* Y *quelconques (pas nécessairement compacts) est une sous-variété faible (de* $C^\infty(X, Y)$*).*

Si X *et* Y *sont compacts et* $f\in C^\infty(X, Y)$, *alors* :

$$T_fC^\infty(X, Y)=\Gamma^\infty(f^*TY).$$

b) $\mathrm{Diff}^\infty(X)\subset C^\infty(X, X)$ *est une* $\mathbf{R}$*-sous-variété et* :

$$T_{id(X)}\mathrm{Diff}^\infty(X)=\Gamma^\infty(TX)=T_{id(x)}C^\infty(X, X).$$

(Donc $T_{id(X)}\mathrm{Diff}^\infty(X)$ *est néanmoins un* $C^\infty(X)$*-module.)*

Les démonstrations sont triviales (pour *a)* on considère des petits arcs de géodésiques sur Y, qui définissent à partir de f une famille à un paramètre, etc.).

Dans le cas général $T_fC^\infty(X, Y)$ est plus petit que $\Gamma^\infty(f^*TY)$. Ce dernier sera désigné par $\hat{T}_f(C^\infty(X, Y))$ (l'espace tangent « formel »). Si $M\subset C^\infty(X, Y)$ est une S-sous-variété on définit, pour $f\in M$ le sous-module $\hat{T}_fM\subset\hat{T}_fC^\infty(X, Y)=\Gamma^\infty(f^*TY)\supset T_fM$ de la manière suivante : on considère des paires arbitraires (K, x) où $K\subset X$ est un compact et $x\in K$, ainsi que l'application :

$$\Gamma^\infty(f^*TY)\xrightarrow{g(K, x)}\Gamma^\infty_x(f^*TY|K)$$

qui à $\varphi \in \Gamma^\infty(f^*TY)$ attache le germe au point $x \in K$ de la *restriction* $\varphi \mid K$. On désigne par

$$(T_f M \mid K)_x = g(K, x)(T_f M) \subset \Gamma^\infty_x(f^*TY \mid K).$$

Par définition :

$$\hat{T}_f M = \bigcap_{(K,x)} g(K, x)^{-1}(T_f M \mid K)_x \supset T_f M$$

où (K, x) parcourt toutes les paires (K, x) possibles (K compact).

Si Y est localement compact, ce qui sera toujours le cas pour nous, les deux définitions de $\hat{T}_f C^\infty(X, Y)$, celle qu'on vient de donner, et celle donnée avant, coïncident. Le point essentiel est que, de toute façon, si X et Y sont compactes :

$$\hat{T}_f M = T_f M$$

pour toute $C^\infty(X)$-sous-variété $M \subset C^\infty(X, Y)$. Ceci s'établit par partition C^∞ de l'unité, vu que $T_f M$ est un sous-$C^\infty(X)$-module de $T_f C^\infty(X, Y)$. De même si Z est quelconque et si l'on considère la $C^\infty(Z \times X)$-sous-variété : $C^\infty(Z, M) \subset C^\infty(Z \times X, Y)$, $F \in C^\infty(Z, M)$ on a :

$$\hat{T}_F C^\infty(Z, M) = T_F C^\infty(Z, M).$$

On a une inclusion naturelle (« la complétion ») :

$$\hat{i} : T_f M \to \hat{T}_f M$$

définie pour $M \subset C^\infty(X', Y')$, S-sous-variété, X', Y' étant quelconques. C'est un monomorphisme de S-modules (où $S \subset C^\infty(X')$ est une sous-**R**-algèbre). Si X', Y', X'', Y'' sont des variétés quelconques, $M \subset C^\infty(X', Y')$, $N \subset C^\infty(X'', Y'')$ des **R**-sous-variétés, $\Phi : M \to N$ une application différentiable, on peut définir pour chaque $f \in M$ un homomorphisme tangent :

$$T_f \Phi : T_f M \to T_{\Phi(f)} N$$

qui est une application **R**-linéaire. Il y a une façon (unique) pour passer aux complétés, ce qui nous définit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{T}_f M & \xrightarrow{\hat{T}_f \Phi} & \hat{T}_{\Phi(f)} N \\ \uparrow{\scriptstyle \hat{i}} & & \uparrow{\scriptstyle \hat{i}} \\ T_f M & \xrightarrow{T_f \Phi} & T_{\Phi(f)} N \end{array}$$

Comme on l'a vu, dans le cas compact il n'y a pas de différence entre T et $\hat{T}$; pour le théorème des fonctions implicites dans le cas localement compact, il faut utiliser $\hat{T}$, plutôt que T (parce qu'on peut lui imposer plus facilement des conditions de finitude).

Enfin, pour X, Y quelconques et $g \in C^\infty(X, Y)$ on va considérer l'homomorphisme canoniquement induit par g : $g^* : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$.

On énonce maintenant :

Les données fondamentales pour le théorème des fonctions implicites (dans le cas compact). — On se donne : $(X, Y, X_1, M, G, \Phi, a_i, b)$ (avec $i=1, 2$), où :

α) X et Y sont des variétés C^∞ et $M \subset C^\infty(X, Y)$ une $C^\infty(X)$-sous-variété (X, Y compactes).

β) X_1 est une variété C^∞ compacte et $G \subset \mathrm{Diff}^\infty(X_1)$ est un sous-groupe, tels que :

β-1 : $G \subset C^\infty(X_1, X_1)$ est une **R**-sous-variété.

β-2 : G est un *sous-ensemble complet* de $\mathrm{Diff}^\infty(X_1)$, dans le sens suivant :

Si $A \subset B \subset C^\infty(X', Y')$, avec X', Y' variétés C^∞ quelconques, on dit que A est un sous-ensemble complet de B si pour tout chemin *continu* : $\varphi \in C^0(I, B)$ tel que $\varphi(t) \in A$, si $t>0$, on ait : $\varphi(0) \in A$.

En général, un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty(X_1)$ avec les propriétés β-1, β-2 sera appelé « *sous-groupe de Lie* ».

γ) Une application C^∞ :

$$\Phi : G \times M \to M$$

telle que :

γ-1 : Pour tout $f \in M$,

$$\Phi(\mathrm{id}(X_1), f) = f.$$

γ-2 : Soit $H \in C^\infty(I, G)$, $H(0) = \mathrm{id}(X_1)$ un chemin C^∞ tel que :

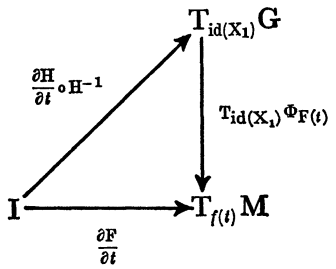
$$\frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1} : I \to T_{\mathrm{id}(X_1)}\mathrm{Diff}^\infty(X_1) = \Gamma^\infty(TX_1)$$

soit dans $C^\infty(I, T_{\mathrm{id}(X_1)}G)$ (en fait, on verra au chapitre suivant que c'est toujours le cas, parce que G est un « sous-groupe de Lie »). Pour chaque $f \in M$ on définit l'application C^∞ :

$$\Phi \mid G \times f = \Phi_f : G \to M$$

$(\Phi_f(\mathrm{id}(X_1)) = f)$, appelée *l'orbite de f* (par G).

On considère un chemin différentiable : $F \in C^\infty(I, M)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :



Alors, on a, pour chaque $t \in I$:

$$\Phi(H(t), F(0)) = F(t).$$

(La notation $\dfrac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1}$ doit être comprise dans le sens suivant : dire que $h \in C^\infty(I, T_{\mathrm{id}(X_1)}\mathrm{Diff}^\infty(X_1))$ est égal à $\dfrac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1}$ signifie que, pour chaque $x \in X_1$, et $t \in I$

on a : $\frac{\partial H}{\partial t}(H^{-1}(x, t), t) = h(x, t)$, ce qui, dans un langage plus habituel est : $\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = h(H(x, t), t)$.)

Remarque importante. — Si Φ est une action de groupe, c'est-à-dire si on a γ-1 et :

$$\gamma\text{-}3 : \Phi(H_1, \Phi(H_2, f)) = \Phi(H_1 \circ H_2, f)$$

quels que soient $H_1, H_2 \in G$, $f \in M$, alors γ-2 est satisfaite automatiquement. Ceci sera démontré au chapitre suivant. Dans un langage (trop) approximatif γ-2 veut dire que la restriction de Φ à chaque sous-groupe à un paramètre de G, est une action de groupe.

La condition suivante dit que l'une des deux possibilités qu'on va désigner par δ') (le *cas difficile*) ou δ'') (le *cas facile*) est réalisée. Ceci va nous donner donc, en fait, *deux* théorèmes des fonctions implicites (très similaires d'ailleurs) dans le même énoncé. On insiste donc que de δ') ou δ'') l'une soit réalisée (pas du tout « en même temps »).

δ') *Conditions de décomposition* (en $C^\infty(X)$ et $C^\infty(Y)$-modules) *pour* $T_{id(X_1)}G$. — On va supposer qu'il existe une décomposition de l'espace vectoriel $T_{id(X_1)}G$ (car la seule structure existant *a priori* sur $T_{id(X_1)}G$ est celle de sous-espace vectoriel de $\Gamma^\infty(TX_1)$) en *somme directe* de deux sous-espaces vectoriels A, B :

$$T_{id(X_1)}G = A \oplus B,$$

avec les propriétés suivantes :

δ-1 : Les projections canoniques $T_{id(X_1)}G \to A$ et $T_{id(X_1)}G \to B$ sont des applications C^∞ : $T_{id(X_1)}G \to C^\infty(X_1, TX_1)$. Ceci implique qu'on a une décomposition canonique en somme directe d'espaces vectoriels :

$$C^\infty(Z, T_{id(X_1)}G) = C^\infty(Z, A) \oplus C^\infty(Z, B),$$

pour toute variété Fréchétique Z.

On rappelle que T_fM a une structure canonique de $C^\infty(X)$-module, et par extension des scalaires, à partir de $f^* : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$, une structure « canonique » de $C^\infty(Y)$-module.

On va supposer qu'il existe deux applications *différentiables* :

$$a_1 : C^\infty(Y) \times A \to A$$
$$b : C^\infty(X) \times B \to B$$

qui définissent une structure de $C^\infty(Y)$-module sur A, une structure de $C^\infty(X)$-module sur B, et de plus, telles que

$$T_{id(X_1)}\Phi_f | A : A \to T_fM$$

soit $C^\infty(Y)$-linéaire, et

$$T_{id(X_1)}\Phi_f | B : B \to T_fM$$

soit $C^\infty(X)$-linéaire.

On énonce maintenant l'autre possibilité :

δ'') *Conditions de décomposition* (en $C^\infty(X)$ et $C^\infty(X)\otimes_{\mathbf{R}} C^\infty(Y)$-modules) *pour* $T_{\mathrm{id}(X_1)}G$. On suppose une décomposition en somme directe :

$$T_{\mathrm{id}(X_1)}G = A\oplus B$$

comme tout à l'heure, avec des conditions qu'on va définir.

On rappelle d'abord que si $f\in C^\infty(X, Y)$ on peut lui associer $\mathrm{graph}(f)\in C^\infty(X, X\times Y)$ défini par :

$$(\mathrm{graph}(f))(x) = (x, f(x)).$$

On remarque que l'application :

$$C^\infty(X, Y) \xrightarrow{\text{graph}} C^\infty(X, X\times Y)$$

est différentiable et que $\mathrm{graph}(f)$ induit un homomorphisme :

$$(\mathrm{graph}(f))^* : C^\infty(X\times Y) \to C^\infty(X)$$

donc une structure de $C^\infty(X\times Y)$-module sur T_fM. On remarque qu'il y a une inclusion canonique de la $\mathbf{R}$-algèbre produit tensoriel (sur $\mathbf{R}$) de $C^\infty(X)$ et $C^\infty(Y)$, dans $C^\infty(X\times Y)$:

$$C^\infty(X)\otimes_{\mathbf{R}} C^\infty(Y) \underset{i}{\hookrightarrow} C^\infty(X\times Y)$$

ce qui nous permet de définir :

$$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{graph}(f)^* \,|\, C^\infty(X)\otimes_{\mathbf{R}} C^\infty(Y) : \; C^\infty(X)\otimes_{\mathbf{R}} C^\infty(Y) \to C^\infty(X).$$

On a :

$$\mathrm{gr}(f)(\varphi(x)\otimes\psi(y)) = \varphi(x)\,.\,f^*\psi(y) \qquad \text{(produit dans } C^\infty(X)\text{)};$$

$\mathrm{gr}(f)$ définit une structure de $C^\infty(X)\otimes_{\mathbf{R}} C^\infty(Y)$-module sur T_fM. En notation symbolique :

$$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{id}(C^\infty(X))\otimes f^*.$$

On va supposer l'existence de deux applications différentiables :

$$a_2 : C^\infty(X)\times C^\infty(Y)\times A \to A$$
$$b : C^\infty(X)\times B \to B$$

qui définissent des structures de $C^\infty(X)\otimes_{\mathbf{R}} C^\infty(Y)$ et $C^\infty(X)$-modules sur A, B, telles que $T_{\mathrm{id}(X_1)}\Phi_f\,|\,A$, $T_{\mathrm{id}(X_1)}\Phi_f\,|\,B$ soient $C^\infty(X)\otimes_{\mathbf{R}} C^\infty(Y)$ et $C^\infty(X)$-linéaires.

ε) *Conditions de finitude.* — On rappelle qu'un S-module est dit *fini* s'il a un nombre fini de S-générateurs.

ε-1 : On considère une variété Fréchétique Z et $F\in C^\infty(Z, M)\subset C^\infty(Z\times X, Y)$. On remarque que (sans aucune hypothèse sur X, Y), $\hat{T}_F C^\infty(Z, M)$ et $T_F C^\infty(Z, M)$ sont des $C^\infty(Z\times X)$-sous-modules de $\Gamma^\infty([F]^*TY)$, où $[F] : Z\times X\to Y$ est l'application attachée à F.

On va supposer que $\hat{T}_F C^\infty(Z, M)$ est toujours un $C^\infty(Z\times X)$-module fini (donc,

puisqu'on est dans le cas où X, Y sont compacts, et $\hat{T}_F C^\infty(Z, M) = T_F C^\infty(Z, M)$, que ce dernier est $C^\infty(Z \times X)$-fini).

En particulier, on suppose que $\hat{T}_g M$ ($g \in M$) (donc $T_g M$, puisqu'on est dans le cas compact) est $C^\infty(X)$-fini.

Dans le « cas difficile » δ') et *seulement* dans ce cas, on a besoin d'une seconde condition de finitude, désignée par ε-2 :

ε-2 : Si Z est une variété Fréchétique, a_1 induit une structure de $C^\infty(Z \times Y)$-module sur $C^\infty(Z, A)$. Cette structure est définie comme suit :

Si $\psi \in C^\infty(Z \times Y)$ et $\varphi \in C^\infty(Z, A)$, on définit $\psi . \varphi \in C^\infty(Z, A)$ par

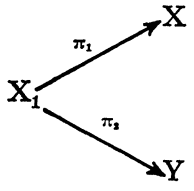
$$(\psi . \varphi)(z) = \psi(z)\varphi(z) = a_1(\psi(z), \varphi(z)).$$

On va supposer que $C^\infty(Z, A)$ est toujours $C^\infty(Z \times Y)$-fini, en particulier que A est $C^\infty(Y)$-fini.

Ceci termine la description des données fondamentales (X, Y, X_1, M, G, Φ, a_i, b) (avec $i = 1$ ou 2). Avant d'énoncer le théorème des fonctions implicites, qui utilise seulement ces données, on va décrire un cas un peu moins général, intermédiaire entre les données fondamentales et les applications décrites plus loin.

Les données spéciales (dans le cas compact). — On se donne (X, Y, X_1, M, G, L, π_2, π_1) qu'on décrit. X, Y, X_1, M, G sont comme avant, mais β) est remplacé par :

β_1) On donne des « projections » C^∞ :

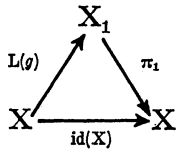


et une application de « relèvement » (graphe!) :

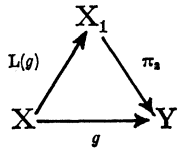
$$L \in C^\infty(M, C^\infty(X, X_1))$$

telle que :

β_1-1 : Si $g \in M$, les diagrammes suivants sont commutatifs :



et :



β_1-2 : Si $H \in G$, $g \in M$ l'application suivante est dans M :

$$X \xrightarrow{L(g)} X_1 \xrightarrow{H} X_1 \xrightarrow{\pi_2} Y.$$

Alors $\Phi(H, g) = \pi_2 \circ H \circ L(g)$ définit une application *différentiable* :

$$\Phi : G \times M \to M$$

telle que $\Phi(\mathrm{id}(X_1), g) = g$. On définit l'orbite Φ_g comme avant.

On remplace γ) par :

γ_1) *Condition de compatibilité.* — Pour tout $f \in M$, $H \in G$:

$$L(\Phi(H, f)) = H \circ L(f).$$

Ceci *implique* que Φ est une action de groupe puisque :

$$\Phi(H_1, \Phi(H_2, f)) = \pi_2 \circ H_1 \circ L(\Phi(H_2, f)) = \pi_2 \circ H_1 \circ H_2 \circ L(f) = \Phi(H_1 \circ H_2, f).$$

Enfin, on remplace δ') par :

δ'_1) *Conditions de décomposition spéciales* (cas difficile). — On commence par remarquer que π_1 et π_2 induisent par extension de scalaires à partir de $\pi_1^* : C^\infty(X) \to C^\infty(X_1)$ et $\pi_2^* : C^\infty(Y) \to C^\infty(X_1)$ des structures de $C^\infty(X)$ et $C^\infty(Y)$-module sur le $C^\infty(X_1)$-module $T_{id(X_1)}(\mathrm{Diff}^\infty(X_1)) = \Gamma^\infty(TX_1)$.

A priori $T_{id(X_1)}G \subset T_{id(X_1)}(\mathrm{Diff}^\infty(X_1))$ n'est rien de plus qu'un sous-espace vectoriel. On va *supposer* qu'il existe une décomposition directe (vectorielle) :

$$T_{id(X_1)}G = A \oplus B$$

telle que les projections sur A, B soient différentiables, comme avant, et que $A \subset T_{id(X_1)}\mathrm{Diff}^\infty(X_1)$ et $B \subset T_{id(X_1)}\mathrm{Diff}^\infty(X_1)$ soient respectivement des sous-$C^\infty(Y)$ et sous-$C^\infty(X)$-modules. Il en *résulte* alors (démonstration facile laissée au lecteur, qui va remarquer à cette occasion pourquoi on veut que $L(f)$ soit une section de la projection π_1) que, pour chaque $f \in M$:

$$T_{id(X_1)}\Phi_f \mid A : A \to T_f M$$

et :

$$T_{id(X_1)}\Phi_f \mid B : B \to T_f M$$

sont respectivement $C^\infty(Y)$-linéaires et $C^\infty(X)$-linéaires.

Comme pour les données fondamentales, au lieu de δ'_1 on peut avoir une autre possibilité :

δ''_1) *Conditions de décomposition spéciales* (cas facile). — On peut considérer :

$$\pi_1^* \otimes \pi_2^* : C^\infty(X) \otimes_R C^\infty(Y) \to C^\infty(X_1)$$

ce qui induit une structure de $C^\infty(X) \otimes_R C^\infty(Y)$-module sur $\Gamma^\infty(TX_1)$. On demande qu'il existe une décomposition en somme directe vectorielle :

$$T_{id(X_1)}G = A \oplus B$$

où A est un $C^\infty(X) \otimes_R C^\infty(Y)$-sous-module de $T_{id(X_1)}\mathrm{Diff}^\infty(X_1) = \Gamma^\infty(TX_1)$ et B un $C^\infty(X)$-sous-module. Il *résulte* alors que $T_{id(X_1)}\Phi_f$ est $C^\infty(X) \otimes_R C^\infty(Y)$-linéaire sur A et $C^\infty(X)$-linéaire sur B. (On considère ici la structure de $C^\infty(X) \otimes_R C^\infty(Y)$-module sur $T_f M$ induite par :

$$\mathrm{id}(X) \otimes f^* : C^\infty(X) \otimes_R C^\infty(Y) \to C^\infty(X)).$$

On demande enfin que les conditions de finitude de tout à l'heure restent satisfaites.

On peut formuler maintenant le théorème des fonctions implicites (dans le cas compact) :

Théorème 1. — *Soient* $(X, Y, X_1, M, G, \Phi, a_i, b)$ *(avec* $i=1, 2$*) comme dans les données fondamentales, en particulier* $M \subset C^\infty(X, Y)$, $G \subset \mathrm{Diff}^\infty(X_1)$ *et* $f \in M$

$$\Phi_f : G \to M.$$

(Z, z_0) *va désigner un* germe *de variété Fréchétique autour du point* $z_0 \in Z$.

Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

I. (f est « infinitésimalement stable »). — *L'application linéaire, tangente à* Φ *à l'origine* $(\mathrm{id}(X_1))$:

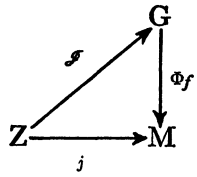
$$T_{\mathrm{id}(X_1)}G \xrightarrow{T_{\mathrm{id}(X_1)}\Phi_f} T_f M \longrightarrow 0$$

est surjective.

II. (f est « (structurellement) stable »). — *Si* $j : (Z, z_0) \to (M, f)$ *est un germe d'application* C^∞, *il existe un « relèvement », germe d'application* C^∞ :

$$\mathscr{J} : (Z, z_0) \to (G, \mathrm{id}(X_1))$$

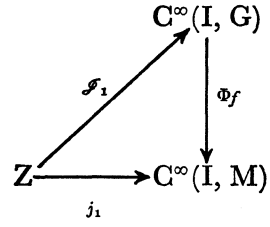
tel que le diagramme suivant soit commutatif :



III. (f est « homotopiquement stable »). — *Si* $j_1 : (Z, z_0) \to (C^\infty(I, M), I \to f \in M)$ (donc $j_1(z_0)$ = le chemin constant de valeur f) *est un germe d'application* C^∞, *tel que pour tout* $z \in Z$, $j_1(z)(0) = f$, *alors il existe un relèvement, germe d'application* C^∞ :

$$\mathscr{J}_1 : (Z, z_0) \to (C^\infty(I, G), I \to \mathrm{id}(X_1))$$

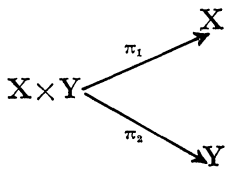
tel que pour tout $z \in Z$, $\mathscr{J}_1(z)(0) = \mathrm{id}(X_1)$ *et que le diagramme suivant soit commutatif* :



(où $\Phi_f : C^\infty(I, G) \to C^\infty(I, M)$, désigne, par abus de notation, l'application qui à $\eta \in C^\infty(I, G)$ associe $I \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\Phi_f} M$).

Remarques. — Les implications $II \Leftrightarrow III \Rightarrow I$ sont très faciles. Les chapitres suivants sont consacrés à la démonstration de $I \Rightarrow III$.

Exemples. — 1° On se place dans le cadre des données spéciales (cas facile). On prend $M = C^\infty(X, Y)$, $X_1 = X \times Y$, π_1 et π_2 les projections naturelles :



Pour $g \in C^\infty(X, Y)$, $L(g) = \text{graph}(g) \in C^\infty(X, X \times Y)$.

On considère un « sous-groupe de Lie » $G_1 \subset \text{Diff}^\infty(X)$ tel que $T_{id(X)}G_1 \subset TX$ soit un sous-$C^\infty(X)$-module (exemples : $G_1 = \{id(X)\}$ ou $G_1 = \text{Diff}^\infty(X)$).

On définit $G \subset \text{Diff}^\infty(X \times Y)$ comme étant le sous-ensemble des $H \in \text{Diff}^\infty(X \times Y)$ tels qu'il existe un $H_1 \in G_1$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle H} & & \downarrow{\scriptstyle H_1} \\ X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

On considère les sous-espaces vectoriels $A, B \subset T(X \times Y)$ définis comme suit :

$$A = \Gamma^\infty(\pi_2^* TY).$$

Pour définir B, on considère :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^* TX & \xrightarrow{T\pi_1 \mid \pi_1^* TX} & TX \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

On a une application linéaire :

$$(T\pi_1 \mid \pi_1^* TX)^* : \Gamma^\infty(TX) \to \Gamma^\infty(\pi_1^* TX)$$

et par définition :

$$B = \text{Image}(T\pi_1 \mid \pi_1^* TX)^* (T_{id(X)}G_1) \subset \Gamma^\infty(\pi_1^* TX).$$

Clairement, B est un $C^\infty(X)$-module, A un $C^\infty(X) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(Y)$-module, et :

$$T_{id(X \times Y)}G = A \oplus B \quad \text{(somme directe)}.$$

On va expliciter l'application tangente :

$$T_{id(X \times Y)}\Phi_f : T_{id(X \times Y)}G \to T_f C^\infty(X, Y).$$

On commence par remarquer que $(T\pi_1 \mid \pi_1^* TX)^*$ est un monomorphisme, donc, si $\xi \in B$, $((T\pi_1 \mid \pi_1^* TX)^*)^{-1}(\xi) \in T_{id(X)}G_1 \subset \Gamma^\infty(TX)$ est bien défini. Alors :

$$(T_{id(X \times Y)}\Phi_f \mid B)(\xi) = Tf \circ ((T\pi_1 \mid \pi_1^* TX)^*)^{-1} \circ \xi.$$

Si $\eta \in A$ on a un diagramme commutatif qui définit $(T_{id(X\times Y)}\Phi_f \mid A)(\eta) \in \Gamma^\infty(f^*TY)$ comme suit :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{graph}(f)"] \arrow[rrr, bend right, "(T_{id(X\times Y)}\Phi_f|A)(\eta)"'] & X\times Y \arrow[r, "\eta"] & \pi_1^*TY \arrow[r, "T\pi_1"] & TY \end{tikzcd}$$

Clairement, toutes les conditions des données spéciales (cas facile!) sont vérifiées. On laisse au lecteur le soin d'énoncer le résultat.

2° On va généraliser le cas $G_1 = \{id(X)\}$ de l'exemple précédent. On pourrait ici aussi appliquer le cas facile, mais on va procéder d'une autre manière. On considère une fibration $C^\infty : \pi : Y \to X$ et $C^\infty(X, Y) \supset M = \Gamma^\infty(\pi)$. On se place dans les conditions des données spéciales (cas difficile!) avec $Y = X_1$, $\pi_1 = \pi$, $\pi_2 = id(Y)$, $L(g) = g$ $(g \in \Gamma^\infty(\pi))$, $G \subset \mathrm{Diff}^\infty(Y)$ le sous-groupe des difféomorphismes H qui respectent la fibration, c'est-à-dire tels que :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "id(X)"] & Y \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "H"] \\ X & Y \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On a $T_{id(Y)}G = \mathrm{Ker}(TY \xrightarrow{T\pi} TX) \subset TY$ (l'espace tangent aux fibres!). $T_{id(Y)}G$ est un $C^\infty(Y)$-module fini, et par définition $T_{id(Y)}G = A$, $o = B$. Si $\eta \in T_{id(Y)}G$, on définit $T_{id(Y)}\Phi_f(\eta)$ par :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "T_{id(Y)}\Phi_f(\eta)"'] & Y \arrow[r, "\eta"] & \mathrm{Ker}\, T\pi \subset TY \end{tikzcd}$$

Toutes les conditions des données spéciales (cas difficile!) sont clairement vérifiées.

3° X', Y', P sont trois variétés compactes et $X = X' \times P$, $Y = Y' \times P$; $C^\infty(X, Y) \supset M$ est défini comme l'ensemble des applications f qui rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} X'\times P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y'\times P \arrow[dl] \\ & P & \end{tikzcd}$$

On remarque que M est difféomorphe à $C^\infty(X, Y')$, et que c'est une $C^\infty(X)$-sous-variété. On prend (en se plaçant dans le cadre des données spéciales, cas difficile) $X_1 = X' \times Y \times P$ avec :

$$\begin{tikzcd} & X'\times P = X \\ X'\times Y'\times P \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ & Y'\times P = Y \end{tikzcd}$$

On définit une inclusion

$$i : C^\infty(P, \mathrm{Diff}^\infty(X') \times \mathrm{Diff}(Y')) \to \mathrm{Diff}^\infty(X' \times Y' \times P)$$

de la manière suivante : si $\eta \in C^\infty(P, \mathrm{Diff}(X') \times \mathrm{Diff}(Y'))$ est définie par $x \to \eta'_p(x)$, $y \to \eta''_p(y)$, alors $i(\eta) \in \mathrm{Diff}^\infty(X' \times Y' \times P)$ est :

$$i(\eta)(x, y, p) = (\eta'_p(x), \eta''_p(y), p).$$

$G \subset \mathrm{Diff}^\infty(X' \times Y' \times P)$ sera l'image de i (G est difféomorphe à $C^\infty(P, \mathrm{Diff}^\infty(X') \times \mathrm{Diff}^\infty(Y'))$).

$$L \in C^\infty(M, C^\infty(X' \times P, X' \times Y' \times P))$$

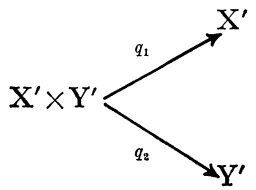
est définie comme suit. Si $f \in M$, $x \in X$, $p \in Y$,

$$L(f)(x, p) = (x, f(x, p), p).$$

On considère $X' \times Y' \times P \xrightarrow{\pi_3} X' \times Y'$ et $\pi_3^* T(X' \times Y') \subset T(X' \times Y' \times P)$. On remarque que :

$$\Gamma^\infty(T(X_1)) \supset \Gamma^\infty(\pi_3^*) = C^\infty(P, \Gamma^\infty(T(X' \times Y'))).$$

On considère enfin :

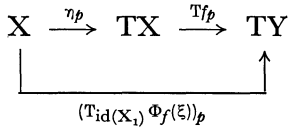


ce qui nous permet d'identifier $\Gamma^\infty(TX')$, $\Gamma^\infty(TY')$ avec des sous-espaces vectoriels de $\Gamma^\infty(T(X' \times Y'))$, donc $A = C^\infty(P, \Gamma^\infty(TY'))$, $B = C^\infty(P, \Gamma^\infty(TX'))$ avec des sous-espaces vectoriels de $\Gamma^\infty(\pi_3^*)$. Clairement :

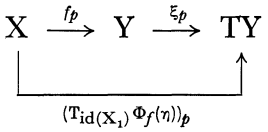
$$A \cap B = o \in \Gamma^\infty(TX_1)$$
$$A + B = T_{\mathrm{id}(X_1)}G.$$

A est un $C^\infty(Y)$-module fini, B un $C^\infty(X)$-module (fini) et toutes les conditions des données spéciales (cas difficile) sont vérifiées. On explicite ici seulement $T_{\mathrm{id}(X_1)}\Phi_f$, pour $\xi \in A$, $\eta \in B$ (on choisit la notation telle que $f(x, p) = (f_p(x), p)$). On remarque que $T_{\mathrm{id}(X_1)}\Phi_f \subset C^\infty(P, C^\infty(X, TY))$ est tel que $\varphi_p(x) \in T_{f_p(x)}Y$, où $\varphi \in T_{\mathrm{id}(X_1)}\Phi_f$.

Alors si $\xi \in C^\infty(P, TY)$, $\eta \in C^\infty(P, TX)$ on aura :



et :



Pour dim $P = 0$, on retrouve le théorème de stabilité de Mather, qui est à l'origine de notre travail.

On peut considérer aussi l'action des groupes $\mathrm{Diff}^\infty(X)$ ou $\mathrm{Diff}^\infty(Y)$ sur $C^\infty(X \times Y)$, ainsi que beaucoup d'autres variations sur les mêmes thèmes, qu'on ne va pas regarder ici en détail.

Dans le dernier chapitre on va indiquer comment on peut traiter de la même manière le cas localement compact, et dans un autre travail on va s'occuper du cas germifié.

Chapitre II

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

(Théorème 1)

1. Le théorème de préparation différentiable.

On va donner ici, pour le théorème de préparation différentiable, un énoncé un peu plus général que d'habitude, ayant l'avantage d'englober le théorème de préparation (différentiable) de Weierstrass-Malgrange-Mather ([1], [2], [4]) sous sa forme « habituelle », et en même temps un théorème de « contraction adéquate » de [3], dans une version où tout ce qui y est continu devient ici différentiable.

On commence par considérer deux germes de variété Fréchétiques (Z_1, z_1), (Z_2, z_2), deux variétés compactes X, Y et deux germes d'applications C^∞ :

$$(Z_1, z_1) \xrightarrow{g} (Z_2, z_2) \xrightarrow{F} C^\infty(X, Y).$$

Par définition :

$$C^\infty_{z_2}(Z_2 \times X, Y) = C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(X, Y)) = \varinjlim C^\infty(U, C^\infty(X, Y))$$

où U parcourt une base du filtre des voisinages de $z_2 \in Z_2$.

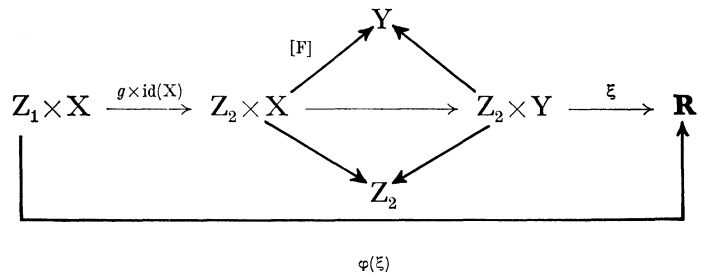
F définit un homomorphisme :

$$C^\infty_{z_2}(Z_2 \times X) \xleftarrow{F^*} C^\infty_{z_2}(Z_2 \times Y)$$

et (g, F) un homomorphisme :

$$C^\infty_{z_2}(Z_2 \times Y) \xrightarrow{\varphi} C^\infty_{z_1}(Z_1 \times X)$$

qui à $\xi \in C^\infty_{z_2}(Z_2, Y)$ associe



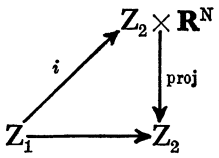
$\varphi(\xi)$

Par $\mathrm{ev}(z_i)$ on désigne l'homomorphisme « d'évaluation » de l'application $Z_i \to \ldots$ au point $z_i \in Z_i$.

On a un diagramme commutatif d'homomorphismes de $\mathbf{R}$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{z_1}(Z_1\times X) & \xleftarrow{\varphi} & C^\infty_{z_2}(Z_2\times Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle ev(z_1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle ev(z_2)} \\ C^\infty(X) & \xleftarrow{F(z_2)^*} & C^\infty(Y) \end{array}$$

Enfin on va supposer que g a la propriété suivante : il existe un $\mathbf{R}^N$ = espace euclidien de dimension $N<\infty$ et une factorisation :



où $i=Z_1\to Z_2\times\mathbf{R}^N$ est un difféomorphisme de Z_1 sur un (germe de) sous-variété de $Z_2\times\mathbf{R}^N$.

On dira que g est de *noyau de dimension finie*. Ce sera notamment le cas si $\dim Z_1<\infty$ et $\dim Z_2<\infty$ ou si $Z_1=Z=Z_2$, $g=\mathrm{id}(Z)$.

Théorème de préparation C^∞. — *Soient* A *un* $C^\infty_{z_2}(Z_2\times Y)$*-module fini,* C *un* $C^\infty_{z_1}(Z_1\times X)$*-module fini et* $\alpha : A\to C$ *une application linéaire compatible avec* φ. *(Un homomorphisme qui est* $C^\infty_{z_2}(Z_2\times Y)$*-linéaire pour la* $C^\infty_{z_2}(Z_2\times Y)$*-structure de module sur* C, *définie par extension des scalaires à partir de* φ.*)*

Si
$$\alpha(A)+\varphi(\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}(z_2)))C=C$$

alors : $\alpha(A)=C$.

La démonstration sera donnée au chapitre III.

On a :

Cas particulier 1. — Prenons $X=Y=$ un point. On trouve le :

Théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange-Mather « *habituel* ». — *Soit* $g : (Z_1, z_1)\to(Z_2, z_2)$ *un germe d'application* C^∞, *de noyau de dimension finie, entre germes de variétés Fréchétiques. Soit* $\mathfrak{m}C^\infty_{z_i}(Z_i)\subset C^\infty_{z_i}(Z_i)$ *l'idéal maximal de l'anneau local* $C^\infty_{z_i}(Z_i)$, A_i *un* $C^\infty_{z_i}(Z_i)$*-module fini :*

$$g^* : C^\infty_{z_2}(Z_2)\to C^\infty_{z_1}(Z_1)$$

l'homomorphisme canonique et $\alpha : A_2\to A_1$ *un homomorphisme compatible avec* g^*, *tel que :*

$$\alpha(A_2)+g^*(\mathfrak{m}C^\infty_{z_2}(Z_2))A_1=A_1$$

alors $\alpha(A_2)=A_1$.

Cas particulier 2 (théorème de Mather de [3] sous une forme « plus » différentiable). — On prend $Z_1 = Z = Z_2$, $g = \mathrm{id}(X)$, $z_1 = z_0 = z_2 \in Z =$ un germe de variété Fréchétique quelconque. On a $\varphi = F^*$.

On considère une fonction $C^0 : r : Z \to \mathbf{R}$, telle que $r^{-1}(o) = z_0$. Par abus de notation, on désigne par la même lettre l'élément de $C^\infty_{z_0}(Z \times Y)$ défini par :

$$Z \times Y \to Z \xrightarrow{r} \mathbf{R}.$$

Si $\psi \in \mathrm{Ker}(C^\infty_{z_0}(Z \times X) \xrightarrow{\mathrm{ev}(z_0)} C^\infty(X))$, alors on peut facilement donner un sens à :

$$\varphi(r)^{-1} . \psi \in C^\infty_{z_0}(Z \times X)$$

à condition de « bien choisir » r, en fonction de ψ. (On en laisse le soin au lecteur qui doit se rappeler ici la convention sur la notation C^∞ faite dans l'introduction.) Donc :

$$\psi = \varphi(r) . (\varphi(r)^{-1} . \psi),$$

ce qui montre que :

$$\varphi(\mathrm{Ker}(C^\infty_{z_0}(Z \times Y) \xrightarrow{\mathrm{ev}(z_0)} C^\infty(Y)))C^\infty_{z_0}(Z \times X) = \mathrm{Ker}(C^\infty_{z_0}(Z \times X) \xrightarrow{\mathrm{ev}(z_0)} C^\infty(X)).$$

On peut énoncer alors :

Soit $F : (Z, z_0) \to C^\infty(X, Y)$ un germe d'application C^∞, auquel on attache :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{z_0}(Z \times X) & \xleftarrow{\varphi = F^*} & C^\infty_{z_0}(Z \times Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}(z_0)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}(z_0)} \\ C^\infty(X) & \xleftarrow{F(z_0)^*} & C^\infty(Y) \end{array}$$

C et A sont des $C^\infty_{z_0}(Z \times X)$ et $C^\infty_{z_0}(Z \times Y)$-modules finis respectivement, $\alpha : A \to C$ un homomorphisme compatible avec $F^* = \varphi$. Si :

$$\alpha(A) + (\mathrm{Ker}(C^\infty_{z_0}(Z \times X) \xrightarrow{\mathrm{ev}(z_0)} C^\infty(X)))C = C$$

alors on a aussi $\alpha(A) = C$.

2. Un lemme algébrique.

Le théorème de préparation sera nécessaire pour traiter le « cas difficile », $\delta')$, $\delta'_1)$. Pour le « cas facile », $\delta'')$, $\delta''_2)$, on aura besoin de quelque chose beaucoup moins profond, qu'on va expliquer ici.

On considère comme tout à l'heure un germe d'application C^∞ :

$$F : (Z, z_0) \to C^\infty(X, Y).$$

En se plaçant dans le cadre des données fondamentales, on remarque que $C^\infty_{z_0}(Z, A)$ possède une structure de $C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(X)) \otimes_{\mathbf{R}} C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(Y))$-module, définie comme suit : si $\varphi \in C^\infty_{z_0}(Z, A)$, $\psi \in C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(X))$, $\eta \in C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(Y))$,

alors $(\psi\otimes\eta).\varphi\in C^\infty_{z_0}(Z, A)$ est défini par

$$((\psi\otimes\eta).\varphi)(z)=(\psi(z)\otimes\eta(z)).\varphi(z).$$

On remarque aussi que F induit un homomorphisme

$$\mathrm{id}(C^\infty(Z\times X))\otimes F^* : C^\infty_{z_0}(Z\times X)\otimes_R C^\infty_{z_0}(Z\times Y)\to C^\infty_{z_0}(Z\times X)$$

et qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{z_0}(Z\times X)\otimes_R C^\infty_{z_0}(Z\times Y) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes F^*} & C^\infty_{z_0}(Z\times X) \\ \downarrow{\scriptstyle ev(z_0)} & & \downarrow{\scriptstyle ev(z_0)} \\ C^\infty(X)\otimes_R C^\infty(Y) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes F(z_0)^*} & C^\infty(X) \end{array}$$

on a :

Lemme 1. — *Soient* A *un* $C^\infty_{z_0}(Z\times X)\otimes_R C^\infty_{z_0}(Z\times Y)$*-module,* C *un* $C^\infty_{z_0}(Z\times X)$*-module fini,* $\alpha : A\to C$ *un homomorphisme compatible avec* $\mathrm{id}\otimes F^*$. *Si* :

$$\alpha(A)+(\mathrm{Ker}(C^\infty_{z_0}(Z\times X)\xrightarrow{ev(z_0)} C^\infty(X))).C=C.$$

Alors $\alpha(A)=C$.

Démonstration. — D'après le lemme de Nakayama, il suffit de montrer que $\alpha(A)\subset C$ est un sous-$C^\infty_{z_0}(Z\times X)$-module, ce qui s'obtient en considérant sur A la structure de $C^\infty_{z_0}(Z\times X)$-module induite par

$$j : C^\infty_{z_0}(Z\times X)\to C^\infty_{z_0}(Z\times X)\otimes_R C^\infty_{z_0}(Z\times Y)$$

(où $j(\psi)=\psi\otimes 1$) et en remarquant que α est $C^\infty_{z_0}(Z\times X)$-linéaire (si A est muni de la structure de $C^\infty_{z_0}(Z\times X)$-module qu'on vient de décrire). Dorénavant on s'occupe seulement du cas difficile. Le cas facile se traite d'une manière tout à fait analogue, seulement, au lieu d'utiliser le théorème de préparation, on le remplace par le lemme 1.

3. Equations différentielles dépendant du temps.

On rappelle le théorème fondamental (d'existence, unicité, etc.) pour les équations différentielles dépendant du temps :

« Soit X une variété C^∞ compacte et $\xi\in C^\infty(\mathbf{R}, \Gamma^\infty(T, X))$. Il existe un $H_\xi\in C^\infty(\mathbf{R}, \mathrm{Diff}^\infty(X))$, unique, tel que :

(i) $$H(o)=\mathrm{id}(X)$$

(ii) $$\frac{\partial H_\xi}{\partial t}(x, t)=\xi(H(x, t), t)\in T_{H(x,t)}X,$$

égalité qu'on écrit aussi sous la forme :

$$\frac{\partial H_\xi}{\partial t}H_\xi^{-1}=\xi.$$

H_ξ sera appelé « l'*intégrale* » de (l'équation différentielle dépendant du temps) ξ. La correspondance $\xi \mapsto H_\xi$ établit un *difféomorphisme* (i.e. une correspondance biunivoque, C^∞ dans les deux sens) :

$$C^\infty(\mathbf{R}, \Gamma^\infty(TX)) \underset{\approx}{\to} C^\infty((\mathbf{R}, o), (\mathrm{Diff}^\infty(X), \mathrm{id}(X))) \subset C^\infty(\mathbf{R}, \mathrm{Diff}^\infty(X)).$$

Si $\dfrac{\partial \xi}{\partial t} \equiv o$ (donc ξ est une fonction constante $\mathbf{R} \to \Gamma^\infty(TX)$) alors $H_\xi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathrm{Diff}^\infty(X))$ est en plus un homomorphisme de groupes (un « sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{Diff}^\infty(X)$, de générateur infinitésimal $\xi \in \Gamma^\infty(TX)$). »

On donne maintenant le :

Lemme 2. — *Soit* $G \subset \mathrm{Diff}^\infty(X_1)$ *un « sous-groupe de Lie » et* $\xi \in C^\infty(\mathbf{R}, T_{\mathrm{id}(X_1)}G)$. *Considérons l'intégrale* $H = H_\xi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathrm{Diff}(X_1))$. *Pour chaque* $t \in \mathbf{R}$ *on a*

$$H(t) \in G, \quad \textit{donc } H_\xi \in C^\infty(\mathbf{R}, G).$$

Démonstration. — On va commencer par montrer que, si $\eta \in T_{\mathrm{id}(X_1)}G \subset \Gamma^\infty(TX_1)$ et $H_\eta \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathrm{Diff}^\infty(X_1))$ est le sous-groupe à un paramètre de générateur infinitésimal η, alors $H_\eta \in C^\infty(\mathbf{R}, G)$.

Par définition, il existe un $\psi \in C^\infty((\mathbf{R}, o), (G, \mathrm{id}(X_1)))$ tel que $\left.\dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta$. Pour tout $\varepsilon > o$ on définit un chemin $\varphi_\varepsilon \in C^0([o, \infty), G)$ par :

$$(\varphi_\varepsilon | [o, \varepsilon])(t) = \psi(t)$$
$$(\varphi_\varepsilon | [\varepsilon, 2\varepsilon])(t) = \psi(t-\varepsilon) \circ \psi(\varepsilon) = \psi(t-\varepsilon) \circ \varphi_\varepsilon(\varepsilon), \ldots$$
$$(\varphi_\varepsilon | [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon])(t) = \psi(t-(k-1)\varepsilon) \circ (\varphi_\varepsilon | [(k-2)\varepsilon, (k-1)\varepsilon])((k-1)\varepsilon), \ldots$$

Il est clair que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(t) = H_\eta(t) \in \mathrm{Diff}(X_1)$, et le fait que G est complet nous apprend que $H_\eta(t) \in G$.

Soit maintenant $\xi \in C^\infty(\mathbf{R}, T_{\mathrm{id}(X_1)}G)$, et pour chaque $t_0 \in \mathbf{R}$, le sous-groupe à un paramètre $H_{\xi(t_0)} \in C^\infty((\mathbf{R}, o), (G, \mathrm{id}(X_1)))$.

De nouveau, on définit pour tout $\varepsilon > o$ un $\bar{\varphi}_\varepsilon \in C^\infty([o, \infty), G)$ par :

$$(\bar{\varphi}_\varepsilon | [o, \varepsilon])(t) = H_{\xi(0)}(t) = \mathrm{id}(X_1)$$
$$(\bar{\varphi}_\varepsilon | [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon])(t) = H_{\xi((k-1)\varepsilon)}(t-(k-1)\varepsilon) \circ (\varphi_\varepsilon | [(k-2)\varepsilon, (k-1)\varepsilon])((k-1)\varepsilon).$$

Il est clair que $\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\varphi}_\varepsilon(t) = H_\xi(t)$, etc.

Lemme 3. — *Si* $G \subset \mathrm{Diff}(X_1)$ *est un « sous-groupe de Lie » et*

$$H : (\mathbf{R}, o) \to (G, \mathrm{id}(X_1))$$

appartient à $C^\infty(\mathbf{R}, G)$, *alors*

$$\frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1} \in C^\infty(\mathbf{R}, T_{\mathrm{id}(X_1)}G).$$

Démonstration. — Soit $t_0 \in \mathbf{R}$ et :

$$H'(t) = G(t) \circ H^{-1}(t_0) \in C^\infty(\mathbf{R}, G).$$

Alors :

$$\frac{\partial H'}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}\circ H^{-1}(t_0)\in T_{H'(t)}G.$$

Pour $t=t_0$ on a la relation voulue, puisque $H'(t_0)=\mathrm{id}(X_1)$.

Lemme 4. — *Soit* $G\subset \mathrm{Diff}^\infty(X_1)$ *un* « *sous-groupe de Lie* », $N\subset C^\infty(X, Y)$ *une* **R**-*sous-variété et*

$$\Phi : G\times N\to N$$

une application différentiable telle que

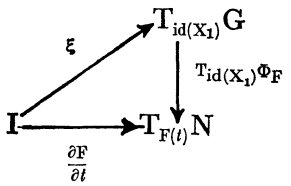
$$\Phi(\mathrm{id}(X_1), f)=f,$$

et

$$\Phi(H_1, \Phi(H_2, f))=\Phi(H_1\circ H_2, f)$$

(*c'est-à-dire que* Φ *est une* action de groupes).

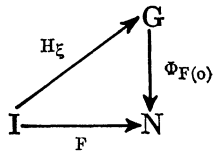
Alors, si $\xi\in C^\infty(I, T_{\mathrm{id}(X_1)}G)$ *et* $F\in C^\infty(I, N)$ *sont telles que le diagramme suivant soit commutatif*



(*où, comme avant* $\Phi_f=\Phi\,|\,G\times f$, *et*

$$H_\xi\in C^\infty((I, o), (G, \mathrm{id}(X_1)))$$

est l'intégrale de ξ), *le diagramme suivant est aussi commutatif*



(*c'est-à-dire que* $\Phi(H_\xi(t), F(o))=F(t)$, *pour tout* $t\in I$).

Démonstration. — Pour simplifier les notations, on va écrire $\Phi(H, f)=H\cdot f$, de telle sorte que l'on ait :

$$H'\cdot(H\cdot f)=(H'\circ H)\cdot f.$$

On considère aussi :

$$TN=\bigcup_{f\in N} T_fN\subset C^\infty(X, TY).$$

Φ induit deux applications tangentes « partielles », correspondant aux deux variables H, f. On aura

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f} : G\times TN\to TN$$

avec

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f}(H, T_f N) = T_{H\cdot f} N,$$

et qu'on écrit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f}(H, \eta) = H \times_1 \eta.$$

On remarque que $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial f}\right| H\times TN$ est un *difféomorphisme* de TN sur lui-même (il possède un inverse C^∞ qui est clairement $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial f}\right| H^{-1}\times TN$).

On remarque aussi que « $\times_1$ » est une action de groupe, c'est-à-dire que

$$\mathrm{id}(X_1)\times_1 \eta = \eta$$
$$H_1\times_1(H_2\times_1\eta) = (H_1\circ H_2)\times_1\eta.$$

De même, on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial H} : TG\times N \to TN$$

qui a la propriété

$$T_{H_1}\Phi_f \Big| T_{H_1}G = \frac{\partial\Phi}{\partial H}\Big| T_{H_1}G \times f$$

$$\left(\text{donc } \frac{\partial\Phi}{\partial H}(T_{H_1}G, f) \subset T_{H_1\cdot f}G\right).$$

On écrit symboliquement

$$\frac{\partial\Phi}{\partial H}(\eta', f) = \eta' \times_2 f.$$

Notre hypothèse devient

$$\xi(t)\times_2 F(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t).$$

On remarque enfin que $\times_1$, $\times_2$ sont linéaires, dans les variables pour lesquelles cela a un sens.

Pour démontrer ce qu'on veut, il suffit de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_\xi^{-1}(t)\cdot F(t)) = o \in T_{H_\xi^{-1}(t)\cdot F(t)}N.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_\xi^{-1}(t)\cdot F(t)) = \frac{\partial H_\xi^{-1}(t)}{\partial t}\times_2 F(t) + H_\xi^{-1}(t)\times_1 \frac{\partial F}{\partial t}(t).$$

En différentiant $H_\xi(t)\cdot H_\xi^{-1}(t) = \mathrm{id}(X_1)$, on remarque que

$$\frac{\partial H_\xi^{-1}(t)}{\partial t} = -TH_\xi^{-1}(t)\circ\frac{\partial H_\xi(t)}{\partial t}\circ H_\xi^{-1}(t) = -TH_\xi^{-1}(t)\circ\xi(t).$$

(où $\xi(t)\in\Gamma^\infty(TX_1)$ et $TH_\xi^{-1}(t)\circ\xi(t)$ est induite par l'action, à gauche, de $G\subset \mathrm{Diff}^\infty(X_1)$ sur les champs de vecteurs sur X_1).

Pour finir la démonstration, il faut noter l'identité suivante où $H\in G$, $\xi\in T_{\mathrm{id}(X_1)}G$, $f\in N$ (donc $TH\circ\xi\in T_H G$) :

$$(TH\circ\xi)\times_2 f = H\times_1(\xi\times_2 f).$$

Ceci est immédiat, et en reprenant notre calcul, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_\xi^{-1}(t)\cdot F(t)) = H_\xi^{-1}(t)\times_1(-\xi(t)\times_2 F(t)+\frac{\partial F}{\partial t}(t)) = 0.$$

4. Applications du théorème de préparation.

Soit (Z, z_0) un germe de variété Fréchétique. X', Y' seront deux autres variétés Fréchétiques. On rappelle qu'on a défini les germes d'application C^∞ de $Z\times X'$ dans Y', au point z_0, par :

$$C^\infty_{z_0}(Z\times X', Y') = C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(X', Y')) = \varinjlim_{z_0\in U = \text{voisinage de } z_0} C^\infty(U, C^\infty(X', Y')).$$

Le langage des sous-variétés, espaces tangents, etc., développé au premier chapitre, peut s'appliquer sans aucune difficulté aux espaces de germes $C^\infty_{z_0}(Z\times X', Y')$.

On se place maintenant dans le cadre des données fondamentales (dans le cas difficile, l'autre pouvant être traité de la même manière) et on considère une variété C^∞ compacte P. On se donne

$$F\in C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(P, M)) = C^\infty_{z_0}(Z\times P, M)\subset C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X, Y).$$

On considère la **R**-algèbre :

$$C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(P, C^\infty(X))) = C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X)$$

et on remarque que $C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(P, M))$ est une $C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X)$-sous-variété de $C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X, Y)$. On a ainsi un $C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X)$-module :

$$T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M) = \hat{T}_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M)\subset \Gamma^\infty_{z_0}([[F]]^* TY)\subset C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X, TY)$$

où $[[F]]\in C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X, Y)$ correspond à F.

On peut considérer l'espace vectoriel :

$$C^\infty_{z_0}(Z\times P, T_{\mathrm{id}(X_1)}G) = C^\infty_{z_0}(Z\times P. A)\oplus C^\infty_{z_0}(Z\times P, B)$$

(somme vectorielle directe) et l'application **R**-linéaire :

$$\tau_F : C^\infty_{z_0}(Z\times P, T_{\mathrm{id}(X_1)}G)\to T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M),$$

définie comme suit : si $\eta\in C^\infty_{z_0}(Z\times P, T_{\mathrm{id}(X_1)}G)$ et $\eta(z, p)\in T_{\mathrm{id}(X_1)}G$, alors :

$$(\tau_F\eta)(z, p) = (T_{\mathrm{id}(X_1)}\Phi_{F(z,p)})\eta(z, p).$$

On remarque que, si η est représentée par une vraie fonction $\eta : Z\to C^\infty(P, T_{\mathrm{id}(X_1)}G)$, $\tau_F(\eta)$ est une vraie fonction $Z\to C^\infty(P, C^\infty(X, TY))$ telle que la valeur de $\tau_F(\eta)$ au

point $z \in Z$ est complètement déterminée par la valeur $\eta(z)$. En particulier, τ_F induit une application linéaire :

$$\tau_F(z_0) : C^\infty(P, T_{id(X_1)}G) \to T_{F(z_0)}C^\infty(P, M) \subset C^\infty(P, C^\infty(X, TY))$$

qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter comme tout à l'heure, en termes d'application tangente à une certaine orbite.

On remarque aussi que $C^\infty_{z_0}(Z\times P, A)$ est un $C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X)$-module fini, $C^\infty_{z_0}(Z\times P, B)$ un $C^\infty_{z_0}(Z\times P\times Y)$-module, $T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M)$ un $C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X)$-module fini, $(\tau_F | C^\infty_{z_0}(Z\times P, B))$ un homomorphisme $C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X)$-linéaire, et $(\tau_F | C^\infty_{z_0}(Z\times P, A))$ un homomorphisme compatible avec

$$F^* : C^\infty_{z_0}(Z\times P\times Y) \to C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X).$$

Enfin, on considère le $C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X)$-module $T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M)/\tau_F(C^\infty_{z_0}(Z\times P, B))$ et l'application F^*-linéaire : $\bar{\tau}_F$ définie par la composition d'applications :

$$C^\infty_{z_0}(Z\times P, A) \xrightarrow{\tau_F} T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M) \longrightarrow T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M)/\tau_F(C^\infty_{z_0}(Z\times P, B)).$$

$$\bar{\tau}_F$$

On a le

Lemme 5. — Soient (Z, z_0) *un germe de variété Fréchétique et* P *une variété compacte. Comme ci-dessus, on considère un* $F \in C^\infty_{z_0}(Z\times P, M)$ *et*

$$\tau_F : C^\infty_{z_0}(Z\times P, T_{id(X_1)}G) \to T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M).$$

Si

$$\tau_F(z_0) : C^\infty(P, T_{id(X_1)}G) \to T_{F(z_0)}C^\infty(P, M)$$

est surjective, alors τ_F *est aussi surjective.*

Démonstration. — On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{z_0}(Z\times P\times X) & \xleftarrow{F^*} & C^\infty_{z_0}(Z\times P\times Y) \\ \downarrow{\scriptstyle ev(z_0)=Ev(z_0)} & & \downarrow{\scriptstyle ev(z_0)} \\ C^\infty(P\times X) & \xleftarrow{F(z_0)^*} & C^\infty(P\times Y) \end{array}$$

auquel on peut appliquer le théorème de préparation (cas particulier 2).

On remarque que la surjectivité de $\tau_F(z_0)$ est la même chose que l'égalité suivante (qu'on va appeler (Γ)) :

$$(\Gamma) \qquad \tau_F(C^\infty_{z_0}(Z\times P, T_{id(X_1)}G)) + \operatorname{Ker} Ev(z_0)\cdot T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M) = T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M).$$

Pour s'en convaincre on commence par considérer l'opération d'évaluation au point z_0 $(ev(z_0))$ appliquée directement à $T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M) \subset C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(P\times X, TY))$. Je dis que

$$\operatorname{Ker}(T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M) \xrightarrow{ev(z_0)} T_{F(z_0)}C^\infty(P, M)) = \operatorname{Ker} Ev(z_0)\cdot T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M),$$

ce qui résulte du fait qu'un élément du premier membre de l'égalité peut être divisé par une fonction C^0, bien choisie, $r : Z \to \mathbf{R}$, telle que $r^{-1}(0) = z_0$. Dans ces conditions la surjectivité de $\tau_F(z_0)$ exprime, en passant au quotient (par $ev(z_0)$), la même chose que (Γ) exprime en termes de « classes adjacentes ».

(Γ) est aussi équivalente à :

$$\bar{\tau}_F(C^\infty_{z_0}(Z\times P, A)) + \operatorname{Ker} Ev(z_0)(T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M)/\tau_F(C^\infty_{z_0}(Z\times P, B))) = T_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, M)/\tau_F C^\infty_{z_0}(Z\times P, B).$$

Le théorème de préparation nous dit que $\bar{\tau}_F$ (donc τ_F) est surjectif. q.e.d.

On aura besoin de deux corollaires du lemme 5 :

Lemme 6. — Soit P *compacte*; *on considère un* $f \in M$, *tel que*

$$T_{id(X_1)}\Phi_f : T_{id(X_1)}G \to T_f M$$

soit surjective. Alors l'application induite par $T_{id(X_1)}\Phi_f$:

$$\tau'_f : C^\infty(P, T_{id(X_1)}G) \to C^\infty(P, T_f M),$$

définie par :

$$P \xrightarrow{\Psi} T_{id(X_1)}G \xrightarrow{T_{id(X_1)}\Phi_f} T_f M,$$

$$\tau'_f(\psi)$$

est aussi surjective.

Démonstration. — On choisit $p \in P$ et on passe aux germes au point p, ce qui nous donne

$$(\tau'_f)_p : C^\infty_p(P, T_{id(X_1)}G) \to C^\infty_p(P, T_f M).$$

Si l'on prouve que $(\tau'_f)_p$ est surjective (pour chaque p), une partition C^∞ de l'unité, sur P, montre que τ'_f est surjective.

Mais la surjectivité de $(\tau'_f)_p$ résulte du lemme précédent, en remplaçant (Z, z_0) par (P, p), P (du lemme 5) par $\emptyset$, F par l'application constante $P \to f$, ce qui fait que :

$$T_F C^\infty(P, M) = C^\infty(P, T_f M).$$

Alors τ_F devient $(\tau'_f)_p$ et $\tau_F(z_0)$ devient $T_{id(X_1)}\Phi_f$.

Lemme 7. — Dans les conditions du lemme 5, on remplace la surjectivité de $\tau_{F(z_0)}$ *par la condition suivante : il existe* $f \in M$ *tel que*

(i) $T_{id(X_1)}\Phi_f : T_{id(X_1)}G \to T_f M$ *est surjective.*

(ii) $F(z_0) \in C^\infty(P, M)$ *est l'application constante* $P \to f$.

Alors τ_F *est surjective.*

Démonstration. — Si $\tau_F(z_0)$ est surjective, on peut appliquer le lemme 5. Mais $\tau_{F(z_0)}$ est la même chose que τ' du lemme 6, d'où le résultat.

Chapitre III

FIN DE LA DÉMONSTRATION

1. Le théorème des fonctions implicites (théorème 1).

On considère

$$j_1 : (Z, z_0) \to (C^\infty((I, o), (M, f)), (I \to f))$$

comme au point III du théorème 1. On a

$$j_1 \in C^\infty(Z \times I, M)$$

et on peut appliquer le lemme 7, avec $j_1 = F$, $I = P$.

On considère

$$\frac{\partial j_1}{\partial t} \in T_{j_1} C^\infty_{z_0}(Z \times I, M) \subset \Gamma^\infty_{z_0}([[j_1]]^* TY).$$

D'après le lemme 7, il existe un

$$\rho \in C^\infty_{z_0}(Z \times I, T_{\mathrm{id}(X_1)} G)$$

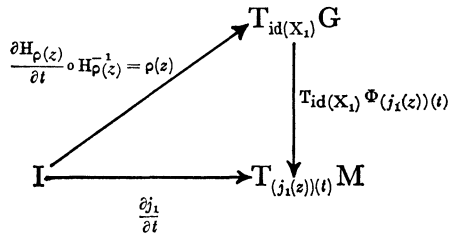
tel que

$$\tau_{j_1}(\rho) = \frac{\partial}{\partial t} j_1.$$

Pour chaque $z \in Z$, on considère l'intégrale de $\rho(z) \in C^\infty(I, T_{\mathrm{id}(X_1)} G)$

$$H_{\rho(z)} : (I, o) \to (G, \mathrm{id}(X_1)).$$

τ_{j_1} est défini de telle façon que le diagramme suivant soit commutatif :



D'après la propriété γ) des données fondamentales, on a

$$\Phi_{(j_1(z))(0) = f} H_{\rho(z)}(t) = (j_1(z))(t).$$

On considère $H_{\rho(z_0)} : I \to G$ (qui n'est *pas* nécessairement constant), qui a, d'après la formule ci-dessus, la propriété

$$\Phi_f H_{\rho(z_0)}(t) = H_{\rho(z_0)}(t) \cdot f = f,$$

donc $H^{-1}_{\rho(z_0)}(t) \cdot f = f$. On *définit* alors

$$J_1 : (Z, z_0) \to C^\infty((I, o), (G, \mathrm{id}(X_1))), (I \to \mathrm{id}(X_1)))$$

par

$$(J_1(z))(t) = H_{\rho(z)}(t) \circ H^{-1}_{\rho(z_0)}(t).$$

On a

$$(J_1(z))(t) \circ f = H_{\rho(z)}(t) \circ H^{-1}_{\rho(z_0)}(t) \circ f = H_{\rho(z)}(t) \cdot f = j_1(z)(t);$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.

2. Le théorème de préparation.

On rappelle le théorème de division de Mather ([2], [4], [6]) :

Théorème de division. — Soient Z *une variété Fréchétique,*

$$h_i(z) = h_i \in C^\infty(Z) \qquad (i = o, \ldots, p-1)$$

et

$$C^\infty(Z \times \mathbf{R}) \ni \Lambda = \Lambda(z, t) = t^p + \sum_{i=0}^{p-1} h_i(z) t^i.$$

Il existe deux applications **R***-linéaires et* C^∞ :

$$Q : C^\infty(Z \times \mathbf{R}) \to C^\infty(Z \times \mathbf{R})$$

$$r_0 \times \ldots \times r_{p-1} : C^\infty(Z \times \mathbf{R}) \to C^\infty(Z) \times \ldots \times C^\infty(Z) \qquad (p \text{ fois})$$

telles que :

(i) *Si* $f \in C^\infty(Z \times \mathbf{R})$, *on a :*

$$f(z, t) = \Lambda(z, t) \cdot Qf(z, t) + \sum_{i=0}^{p-1} r_i f(z) t^i.$$

(ii) *Si* $K \subset Z$ *et* $f | K \times \mathbf{R} \equiv o$, *alors* $Qf | K \times \mathbf{R} \equiv o$ *et* $r_i | K \equiv o$.

Remarque. — La différentiabilité de Q, r_i veut dire que si f dépend d'un paramètre, d'une manière C^∞, Qf dépend aussi d'une manière C^∞ du même paramètre, etc.

En revenant au théorème de préparation, on remarque que le lemme de Nakayama nous dit que $\alpha(A) = C$ si C est $C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(Y))$-fini.

Il suffit donc de prouver l'assertion suivante :

(W) : « Si C est un $C^\infty_{z_1}(Z_1, C^\infty(X))$-module, fini, et $C/\varphi(\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}(z_2))) \cdot C$ est $C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(Y))$-fini, alors C est $C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(Y))$-fini. »

On peut factoriser φ :

$$\begin{array}{ccccc} C^\infty_{z_1}(Z_1, C^\infty(X)) & \xleftarrow{g^*} & C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(X)) & \xleftarrow{F^*} & C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(Y)) \\ \downarrow{\scriptstyle ev(z_1)} & & \downarrow{\scriptstyle ev(z_2)} & & \downarrow{\scriptstyle ev(z_2)} \\ C^\infty(X) & \xleftarrow{id(C^\infty(X))} & C^\infty(X) & \xleftarrow{F(z_2)^*} & C^\infty(Y) \end{array}$$

La propriété (W) étant clairement « associative » elle est prouvée pour φ si on la prouve séparément pour les carrés ci-dessus, correspondant à g^* et à F^*. (Ce sont en fait deux cas particuliers du problème général $F : Z_2 \to \mathrm{id}(X) \in C^\infty(X, X)$, et $g = \mathrm{id}(Z_2)$.)

Démonstration de (W) *pour* g^*. — On factorise g :

$$\begin{array}{ccccc} Z_1 & \xhookrightarrow[i]{} & Z_2 \times \mathbf{R}^N & \xrightarrow[\mathrm{pr}]{} & Z_1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g & & \end{array}$$

où $i(z_1) = (z_2, 0)$, et $i(Z_1) \subset Z_2 \times \mathbf{R}^N$ est un germe de sous-variété. Notre carré pour g^* se décompose alors :

$$\begin{array}{ccccc} C^\infty_{z_1}(Z_1, C^\infty(X)) & \xleftarrow{i^*} & C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2 \times \mathbf{R}^N, C^\infty(X)) & \xleftarrow{(pr)^*} & C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle ev(z_1)} & & \downarrow{\scriptstyle ev(z_2, 0)} & & \downarrow{\scriptstyle ev(z_2)} \\ C^\infty(X) & \xleftarrow{id} & C^\infty(X) & \xleftarrow{id} & C^\infty(X) \end{array}$$

i^* étant surjective, (W) est vraie pour le premier carré (trivialement). Par « associativité », (W) est vraie pour le second carré, si elle est vraie pour $N = 1 (\mathbf{R}^N = \mathbf{R})$. On considère :

$$t = \text{proj. sur } \mathbf{R} : Z_2 \times \mathbf{R} \times X \to \mathbf{R},$$

$$t \in C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2 \times \mathbf{R} \times X) = C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2 \times \mathbf{R}, C^\infty(X)).$$

On considère un $C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2 \times \mathbf{R} \times X)$-module fini Θ, tel que $\Theta/\mathrm{pr}^*(\mathrm{Ker}\ \mathrm{ev}(z_2))\Theta$ soit $C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(X))$-fini (donc $C^\infty_{z_2}(Z_2, C^\infty(X))/\mathrm{Ker}\ \mathrm{ev}(z_2) = C^\infty(X)$-fini). On veut montrer que Θ est $C^\infty_{z_2}(Z_2 \times X)$-fini. Puisqu'il est $C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2 \times \mathbf{R} \times X)$-fini, on peut choisir des $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Theta$ qui engendrent Θ sur $C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2 \times \mathbf{R} \times X)$ et $\Theta/(\mathrm{pr})^*\mathrm{Ker}\ \mathrm{ev}(z_2)\Theta$ sur $C^\infty(X)$. On peut écrire $t\alpha_i = \sum_j c_{ij}\alpha_j + \sum_j z_{ij}\alpha_j$ avec $c_{ij} \in C^\infty(X)$, $\gamma_{ij} \in (\mathrm{pr})^*(\mathrm{Ker}\ \mathrm{ev}(z_2))$. Soit

$$C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2 \times \mathbf{R} \times X) \ni \Gamma(z, t, x) = \det(\delta_{ij} t - c_{ij}(x) - \gamma_{ij}(z, x)).$$

On a $\Gamma\cdot\alpha_i=0\in\Theta$ donc Θ est en fait un $C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2\times X\times\mathbf{R})/\Gamma\cdot C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2\times X\times\mathbf{R}$-module) fini. $C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2\times X\times\mathbf{R})/\Gamma$ est un $C^\infty_{z_2}(Z_2\times X)$-module, par

$$C^\infty_{z_2}(Z_2\times X)\xrightarrow{(pr)^*}C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2\times\mathbf{R}\times X)\longrightarrow C^\infty_{(z_2,0)}(Z_2\times\mathbf{R}\times X)/\Gamma$$

et si l'on montre qu'il est $C^\infty_{z_2}(Z_2\times X)$-fini, on a terminé. Mais d'après le théorème de division, chaque $h\in C^\infty_{z_2}(Z_2\times\mathbf{R}\times X)$ peut être écrit sous la forme :

$$h=\Gamma\cdot q+\sum_{i=0}^{p-1}((\mathrm{pr})^*h_i)t^i$$

où $q\in C^\infty_{(z_2,0}(Z_2\times\mathbf{R}\times X)$, $h_i\in C^\infty_{z_2}(Z_2\times X)$. Donc $C^\infty_{z_2}(Z_2\times\mathbf{R}\times C)/\Gamma$ est bien $C^\infty_{z_2}(Z_2\times X)$-fini.

Démonstration de (W) *pour* F*. — On utilise le

Lemme 8. — Soit $X'\subset Y'$ *une sous-variété fermée (peut-être à bord) de la variété localement compacte* Y'.

Il existe une application linéaire, C^∞ :

$$E : C^\infty(X')\to C^\infty(Y')$$

telle que, si $f\in C^\infty(X')$: $Ef\,|\,X'\equiv f$.

Ce lemme devient trivial, une fois qu'on le démontre pour $(-\infty, 0)\subset(-\infty, +\infty)$ (ce qui n'est pas trivial) et se trouve dans un travail de Seeley [5].

On considère maintenant le cas spécial où X est sous-variété de $Y\times\mathbf{R}$ et $F : Z\to C^\infty(X, Y)$ l'application constante de valeur :

$$X\subset Y\times\mathbf{R}\xrightarrow{pr}Y.$$

Notre F* s'obtient par la composition d'applications :

$$C^\infty_{z_0}(Z\times Y)\to C^\infty_{z_0}(Z\times Y\times\mathbf{R})\to C^\infty_{z_0}(Z\times X)$$

où l'on part d'une fonction (en fait d'un germe...) en (y, z) qu'on considère en (y, z, t) (t « muet »), et qu'on restreint, ensuite, aux $(y, t)\in X$ (aux $(y, z, t)\in X\times Z$). D'après le lemme 8, la dernière flèche est surjective, donc tout élément de $C^\infty(Z\times X)$ est de la forme $\varphi(z, t, y)\,|\,Z\times X$ ($\varphi\in C^\infty_{z_0}(Z\times Y\times\mathbf{R})$).

On considère comme tout à l'heure, un module Θ, mais dans notre nouveau contexte. On écrit encore $t\alpha_i=\sum_j c_{ij}\alpha_j+\sum_j\gamma_{ij}\alpha_j$, où $t\in C^\infty_{z_0}(Z\times X)$ est la projection $Z\times X\subset Z\times\mathbf{R}\times Y\to\mathbf{R}$, $c_{ij}\in C^\infty(Y)$, $\gamma_{ij}\in\mathrm{Ker}\ \mathrm{ev}(z_0)C^\infty_{z_0}(Z\times X)$ (donc $\gamma_{ij}=\gamma_{ij}(z, t, y)\,|\,Z\times X$, avec $\gamma_{ij}\in\mathrm{Ker}\ \mathrm{ev}(z_0)C^\infty_{z_0}(Z\times\mathbf{R}\times Y)$; $\gamma_{ij}(z_0, t, y)\equiv 0$).

On définit

$$\Gamma(z, t, y)\,|\,Z\times X=\det(\delta_{ij}t-c_{ij}-\gamma_{ij}),$$

et, comme tout à l'heure, il s'agit de montrer que chaque $h=h(z, t, y)\,|\,Z\times X$ peut être écrit sous la forme $h=\Gamma+\sum_{i=0}^{p-1} r_i t^i$ avec $q=q(z, t, y)\,|\,Z\times X$, $r_i=r_i(z, y)\,|\,Z\times X$. En oubliant les germifications et restrictions (à X), on a

$$\Gamma(z, t, y)=t^p+\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i(z, y)t^i+\rho(z, t, y)$$

avec $\rho(z_0, t, y)\equiv 0$. On peut appliquer une astuce connue [1]. En posant $\mathbf{R}^p=((\nu_0, \ldots, \nu_{p-1}))$, et en appliquant le théorème de division dans $(Z\times\mathbf{R}^p\times Y)\times\mathbf{R}$, on a

$$\rho(z, y, t)=(t^p+\sum_{i=0}^{p-1}\nu_i t^i)q_1(z, \nu, y, t)+\sum_{i=0}^{p-1} H_i(z, \nu, y)t^i$$

avec $q_1(z_0, \ldots)\equiv 0\equiv H_1(z_0, \ldots)$. On a

$$\Gamma(z, t, y)=(t^p+\sum_{i=0}^{p-1}\nu_i t^i)(1+q_1(z, \nu, y, t))+\sum_{i=0}^{p-1}(H_i(z, \nu, y)+\lambda_i(z, y)-\nu_i)t^i.$$

Le théorème des fonctions implicites habituel (et avec paramètres) nous dit que les équations $H_i+\lambda_i-\nu_i=0$ peuvent être résolues en $\nu=\nu(z, y)$, fonction C^∞ (en fait $\nu\in C^\infty_{z_0}(Z\times Y)$) au voisinage de $z=z_0$, $\nu_i=\lambda_i(z_0, y)$ (pour *tous* les $y\in Y$).

En substituant ces valeurs, Γ devient égal à un polynôme par lequel on « sait diviser », multiplié par une unité...

On passe ensuite au cas un peu plus général où X est sous-variété de $Y\times\mathbf{R}^N$ et $F\in C^\infty_{z_0}(Z, C^\infty(X, Y))$ est l'application constante de valeur :

$$X\subset Y\times\mathbf{R}^N\to Y.$$

Pour chaque $1\leq i\leq N$ on considère $Y\times\mathbf{R}^i\to Y\times\mathbf{R}^{i-1}$ et un voisinage compact, variété *à bord* de l'image de X dans $Y\times\mathbf{R}^i$, qu'on désigne par X_i. On est réduit à une composition d'étapes $X_i\subset X_{i-1}\times\mathbf{R}\to X_{i-1}$ qui sont du type précédent.

Dans le cas général, on considère un plongement $e: X\to\mathbf{R}^N$ et un voisinage compact, variété à bord Q, de $F(z_0)\times e(X)\subset Y\times\mathbf{R}^N$. On est réduit à la composition de deux cas, dont l'un est du type $Z\to$(plongements de X dans Q) (qui est trivial à cause de la différentiabilité de E, dans le lemme 8), et l'autre $Q\subset Y\times\mathbf{R}^N\to Y$ qui est déjà traité.

Chapitre IV

LE THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES DANS LE CAS LOCALEMENT COMPACT

Si X, Y sont localement compactes, la théorie précédente s'applique encore, à condition de faire quelques changements « naturels », qu'on indique brièvement, en laissant les détails au lecteur.

D'abord on introduit dans $C^\infty(X, Y)$ la topologie de Whitney qui est la convergence uniforme (avec toutes les dérivées partielles), « arbitrairement rapide » vers le point à l'infini (voir [3] pour plus de détails). On considère seulement les applications $Z \to C^\infty(X, Y)$ qui sont C^∞, et *continues* (en particulier ce sera le cas de Φ). Si en plus $f \in C^\infty(X, Y)$ est *propre*, cela suffit pour faire marcher le théorème de préparation.

Enfin X_1 n'est pas compact, ce qui nous oblige à considérer des champs de vecteurs bornés (dans une métrique riemanienne qui rend X_1 complet). Enfin, pour des raisons assez évidentes, nos conditions de décomposition, *finitude*, etc., sont exprimées en termes de fibrés tangents formels $\hat{T}$, et non pas en termes de T.

Le théorème 1 devient :

Théorème 2 (cas localement compact). — *Supposons que* $f \in M \subset C^\infty(X, Y)$ *soit propre et que*

$$\hat{T}_{\mathrm{id}(X_1)} G \xrightarrow{\hat{T}_{\mathrm{id}(X_1)} \Phi_f} \hat{T}_f M$$

soit surjective. Alors la condition III du théorème 1 est satisfaite (et réciproquement).

Faculté des Sciences d'Orsay,
Département de Mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute (1964), Oxford Univ. Press.
[2] J. Mather, Stability of C^∞ mappings : I. The division theorem, *Ann. of Maths*, **87** (1968), 89-104.
[3] J. Mather, Stability of C^∞ mappings : II. Infinitesimal stability implies stability *(à paraître)*.
[4] V. Poenaru, *Lectures on the singularities of differentiable mappings*, notes pour le Séminaire de Géométrie, Pise, 1969.
[5] R. Seeley, Extension of C^∞ functions defined in a half-space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 625-626.
[6] C. Tougeron, Stabilité des applications différentiables, *Séminaire Bourbaki*, **336** (novembre 1967), 1-16.

Manuscrit reçu le ***15*** *octobre* ***1969.***