PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

ROBERT MOUSSU
ROBERT ROUSSARIE

Relations de conjugaison et de cobordisme entre certains feuilletages

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 43 (1974), p. 143-168
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1974__43__143_0>

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RELATIONS DE CONJUGAISON ET DE COBORDISME ENTRE CERTAINS FEUILLETAGES

par R. MOUSSU et R. ROUSSARIE

Dans cet article, nous nous proposons d'établir quelques résultats de classification de feuilletages de codimension 1, définis sur des variétés compactes de dimension inférieure ou égale à 3. Classifier les feuilletages définis sur une variété V, signifie ici, décrire et éventuellement dénombrer les classes d'équivalence de feuilletages de V, pour une relation d'équivalence convenable. La variété V étant supposée de classe $\mathscr{C}^\infty$ ou $\mathscr{C}^\omega$ (analytique réelle) et les feuilletages considérés sur V, de classe $\mathscr{C}^r$, $0 \leqslant r \leqslant \infty$, ou $\mathscr{C}^\omega$, les deux relations d'équivalence suivantes s'imposent naturellement, entre feuilletages de même codimension :

1. La relation de conjugaison.

Deux feuilletages f_0 et f_1 de V sont topologiquement (respectivement $\mathscr{C}^r$-) conjugués, s'il existe un homéomorphisme h (respectivement un difféomorphisme h de classe r, $r \geqslant 1$) envoyant les feuilles de f_0 sur les feuilles de f_1. On appellera type topologique d'un feuilletage, sa classe de conjugaison topologique. Si h est isotope à l'identité de V, à travers les homéomorphismes (respectivement les difféomorphismes de classe r) de V, f_0 et f_1 sont dits topologiquement (respectivement $\mathscr{C}^r$-) isotopes.

2. La relation de cobordisme.

Deux feuilletages f_0 et f_1 de V, de classe $\mathscr{C}^r$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, sont $\mathscr{C}^r$-cobordants s'il existe un feuilletage $\mathscr{F}$ de $V \times [0, 1]$, de classe $\mathscr{C}^r$, transverse à $V \times \{0\}$ et $V \times \{1\}$ et induisant les feuilletages $f_0 \times \{0\}$ sur $V \times \{0\}$ et $f_1 \times \{1\}$ sur $V \times \{1\}$. On définit de manière analogue la relation de $\mathscr{C}^\omega$-cobordisme entre deux feuilletages analytiques f_0 et f_1 : le feuilletage $\mathscr{F}$ est supposé être analytique et induire les feuilletages $f_0 \times [0, \varepsilon]$ sur $V \times [0, \varepsilon]$ et $f_1 \times [1-\varepsilon, 1]$ sur $V \times [1-\varepsilon, 1]$, pour un certain $\varepsilon > 0$. De plus, si f_0 et f_1 sont transversalement orientables, on exigera que $\mathscr{F}$ soit aussi transversalement orientable.

Peu de résultats sont connus concernant la relation de conjugaison en dehors

d'une description des types topologiques des feuilletages de $C=\mathbf{S}^1\times I$ et de $\mathbf{T}^2=\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1$, description que nous rappelons brièvement :

Il n'existe que deux types topologiques de feuilletages de C, tangents à ∂C et sans feuille compacte en dehors de ∂C. On peut représenter chacun de ces deux types par les feuilletages f_1 et f_2 définis par les 1-formes

$$\omega_1=dr+\varphi(r)d\theta \quad \text{et} \quad \omega_2=(1-2r)dr+\varphi(r)d\theta$$

où $(\theta, r)\in\mathbf{S}^1\times I$, et φ est une application $\mathscr{C}^\infty$ de I dans $\mathbf{R}$ telle que $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ et $\varphi(r)>0$ pour $0<r<1$. Les feuilles intérieures de ces feuilletages sont difféomorphes à $\mathbf{R}$ et s'enroulent autour de chaque composante de ∂C. Les orientations transverses sur chaque composante de ∂C sont les mêmes pour f_1 et opposées pour f_2.

Ces deux feuilletages élémentaires sont utilisés pour décrire tous les types topologiques de feuilletages de C, resp. de $\mathbf{T}^2$. En fait, tout feuilletage orientable f de C, tangent à ∂C (resp. de $\mathbf{T}^2$), avec quelques feuilles compactes, est topologiquement équivalent à un feuilletage défini par une forme d'équation :

$$\omega=\psi(r)dr+\varphi(r)d\theta \quad \text{avec} \quad (\theta, r)\in\mathbf{S}^1\times(\mathbf{S}^1 \text{ resp. } I)$$

où φ et ψ sont deux applications $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{S}^1$ resp. I dans $\mathbf{R}$ sans zéros communs ($|\psi(r)|+|\varphi(r)|>0$) et telles que $\varphi^{-1}(0)\neq\emptyset$ et $\partial I\subset\varphi^{-1}(0)$ dans le cas de la variété $C=\mathbf{S}^1\times I$. Les feuilles compactes de ce feuilletage sont les cercles

$$\mathbf{S}^1\times\{x\} \quad \text{pour} \quad x\in F=\varphi^{-1}(0).$$

Si $U=\mathbf{S}^1-F\neq\emptyset$, les composantes connexes de $\mathbf{S}^1\times U$, qui sont toutes difféomorphes au produit du cercle par un intervalle ouvert, contiennent un feuilletage du type de f_1 ou de f_2. Pour des raisons de continuité et d'orientabilité il n'intervient de cette façon qu'un nombre fini de feuilletages du type de f_2 et ce nombre est pair dans le cas de $\mathbf{T}^2$.

Enfin, le théorème de Denjoy [1] exprime que tout feuilletage de $\mathbf{T}^2$ de classe $\geqslant 2$ et sans feuille compacte est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire, défini par une forme fermée d'équation $\omega=\alpha dr+\beta d\theta$ où α et β sont deux nombres réels, rationnellement indépendants.

Il n'existe pas de résultats généraux du type ci-dessus pour les feuilletages des variétés de dimension $\geqslant 3$. Seules quelques catégories simples de feuilletages ont été étudiées; par exemple les feuilletages sans holonomie, c'est-à-dire les feuilletages dont le groupe d'holonomie en tout point est trivial. Si $\mathscr{F}$ est un feuilletage sans holonomie, de codimension 1, transversalement orienté et de classe $\geqslant 2$, on peut lui associer un élément $\delta(\mathscr{F})$ de $SH^1(V, \mathbf{R})$ (sphère des directions orientées dans $H^1(V, \mathbf{R})$), et on a montré dans [12] que cet invariant δ classifie les feuilletages à isotopie près, pourvu que la variété V soit fermée, de dimension 3 et difféomorphe à un produit. (Autrement dit, deux feuilletages $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont isotopes si et seulement si $\delta(\mathscr{F})=\delta(\mathscr{F}')$.) Dans la partie I, nous généralisons ce résultat aux feuilletages presque sans holonomie, c'est-à-dire aux feuilletages définis sur une variété V à bord non vide, tangents à ∂V

et sans holonomie dans l'intérieur de V. Nous montrons précisément que les feuilletages $\mathscr{F}$ presque sans holonomie de codimension 1, transversalement orientés et de classe $\geqslant 2$, définis sur une variété V, de dimension 3, compacte, à bord non vide, difféomorphe à un produit, sont classifiés à isotopie près par un invariant $\delta(\mathscr{F}) \in S^+H^1(V, \mathbf{R})$ (où $S^+H^1(V, \mathbf{R}) = SH^1(V, \mathbf{R}) \cup \{0\}$ avec $\{0\} \subset H^1(V, \mathbf{R})$) et la donnée des orientations transverses sur les composantes connexes de ∂V.

La partie II est consacrée à la classification (par conjugaison) des feuilletages de codimension 1, de classe $\geqslant 2$, sans composante de Reeb, des variétés $\mathbf{T}^3$ et $\mathbf{T}^2 \times I$. En effet, dans [4], il est montré que de tels feuilletages sont « localement » presque sans holonomie et on déduit des résultats de la partie I une classification tout à fait analogue à la classification décrite plus haut pour $\mathbf{T}^2$ et $\mathbf{S}^1 \times I$. Dans le cas analytique on obtient une description plus précise de tous les types de feuilletages (sans restriction).

La relation de cobordisme a été étudiée par A. Philipps et A. Haefliger, pour les feuilletages des variétés ouvertes ([8], [3]). La relation de cobordisme utilisée par ces auteurs est plus stricte que celle que nous avons introduite : le feuilletage cobordant $\mathscr{F}$ est supposé transverse aux sous-variétés $V \times \{t\}$ de $V \times [0, 1]$. Nous avons abandonné cette dernière condition, car elle entraîne que deux feuilletages cobordants sont différentiablement isotopes, lorsque la variété V est compacte. Pratiquement rien n'est connu au sujet de la relation de cobordisme entre feuilletages d'une variété compacte V, à part le fait banal suivant : si f_0 et f_1 sont deux feuilletages de codimension 1 d'une variété V, définis respectivement par les 1-formes fermées ω_0 et ω_1, alors f_0 et f_1 sont cobordants. En effet, on peut définir un feuilletage cobordant par une 1-forme de $V \times I$ d'équation

$$\omega = dt + \varphi_0(t)\omega_0 + \varphi_1(t)\omega_1$$

où $t \in [0, 1]$ et φ_0, φ_1 sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ de supports $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ et $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ respectivement.

Dans la partie III, nous appliquons les résultats précédents à l'étude des cobordismes de feuilletages de $\mathbf{T}^2$. En particulier, nous montrons que, si l'on se limite aux cobordismes sans composantes de Reeb (R-cobordismes) ou aux cobordismes analytiques, la relation est très rigide (en un sens que l'on précisera) : presque aucun couple de feuilletages de $\mathbf{T}^2$ n'est R-cobordant (*).

(*) Récemment J. Thurston a montré que deux feuilletages de $\mathbf{T}^2$ étaient toujours cobordants.

I. — CLASSIFICATION DE FEUILLETAGES PRESQUE SANS HOLONOMIE

Rappelons qu'un feuilletage défini sur une variété V à bord non vide est dit presque sans holonomie, s'il est tangent à ∂V et a un groupe d'holonomie trivial en tout point intérieur à V. Un tel feuilletage est toujours orientable. Nous nous proposons de classifier à isotopie près les feuilletages presque sans holonomie, de codimension 1, transversalement orientés et de classe $\geqslant 2$, définis sur une variété compacte, orientable, de dimension 3, difféomorphe à un produit. Si $\mathscr{F}$ est un tel feuilletage défini sur une variété V, les groupes d'holonomie des composantes connexes de ∂V ont une propriété remarquable : ils sont ordonnés et archimédiens. Dans le § 1 ci-dessous nous rappelons ou démontrons quelques propriétés des groupes ordonnés et archimédiens qui sont utilisés dans le § 2 pour une étude locale du feuilletage au voisinage de ∂V. La classification est obtenue dans le § 3, en utilisant les résultats du § 2 et de [12].

1. Groupes ordonnés et archimédiens de germes de difféomorphismes.

Un groupe G est dit ordonné s'il est muni d'un ordre total compatible avec sa structure de groupe. G^p désignant l'ensemble des éléments du groupe supérieurs strictement à l'élément neutre, le groupe G est dit archimédien si :

$$\text{pour tout } g\in G \text{ et pour tout } h\in G^p, \text{ il existe } n\in\mathbf{N} \text{ tel que } g<h^n.$$

Il est bien connu que tout groupe ordonné et archimédien est abélien libre et plus précisément qu'il s'identifie en tant que groupe ordonné à un sous-groupe du groupe additif ordonné $\mathbf{R}$, ce sous-groupe étant défini à une constante multiplicative positive près.

Désignons par $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{R}^+)$ le groupe des germes en o des difféomorphismes de classe r, $1\leqslant r\leqslant\infty$ ou $r=\omega$ (analytique réelle), de $\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$, préservant l'origine. On munit ce groupe d'un ordre partiel; $[f]$ désignant le germe du difféomorphisme local f :

$$[f]<[g] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe un voisinage U de o dans } \mathbf{R}^+ \text{ tel que} \\ f(x)<g(x) \quad \text{pour tout} \quad x\in U-\{0\}. \end{cases}$$

Notons que les éléments plus grands que le germe de l'identité sont les germes d'expansions et que les éléments plus petits que le germe de l'identité sont les germes de contractions.

Soient G un groupe quelconque et φ une représentation de G dans $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{R}^+)$.

Nous dirons que la représentation φ est ordonnée et archimédienne si l'image $\varphi(G)$ est un sous-groupe ordonné et archimédien de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{R}^+)$ pour l'ordre introduit plus haut. Comme nous l'avons indiqué au début du paragraphe, il existe alors un homomorphisme injectif de groupe ordonné, $\ell : \varphi(G) \to \mathbf{R}$, défini à une constante positive multiplicative près.

Désignons par $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$, l'espace vectoriel réel des homomorphismes de G dans $\mathbf{R}$ et par $S^+\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ le quotient de $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ par la relation d'équivalence identifiant deux éléments différents par une constante multiplicative positive (ici, S est pris comme symbole de la sphère des directions orientées de $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ et le $+$ désigne la classe de la représentation triviale). Par exemple, si G est un groupe de type fini, $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^k$, où k est le rang de l'abélianisé du groupe G, et $S^+\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ est la sphère $\mathbf{S}^{k-1}$ des directions orientées de $\mathbf{R}^k$ à laquelle est adjointe l'origine de $\mathbf{R}^k$. A la représentation φ est alors associé l'homomorphisme $\ell \circ \varphi$ de G dans $\mathbf{R}$. Comme $\ell \circ \varphi$ est défini à une constante positive multiplicative près, il correspond à φ une classe bien déterminée $[\ell \circ \varphi]$ de $S^+\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$, classe que l'on notera par $\delta(\varphi)$.

Par exemple, si φ est une représentation linéaire, c'est-à-dire telle que :

$$\text{pour tout } g \in G, \text{ il existe } \lambda_g \in \mathbf{R}^+ \text{ tel que } \varphi(g)(x) = \lambda_g . x,$$

la classe $\delta(\varphi)$ est la classe de l'homomorphisme associant à g le nombre $\mathrm{Log}\, \lambda_g$. Nous désignerons par $\log \varphi$ cet homomorphisme : $\delta(\varphi) = [\log \varphi]$.

Nous dirons que deux représentations φ et φ' du groupe G sont topologiquement conjuguées, s'il existe un homéomorphisme local h de $\mathbf{R}^+$, préservant l'origine, tel que :

$$\text{pour tout } \quad g \in G, \quad \varphi'(g) = h\varphi(g)h^{-1};$$

le théorème d'ergodicité de Denjoy permet alors d'interpréter la classe $\delta(\varphi)$ (si φ est suffisamment différentiable) comme un invariant de conjugaison, ainsi que le montre le lemme suivant :

Lemme 1. — Soit G *un groupe de type fini; considérons l'ensemble des représentations ordonnées et archimédiennes de* G *dans* $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{R}^+)$, *où* $r \geqslant 2$. *Chacune de ces représentations est topologiquement conjuguée à une représentation linéaire et deux d'entre elles* φ *et* φ' *sont topologiquement conjuguées si et seulement si* $\delta(\varphi) = \delta(\varphi')$.

Ce lemme généralise le résultat du lemme 4 de [10].

Démonstration. — Notons d'abord que si deux représentations φ et φ' sont topologiquement conjuguées, il existe un isomorphisme de groupe ordonné :

$$k = \varphi(G) \to \varphi'(G), \text{ défini par } k(\varphi(g)) = h\varphi(g)h^{-1} = \varphi'(g),$$

où h est l'homéomorphisme de conjugaison. Il en résulte que $\delta(\varphi) = \delta(\varphi')$.

D'autre part, si φ et φ' sont deux représentations linéaires telles que $\delta(\varphi) = \delta(\varphi')$, il existe une constante positive μ telle que $\log \varphi = \mu \log \varphi'$. Autrement dit, pour tout

$g\in G$, il existe $\lambda_g>0$ tel que $\varphi(g)(x)=\lambda_g.x$ et $\varphi'(g)(x)=\lambda_g^{\mu}.x$ et il s'ensuit que l'homéomorphisme $h(x)=x^{\frac{1}{\mu}}$ conjugue φ' avec φ ($\varphi=h\circ\varphi'\circ h^{-1}$).

Le lemme sera donc démontré lorsqu'on aura prouvé que toute représentation ordonnée et archimédienne φ de G dans $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{R}^+)$ est topologiquement conjuguée à une représentation linéaire, autrement dit que le sous-groupe $\varphi(G)$ de $\mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{R}^+)$ est topologiquement conjugué à un sous-groupe linéaire.

Nous savons que $\varphi(G)$ est un groupe abélien libre de rang fini : $\varphi(G)\simeq\mathbf{Z}^k$ pour un certain $k\geqslant 0$. Nous allons raisonner par récurrence sur ce nombre k.

α) Si $k=0$ alors $\varphi(G)$ est le sous-groupe trivial qui est évidemment linéaire, $\varphi(g)$ est le germe de l'identité pour tout $g\in G$.

β) Supposons que $k=1$. Soit a une contraction locale de $\mathbf{R}^+$ en 0, représentant un générateur de $\varphi(G)$. D'après le lemme de Sternberg [14], il existe pour tout λ, $0<\lambda<1$, un homéomorphisme local h de $\mathbf{R}^+$ en 0, difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de 0, conjuguant a avec la contraction linéaire ℓ_λ définie par $\ell_\lambda(x)=\lambda x$.

Tout autre élément de $\varphi(G)$ étant égal au germe de a^k pour un certain $k\in\mathbf{Z}$, l'homéomorphisme h conjugue $\varphi(G)$ avec le groupe linéaire engendré par ℓ_λ.

γ) Supposons que $k=2$. Soient a et b deux contractions locales de $\mathbf{R}^+$ en 0 dont les germes en 0 engendrent $\varphi(G)$. Comme plus haut, on choisit un homéomorphisme local h_0 de $\mathbf{R}^+$ dont la restriction à $(0,\varepsilon)$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui conjugue a avec la contraction linéaire ℓ_{λ_1}; on prendra $\lambda_1=e^{-1}$.

Considérons maintenant le difféomorphisme $\pi(t)=e^t$ de $(-\infty,+\infty)$ sur $(0,\infty)$. Le conjugué de ℓ_{λ_1} par le difféomorphisme π^{-1} est la translation $T_{-1}(x)=x-1$ et il coïncide au voisinage de $-\infty$ avec $\pi^{-1}h_0ah_0^{-1}\pi$.

Soit $\bar{b}=\pi^{-1}h_0bh_0^{-1}\pi$; c'est un difféomorphisme de classe r défini au voisinage de $+\infty$ sur $\mathbf{R}$. Comme b commute avec a, $\bar{b}$ commute avec T_{-1} et détermine un difféomorphisme $\bar{\bar{b}}$ de classe r du cercle $\mathbf{S}^1$, quotient de $\mathbf{R}$ par la translation T_{-1}. De plus, comme a et b sont deux générateurs indépendants de $\varphi(G)$ et que tout élément de $\varphi(G)$ différent de l'identité est un germe de contraction ou d'expansion, le difféomorphisme $\bar{\bar{b}}$ n'a pas de point périodique. Sa classe de différentiabilité r étant supérieure ou égale à 2 par hypothèse, ce difféomorphisme est topologiquement conjugué à une rotation d'angle irrationnel α d'après le théorème de Denjoy [1]. Autrement dit, il existe un homéomorphisme H de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, respectant l'orientation, tel que H commute avec T_{-1} et que :

$$H\bar{b}H^{-1}(t)=T_s(t)=t+s.$$

Il en résulte que l'homéomorphisme $H\circ\pi^{-1}\circ h_0$ conjugue le groupe $\varphi(G)$ restreint à $(0,\infty)$ avec le groupe engendré par les translations T_{-1} et T_s. Enfin, l'homéomorphisme $h=\pi\circ H\circ\pi^{-1}\circ h_0$ de $\mathbf{R}^+-\{0\}$ dans $\mathbf{R}^+-\{0\}$ se prolonge en 0 par $h(0)=0$ et conjugue $\varphi(G)$ avec le groupe linéaire engendré par $e^{-1}.x$ et $e^s.x$.

δ) Supposons maintenant que $k>2$. Soient $a, b, c, \ldots$, des contractions locales représentant une base de $\varphi(G)$. Appliquons aux deux premiers générateurs a et b les

constructions de γ). L'homéomorphisme $H\circ\pi^{-1}\circ h_0$ conjugue a, b, c, ... avec les homéomorphismes T_{-1}, T_s, $\tilde{c}$, ... Par passage au quotient par la translation T_{-1} l'homéomorphisme $\tilde{c}$ définit un homéomorphisme de $\mathbf{S}^1$ commutant avec la rotation d'angle s. Comme s est irrationnel, cet homéomorphisme est une rotation et $\tilde{c}$ est une translation de $\mathbf{R}$. Il s'ensuit que $h=\pi\circ H\circ\pi^{-1}\circ h_0$ conjugue $\varphi(G)$ avec un groupe linéaire.

Remarque 1. — Si φ est une représentation ordonnée et archimédienne, tous les éléments de $\varphi(G)$ différents de l'élément neutre ont le même ordre de contact avec l'identité en o lorsque φ est suffisamment différentiable pour que cet ordre soit défini. Si l'ordre de φ est fini (ce qui sera le cas par exemple si φ est analytique), on peut calculer explicitement $\delta(\varphi)$:

(i) Si φ est d'ordre o (c'est-à-dire, pour tout $g\in G$ tel que $\varphi(g)\neq Id$, $\frac{d\varphi(g)}{dx}(o)\neq 1$), $\delta(\varphi)$ est la classe de l'homomorphisme associant à $g\in G$ le nombre $\log\frac{d\varphi(g)}{dx}(o)$ et φ est conjugué à sa partie linéaire.

(ii) Si φ est d'ordre fini $n>o$ (c'est-à-dire, pour tout $g\in G$, tel que $\varphi(g)\neq Id$, $\frac{d^{(n)}\varphi(g)}{dx^n}(o)\neq o$), $\delta(\varphi)$ est la classe de l'homomorphisme associant à $g\in G$ le nombre $\frac{d^n\varphi(g)}{dx^n}(o)$. Récemment F. Takens a démontré des résultats plus précis dans ce cas particulier.

2. Germe de feuilletage sans holonomie en dehors d'une feuille compacte.

Soient M une variété compacte, connexe, sans bord, et $[\mathscr{F}]$ un germe de feuilletage de codimension 1, défini au voisinage de $M\times\{o\}$ dans $M\times\mathbf{R}^+$, dont $M\times\{o\}$ est une feuille. Désignons par G le groupe $\pi_1(M, x)$, x étant un point base dans M. Si $[\mathscr{F}]$ est de classe r, on lui associe une représentation d'holonomie $\varphi : G\to Diff_0^r(\mathbf{R}^+)$ en utilisant un feuilletage $\mathscr{F}$ représentant $[\mathscr{F}]$, transverse au facteur $\mathbf{R}^+$ au voisinage de $M\times\{o\}$. Nous dirons que le germe de feuilletage $[\mathscr{F}]$ est sans holonomie en dehors de M s'il peut être représenté par un feuilletage $\mathscr{F}$ dont les groupes d'holonomie sont triviaux en dehors de $M\times\{o\}$.

Lemme 2. — *Soit $[\mathscr{F}]$ un germe de feuilletage de classe $r\geqslant o$, défini au voisinage de $M\times\{o\}$ dans $M\times\mathbf{R}^+$ et admettant $M\times\{o\}$ comme feuille. Une condition nécessaire et suffisante pour que $[\mathscr{F}]$ soit sans holonomie en dehors de M est que la représentation d'holonomie*

$$\varphi : G=\pi_1(M, x)\to Diff_0^r(\mathbf{R}^+)$$

soit une représentation ordonnée et archimédienne.

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage représentant $[\mathscr{F}]$, tel que $\mathscr{F}$ soit défini au voisinage de $M\times\{o\}$ dans $M\times\mathbf{R}$ et soit sans holonomie en dehors de $M\times\{o\}$. Le groupe d'holonomie $\varphi(G)$ est un groupe ordonné, car $\mathscr{F}$ étant sans holonomie en dehors de $M\times\{o\}$, chaque élément de $\varphi(G)$ différent de l'identité a un seul point fixe o, et c'est donc un germe de contraction ou d'expansion.

Soient $[f]$ un élément contractant de $\varphi(G)$ et $[g]$ un élément quelconque. Nous devons montrer qu'il existe $p\in\mathbf{N}$ tel que

$$[f]^p<[g].$$

Choisissons des difféomorphismes locaux d'holonomie f et g représentant $[f]$ et $[g]$. Soit $U=[o, \varepsilon]$ un intervalle tel que g^{-1} soit défini sur U et que f soit défini sur $g^{-1}(U)$. Comme f est une contraction, f^p est défini sur $g^{-1}(U)$ pour tout $p\in\mathbf{N}$. Soit $y\in U$ avec $y\neq o$. Posons $z=g^{-1}(y)\in g^{-1}(U)$. $f^p(z)$ est défini pour tout $p\in\mathbf{N}$ et tend vers o lorsque p croît indéfiniment. Donc, pour p suffisamment grand on a, soit $f^p(z)<y$ soit $f^pg^{-1}(y)<y$.

Or f^pg^{-1} étant défini sur U, l'inégalité $f^pg^{-1}(y)<y$ entraîne que f^pg^{-1} est une contraction, c'est-à-dire que $f^pg^{-1}(x)<x$, pour $x\in U-\{o\}$; soit $[f]^p<[g]$.

Réciproquement, si un germe de feuilletage $[\mathscr{F}]$ a une représentation d'holonomie φ ordonnée et archimédienne, chaque élément de $\varphi(G)$ est un germe de contraction ou d'expansion et $[\mathscr{F}]$ a une holonomie triviale en dehors de M.

Corollaire. — *Si* M *est compacte et s'il existe un représentant* $\mathscr{F}$ *de* $[\mathscr{F}]$ *de classe* $\geqslant 2$ *tel que* :

— $M\times\{o\}$ *est sa seule feuille compacte*;

— $\varphi(G)$ *est un sous-groupe abélien de* $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{R}^+)$,

alors $[\mathscr{F}]$ *est sans holonomie en dehors de* M.

Démonstration. — On montre tout d'abord [4] qu'il existe un élément de $\varphi(G)$ qui est le germe d'une contraction. Du lemme 1 de la thèse de N. Koppel on déduit que φ est une représentation ordonnée archimédienne.

Considérons maintenant une sous-variété compacte M, de codimension 1, d'une variété V, telle que le fibré normal de M dans V soit trivial. La sous-variété M possède deux faces dans V que l'on notera M_1 et M_2. Soit $[\mathscr{F}]$ un germe de feuilletage dans V de classe r défini au voisinage de M, tangent à M et sans holonomie en dehors de M.

Soit $M\times\mathbf{R}^+$ un demi-voisinage tubulaire de M dans V, au-dessus de la face M_i ($i=1$ ou 2). Le germe de feuilletage $[\mathscr{F}]$ induit un germe de feuilletage dans $M\times\mathbf{R}^+$ au voisinage de $M\times\{o\}$.

D'après le lemme 2, la représentation d'holonomie $\varphi : G=\pi_1(M, x)\to \mathrm{Diff}_0^r(\mathbf{R}^+)$ où $x\in M$, associée à ce feuilletage, est une représentation ordonnée et archimédienne. On peut lui associer, comme on l'a vu au § 1, un élément de $S^+H^1(M, \mathbf{R})$ (car $\mathrm{Hom}(\pi_1(M, x), \mathbf{R})=H^1(M, \mathbf{R})$), c'est-à-dire une classe de cohomologie réelle définie à une constante positive multiplicative près. Si l'on change la paramétrisation du voi-

sinage tubulaire, ou le point de base x, φ est modifiée par une conjugaison $\mathscr{C}^r$-différentiable et la classe associée dans $S^+H^1(M, \mathbf{R})$ ne varie pas. On a ainsi défini une classe ne dépendant que de la face M_i considérée et du germe $[\mathscr{F}]$, que l'on notera :

$$\delta(M_i, [\mathscr{F}]) \in S^+H^1(M, \mathbf{R}).$$

Remarque 2. — L'ordre de φ défini plus haut ne dépend que de $[\mathscr{F}]$; c'est l'ordre du contact de $[\mathscr{F}]$ avec M :

(i) Si cet ordre est égal à 1, on a vu que $\delta(M_i, [\mathscr{F}])$ est représenté par l'homomorphisme $\log \frac{d\varphi(g)}{dx}(0)$. La classe $\delta(M_i, [\mathscr{F}])$ n'est alors rien d'autre que la direction orientée de la forme transversale de volume définie sur M et associée à $[\mathscr{F}]$ (voir [13]).

(ii) Si l'ordre est supérieur à 1, la forme transversale de volume est nulle, mais non $\delta(M_i, [\mathscr{F}])$ en général.

(iii) Dans tous les cas où l'ordre est fini et égal à n, l'expression de $\delta(M_i, [\mathscr{F}]) = \delta(\varphi)$ indiquée plus haut montre que les classes associées à chacune des deux faces sont liées par la relation :

$$\delta(M_1, [\mathscr{F}]) = (-1)^{n-1}\delta(M_2, [\mathscr{F}]).$$

Par contre, si l'ordre est infini, il n'y a aucune relation entre $\delta(M_1, [\mathscr{F}])$ et $\delta(M_2, [\mathscr{F}])$. (Les germes d'un feuilletage de part et d'autre d'une feuille compacte n'ont aucune relation entre eux si le contact du feuilletage avec la feuille compacte est d'ordre infini.)

Si $[\mathscr{F}]$ est un germe de feuilletage au voisinage de M, nous désignerons par $[\mathscr{F}]_1$ et $[\mathscr{F}]_2$ les germes induits par $[\mathscr{F}]$ au-dessus des faces M_1 et M_2 de M. Nous dirons qu'un germe $[\mathscr{F}]_i$, $i = 1$ ou 2, est topologiquement conjugué avec un germe $[\mathscr{F}']_i$, s'il existe des représentants $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_i'$ de ces deux germes définis dans des voisinages U et U' de M, et un homéomorphisme h de U dans U' tel que $h(\mathscr{F}_i) = \mathscr{F}_i'$ et que h restreint à M soit l'identité. $[\mathscr{F}]_i$ et $[\mathscr{F}']_i$ seront dits topologiquement isotopes (ou topologiquement conjugués par isotopie) si l'homéomorphisme h est isotope à l'identité par une isotopie fixe sur M.

Le lemme 2 a la conséquence suivante :

Lemme 3. — *Soient* $[\mathscr{F}]$ *et* $[\mathscr{F}']$ *deux germes de feuilletages définis au voisinage de* M, *tangents à* M *et sans holonomie en dehors de* M; *supposons de plus que ces germes soient de classes* $r \geqslant 2$; *alors les germes* $[\mathscr{F}]_i$ *et* $[\mathscr{F}']_i$ (*pour* $i = 1$ *ou* 2) *sont topologiquement isotopes si et seulement si* $\delta(M_i, [\mathscr{F}]) = \delta(M_i, [\mathscr{F}'])$.

Démonstration. — Choisissons un voisinage tubulaire de la face M_i, difféomorphe à $M \times \mathbf{R}^+$, et des représentants $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_i'$ des germes $[\mathscr{F}]_i$ et $[\mathscr{F}']_i$, transverses au facteur $\mathbf{R}^+$. D'après le lemme 1, les représentations d'holonomie φ et φ' associées à $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_i'$ sont topologiquement conjuguées, si et seulement si $\delta(M_i, [\mathscr{F}]) = \delta(M_i, [\mathscr{F}'])$.

Or, si les représentations φ et φ' sont topologiquement conjuguées, on peut construire [2], un homéomorphisme de $M\times\mathbf{R}^+$ dans lui-même, conjuguant $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_i'$ au voisinage de $M\times\{0\}$ de la forme $h(x,t)=(x,g(x,t))$ pour $(x,t)\in M\times\mathbf{R}^+$, avec $g(x,0)=0$. L'homéomorphisme h est isotope à l'identité par une isotopie laissant fixe $M\times\{0\}$.

Réciproquement, si $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_i'$ sont topologiquement isotopes, il est facile de vérifier que les représentations φ et φ' sont topologiquement conjuguées.

Nous allons considérer avec plus de détails le cas $M=\mathbf{T}^2$, seule surface orientable de caractéristique nulle. Soit $[\mathscr{F}]$ un germe de feuilletage de $\mathbf{T}^2\times\mathbf{R}^+$, défini au voisinage de $\mathbf{T}^2\times\{0\}$, tangent à $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et sans holonomie en dehors de $\mathbf{T}^2\times\{0\}$. Si la classe $\delta(\mathbf{T}^2,[\mathscr{F}])$ est nulle, $[\mathscr{F}]$ est un germe de feuilletage trivial, d'après le lemme 3 ($[\mathscr{F}]$ peut être représenté à isotopie près par un feuilletage $\mathscr{F}_i$ dont les feuilles au voisinage de $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ sont les tores $\mathbf{T}^2\times\{t\}$, $t\in\mathbf{R}^+$). Supposons maintenant que $\delta(M,[\mathscr{F}])$ soit non nulle et choisissons un représentant $\mathscr{F}$ de $[\mathscr{F}]$ défini dans un voisinage U de $M\times\{0\}$ et transverse au facteur $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{T}^2\times\mathbf{R}^+$. Alors clairement la feuille $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ est l'unique feuille compacte de $\mathscr{F}$ et il est facile (voir [4] et [10]) de construire un tore T_1 plongé dans $U-(\mathbf{T}^2\times\{0\})$, tel que :

(i) T_1 soit transverse à $\mathscr{F}$.

(ii) $T_0=\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et T_1 bordent une sous-variété de U difféomorphe à $\mathbf{T}^2\times[0,1]$ (on peut choisir T_1 transverse au facteur $\mathbf{R}^+$) : nous dirons que T_1 est parallèle à T_0.

Choisissons une orientation transverse pour le feuilletage $\mathscr{F}$. Cette orientation définit une orientation transverse au feuilletage $\mathscr{F}|T_1$ induit par $\mathscr{F}$ sur T_1. Le feuilletage $\mathscr{F}|T_1$ est donc un feuilletage sans holonomie et transversalement orienté. Si $\mathscr{F}$ est de classe $r\geqslant 2$, il en est de même pour $\mathscr{F}|T_1$ et on peut associer à ce dernier feuilletage une classe $\delta(\mathscr{F}|T_1)\in SH^1(T_1,\mathbf{R})$, qui est un invariant de la relation d'isotopie [12]. En vertu de la condition (ii) sur T_1, il existe une identification naturelle de $H^1(T_1,\mathbf{R})$ avec $H^1(\mathbf{T}^2,\mathbf{R})$ et l'on peut écrire que $\delta(\mathscr{F}|T_1)\in SH^1(\mathbf{T}^2,\mathbf{R})$. Les deux classes $\delta(T_0,[\mathscr{F}])$ et $\delta(\mathscr{F}|T_1)$ appartiennent toutes deux à $SH^1(\mathbf{T}^2,\mathbf{R})$ et sont reliées entre elles de la façon suivante :

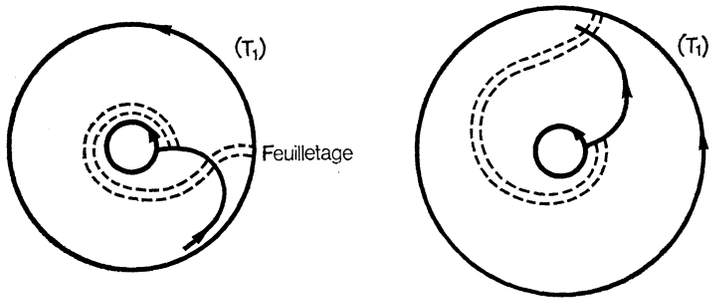
Lemme 4. — *Soit* $[\mathscr{F}]$ *un germe non trivial de feuilletage de* $\mathbf{T}^2\times\mathbf{R}^+$ *tangent à* $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ *et sans holonomie en dehors de* $\mathbf{T}^2\times\{0\}$. *Supposons de plus que* $[\mathscr{F}]$ *soit transversalement orienté et de classe* $r\geqslant 2$. *Soit* $\delta(\mathscr{F}|T_1)$ *la classe de* $SH^1(\mathbf{T}^2,\mathbf{R})$ *associée comme plus haut au feuilletage induit par un représentant* $\mathscr{F}$ *de* $[\mathscr{F}]$ *sur un tore* T_1 *transverse à* $\mathscr{F}$ *et parallèle à* $\mathbf{T}^2\times\{0\}$. *Alors :*

(i) $\delta(\mathscr{F}|T_1)=\delta(\mathbf{T}^2,[\mathscr{F}])$ *si l'orientation de* $[\mathscr{F}]$ *est sortante de* $\mathbf{T}^2\times\mathbf{R}^+$ *le long de* $\mathbf{T}^2\times\{0\}$.

(ii) $\delta(\mathscr{F}|T_1)=-\delta(\mathbf{T}^2,[\mathscr{F}])$ *si l'orientation de* $[\mathscr{F}]$ *est rentrante le long de* $\mathbf{T}^2\times\{0\}$.

Démonstration. — L'égalité de $\delta(\mathscr{F}|T_1)$ et de $\delta(\mathbf{T}^2,[\mathscr{F}])$ a été démontrée dans [10], avec toutefois des notations différentes. Pour se convaincre de la justesse du signe, le

lecteur pourra examiner le schéma ci-dessous, où est représentée la trace du feuilletage au-dessus d'un générateur c de $\pi_1(\mathbf{T}^2)$, entre les tores T_0 et T_1. L'évaluation de $\delta(\mathscr{F} \mid T_1)$ sur c est positive; si l'orientation est sortante le long de T_0, l'évaluation de $\delta(\mathbf{T}^2, [\mathscr{F}])$ sur c est négative (le difféomorphisme local d'holonomie au-dessus de c est une contraction); si l'orientation est rentrante le long de T_0, l'évaluation de δ $(\mathbf{T}^2, [\mathscr{F}])$ sur c est positive.



3. Résultats de conjugaison.

Considérons maintenant une variété compacte V de dimension 3, de classe $\mathscr{C}^\infty$, dont le bord non vide possède k composantes $M_0, \ldots, M_{k-1}$. Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage presque sans holonomie de V, c'est-à-dire un feuilletage tangent à ∂V et dont les groupes d'holonomie sont triviaux pour les points intérieurs à V. On suppose de plus que $\mathscr{F}$ est transversalement orienté. On associe à un tel feuilletage $\mathscr{F}$ les classes $\delta(M_j, \mathscr{F}) \in S^+H^1(M_j, \mathscr{F})$, pour $j = 0, \ldots, k-1$ définies comme dans le § 2 par le germe de $\mathscr{F}$ au voisinage de M_j, et des indices $\alpha_j(\mathscr{F})$, $j = 0, \ldots, k-1$, égaux à $+1$ ou -1 suivant que l'orientation transverse à $\mathscr{F}$ est sortante ou rentrante le long de M_j. Il suit du lemme 3 que le système des $(\delta(M_j, \mathscr{F}), \alpha_j(\mathscr{F}))$, $j = 0, \ldots, k-1$, est invariant par isotopie.

Nous associerons plus loin au feuilletage $\mathscr{F}$ une classe $\delta(\mathscr{F})$ appartenant à $S^+H^1(V, \mathbf{R})$ qui, jointe aux $\alpha_i(\mathscr{F})$, classifiera le feuilletage à isotopie près lorsque $\mathscr{F}$ est de classe $\geqslant 2$ et que V est une variété produit orientable. Tout d'abord, notons que l'on ignore le type topologique général d'une variété V possédant des feuilletages presque sans holonomie. Il est clair cependant que l'existence d'un tel feuilletage apporte des restrictions importantes sur le type topologique de la variété, comme le montrent les deux propositions suivantes.

Proposition 1. — Soit V *une variété de dimension* 3, *compacte, à bord* ∂V *non vide. Supposons que* V *possède un feuilletage* $\mathscr{F}$ *tangent à* ∂V *et dont les feuilles intérieures sont homéomorphes à* $\mathbf{R}^2$. *Alors les composantes connexes de* ∂V *sont difféomorphes au tore* $\mathbf{T}^2$.

Démonstration. — Désignons par $M_0, \ldots, M_{k-1}$ $(k \geqslant 0)$ les composantes connexes de ∂V. Supposons qu'il existe un i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, tel que l'homomorphisme de $\pi_1(M_i)$ dans le groupe d'holonomie G_i de M_i, ne soit pas injectif. Alors M_i porte un cycle

évanouissant et il en résulte que V est difféomorphe à $\mathbf{D}^2\times\mathbf{S}^1$ et que $\mathscr{F}$ est une composante de Reeb [6]. Supposons au contraire que pour tout i, l'homomorphisme ci-dessus soit injectif. Comme le feuilletage $\mathscr{F}$ est presque sans holonomie, les feuilles intérieures étant simplement connexes, les groupes G_i sont abéliens libres d'après le lemme 2. Comme $\pi_1(M_i)$ est isomorphe à G_i, les variétés M_i sont difféomorphes à $\mathbf{S}^2$ ou à $\mathbf{T}^2$, mais la première éventualité est exclue en raison du théorème de stabilité [9].

Remarque 4. — Il est facile de déduire de la proposition précédente que les feuilles compactes d'un feuilletage d'une variété fermée de dimension 3 sont difféomorphes à $\mathbf{T}^2$, si les feuilles non compactes sont difféomorphes à $\mathbf{R}^2$. Le type topologique d'une variété possédant un tel feuilletage est très simple. Il est déterminé dans [11].

Proposition 2. — *Soit* V *une variété compacte de dimension* 3, *munie d'un feuilletage* $\mathscr{F}$ *presque sans holonomie de classe* $\geqslant 2$. *Supposons que les composantes connexes de* ∂V *soient difféomorphes au tore* $\mathbf{T}^2$. *Alors la variété* V *est difféomorphe à un fibré sur* $\mathbf{S}^1$, *de fibre une surface à bord non vide.*

Démonstration. — Désignons par $T_0, \ldots, T_{k-1}$, $k\geqslant 0$, les composantes connexes de ∂V. Si le groupe d'holonomie d'une des feuilles T_i est trivial, le feuilletage étant presque sans holonomie, il suit du théorème de stabilité que toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ sont difféomorphes à $\mathbf{T}^2$ et que la variété V est difféomorphe à $\mathbf{T}^2\times\mathrm{I}$. Supposons au contraire que tous les groupes d'holonomie des feuilles T_i sont non triviaux, ou, ce qui revient au même, $\delta(T_i, \mathscr{F})\neq 0$ pour tout i. Nous avons vu à la fin du § 2 que l'on peut plonger, à proximité de chaque T_i, un tore T_i' parallèle à T_i et transverse à $\mathscr{F}$. Si les colliers E_i déterminés par T_i et T_i' sont deux à deux disjoints, la variété $V'=V-\bigcup_{i=0}^{k-1} E_i$ est difféomorphe à V et le feuilletage $\mathscr{F}$ induit sur V' un feuilletage $\mathscr{F}'$ transverse au bord $\partial V'=\bigcup_i T_i'$. Le feuilletage $\mathscr{F}'$ étant sans holonomie et de classe $\geqslant 2$, il suit d'un raisonnement de D. Tischler [15] que la variété V' est fibrée sur $\mathbf{S}^1$, ainsi que la variété V qui lui est difféomorphe.

Revenons maintenant au problème de classification. La variété V considérée, étant une variété produit, est de l'un des deux types suivants :

(i) $V=M\times I$ où M est une surface compacte, orientable, sans bord, différente de $\mathbf{T}^2$ si V ne contient pas de facteur $\mathbf{S}^1$.

(ii) $V=L\times\mathbf{S}^1$ où L est une surface compacte, orientable à bord non vide si V contient un facteur $\mathbf{S}^1$.

On considère sur cette variété les feuilletages presque sans holonomie, transversalement orientés et de classe $\geqslant 2$, que l'on désire classifier à isotopie près, rel. ∂V : l'homéomorphisme de conjugaison est supposé être isotope à l'identité de V par une isotopie laissant fixe ∂V.

Bien que les résultats s'énoncent d'une façon unique pour les deux types de variétés, les démonstrations sont quelque peu différentes.

Nous commençons par le lemme suivant :

Lemme 5. — Si $\mathscr{F}$ est un feuilletage défini comme plus haut sur une variété de type (i), *alors $\mathscr{F}$ est différentiablement isotope rel. ∂V à un feuilletage transverse au facteur* I *de* V.

Démonstration. — La variété V est difféomorphe à $M\times I$ avec M comme plus haut. Désignons $M\times\{0\}$ par M_0 et $M\times\{1\}$ par M_1. Remarquons tout d'abord que la caractéristique de V étant différente de zéro, on a nécessairement la relation $\alpha_0(\mathscr{F})+\alpha_1(\mathscr{F})=0$.

Si M est difféomorphe à $\mathbf{S}^2$, il résulte du théorème de stabilité que $\mathscr{F}$ est différentiablement isotope au feuilletage dont les feuilles sont les sphères $\mathbf{S}^2\times\{t\}$ de $\mathbf{S}^2\times I$. Si M est différent de $\mathbf{S}^2$, on va obtenir l'isotopie cherchée comme composition d'isotopies élémentaires construites de la façon suivante. On considère un cercle γ_1 plongé dans M et enlaçant une anse de M. Le feuilletage $\mathscr{F}$ ne contenant pas de composantes de type I ou II (voir [12]), il existe une isotopie différentiable de V, fixe sur ∂V, transformant le feuilletage $\mathscr{F}$ en un feuilletage $\mathscr{F}_1'$ transverse à $\gamma_1\times I\subset M\times I$.

Maintenant, le feuilletage $\mathscr{F}$ étant presque sans holonomie, il en résulte que le feuilletage $\mathscr{F}_1'$ induit sur $\gamma_1\times I$ est un feuilletage trivial ou bien un feuilletage d'un des deux types f_1 ou f_2 décrits dans l'Introduction. En raison de la relation entre les $\alpha_i(\mathscr{F})$ notée plus haut, ce feuilletage est en fait du type f_1 ou trivial, et par une nouvelle isotopie rel. ∂V il est possible de transformer $\mathscr{F}_1'$ en un feuilletage $\mathscr{F}_1$ transverse au facteur I au-dessus de γ_1. On recommence la même construction pour des cercles $\gamma_2, \ldots, \gamma_\ell$ enlaçant chacune des autres anses de M, puis pour des chemins $\ell_1, \ldots, \ell_s$ joignant deux à deux les cercles γ_j. Il est ainsi possible d'obtenir un complexe K de dimension 1, plongé dans M, tel que $M-K$ soit difféomorphe au disque $\mathbf{D}^2$ ouvert, et un feuilletage $\mathscr{F}_{\ell+s}$ isotope à $\mathscr{F}$ rel. ∂V et transverse au facteur I au-dessus de K. Le théorème de stabilité permet alors de trouver une dernière isotopie, fixe dans un voisinage de $\partial V\cup(K\times I)$, transformant $\mathscr{F}_{\ell+s}$ en un feuilletage transverse au facteur I. (La méthode esquissée ci-dessus est décrite avec plus de détails dans [12].)

Nous sommes maintenant en mesure de construire l'invariant d'isotopie cherché. Ce sera un élément noté $\delta(\mathscr{F})$ appartenant à $S^+H^1(V,\mathbf{R})$, construit de la façon suivante :

(i) Si V est de type (i), nous avons vu dans le lemme 5 que le feuilletage $\mathscr{F}$ est isotope à un feuilletage $\mathscr{F}'$ transverse au facteur I de $V=M\times I$, ayant le même système $(\delta(M_i,\cdot), \alpha_i(\cdot))$ que le feuilletage $\mathscr{F}$. Soit x un point de M. Le feuilletage $\mathscr{F}'$ étant transverse au facteur I, il lui correspond une représentation globale d'holonomie φ de $\pi_1(M,x)$ dans $\mathrm{Diff}(I;\partial I)$, c'est-à-dire dans le groupe des difféomorphismes laissant ∂I fixe.

On peut démontrer, comme dans le lemme 2, que cette représentation est ordonnée et archimédienne, donc abélienne libre. Il en résulte que φ est entièrement déterminée

par son germe φ_0 au voisinage de $M_0 = M \times \{0\}$ ou par son germe φ_1 au voisinage de $M_1 = M \times \{1\}$ et que l'image de φ est isomorphe à l'image de φ_0 et à l'image de φ_1^{-1} en tant que groupe ordonné. Ceci entraîne que $\delta(M_0, \mathscr{F}) = -\delta(M_1, \mathscr{F})$ où ces 2 classes sont considérées dans $S^+H^1(M^2, \mathbf{R})$. Comme d'autre part, $\alpha_0(\mathscr{F}) = -\alpha_1(\mathscr{F})$, il existe une classe unique $\delta(\mathscr{F}) \in S^+H^1(V, \mathbf{R})$ telle que

$$\delta(\mathscr{F})_{|M_0} = \alpha_0(\mathscr{F}) . \delta(M_0, \mathscr{F}) \quad \text{et} \quad \delta(\mathscr{F})_{|M_1} = \alpha_1(\mathscr{F}) . \delta(M_1, \mathscr{F})$$

où $\delta(\mathscr{F})_{|M_i}$ désigne la classe induite par l'inclusion de M_i dans V.

(ii) Si la variété V est de type (ii), le bord de V, $\partial V = \partial L \times \mathbf{S}^1$ est réunion de k tores $M_0, \ldots, M_{k-1}$. Nous avons démontré plus haut que si pour un i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $\delta(M_i, \mathscr{F}) = 0$, alors $V = \mathbf{T}^2 \times I$ et le feuilletage $\mathscr{F}$ est isotope au feuilletage produit. Nous prendrons dans ce cas $\delta(\mathscr{F}) = 0$. Supposons au contraire qu'aucune classe $\delta(M_i, \mathscr{F})$ ne soit nulle. Comme dans la démonstration de la proposition 2 on peut construire une sous-variété V′ de V, difféomorphe à V, dont le bord $\partial V'$ est réunion de k tores M_i', $0 \leqslant i \leqslant k-1$, chacun d'eux étant transverse à $\mathscr{F}$ et parallèle à M_i. La variété V′ étant une variété produit, on peut associer au feuilletage $\mathscr{F}'$ induit par $\mathscr{F}$ sur V′ un élément $\delta(\mathscr{F}) \in SH^1(V', \mathbf{R})$, car ce feuilletage est sans holonomie, transversalement orienté et de classe $\geqslant 2$ [12]. Grâce à l'isomorphisme naturel de $H^1(V, \mathbf{R})$ sur $H^1(V', \mathbf{R})$, on peut écrire que $\delta(\mathscr{F}') \in SH^1(V, \mathbf{R})$ et il est d'autre part facile de vérifier que cette classe ne dépend que du feuilletage $\mathscr{F}$. Nous poserons $\delta(\mathscr{F}) = \delta(\mathscr{F}')$ et il résulte du lemme 4 que :

$$\delta(\mathscr{F})_{|M_i'} = \delta(\mathscr{F}_{|M_i'}) = \alpha_i(\mathscr{F}) . \delta(M_i, \mathscr{F}).$$

Remarquons que :

1) La classe $\delta(\mathscr{F})$ construite plus haut ne dépend que de la classe d'isotopie de $\mathscr{F}$. Cela suit de l'invariance par isotopie des éléments $\delta(M_i, \mathscr{F})$ et $\alpha_i(\mathscr{F})$ ainsi que de l'invariance par isotopie de la classe associée à un feuilletage sans holonomie (voir [12]).

2) La classe $\delta(\mathscr{F})$ vérifie les relations $\delta(\mathscr{F})_{|M_i} = \alpha_i(\mathscr{F}) . \delta(M_i, \mathscr{F})$ pour chaque composante M_i de ∂V.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat fondamental :

Théorème 1. — Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux feuilletages presque sans holonomie, transversalement orientés et de classe $\geqslant 2$, définis sur une variété produit, compacte, orientable, de dimension 3, et de bord ∂V non vide ayant k composantes connexes $M_0, \ldots, M_{k-1}$. Alors $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont topologiquement isotopes relativement à ∂V si et seulement si $\delta(\mathscr{F}_1) = \delta(\mathscr{F}_2)$ et $\alpha_i(\mathscr{F}_1) = \alpha_i(\mathscr{F}_2)$ pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Démonstration. — L'invariance par isotopie du système $\delta(\cdot)$, $\alpha_i(\cdot)$ ayant été établie plus haut, il suffit de démontrer que si $\delta(\mathscr{F}_1) = \delta(\mathscr{F}_2)$ et $\alpha_i(\mathscr{F}_1) = \alpha_i(\mathscr{F}_2)$ pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$, alors $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont isotopes rel. ∂V.

(i) *Si* V *est de type* (i), $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont respectivement isotopes à des feuilletages $\mathscr{F}_1'$ et $\mathscr{F}_2'$ transverses au facteur I de $V = M \times I$. Les égalités :

$$\delta(\mathscr{F}_1) = \delta(\mathscr{F}_2) \quad \text{et} \quad \alpha_0(\mathscr{F}_1) = \alpha_0(\mathscr{F}_2)$$

entraînent que les représentations globales d'holonomie φ et φ' de $\pi_1(M, x)$ dans Diff(I, ∂I) associées à $\mathscr{F}_1'$ et $\mathscr{F}_2'$ sont topologiquement conjuguées, car elles ont des germes en o conjugués d'après le lemme 3. On en déduit une conjugaison des feuilletages $\mathscr{F}_1'$ et $\mathscr{F}_2'$ par un homéomorphisme h de la forme

$$h(x, t)=(x, g(x, t)), \qquad (x, t)\in M\times I$$

avec $g(x, o)=(x, o)$ et $g(x, 1)=(x, 1)$.

Cet homéomorphisme est isotope à l'identité rel. ∂V et respecte les orientations transverses car il envoie M_0 sur M_0.

(ii) *Si la variété* V *est de type* (ii), les feuilletages $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont manifestement conjugués lorsque $\delta(\mathscr{F}_1)=\delta(\mathscr{F}_2)=o$. Sinon on construit comme dans la proposition 2 une sous-variété V', difféomorphe à V et dont les composantes M_i' du bord, $o\leqslant i\leqslant k-1$, sont transverses à $\mathscr{F}$ et respectivement parallèles à M_i. L'égalité de $\delta(\mathscr{F}_1)$ et de $\delta(\mathscr{F}_2)$ entraîne qu'il existe un homéomorphisme h_0 de V', isotope à l'identité conjuguant $\mathscr{F}_{1|V'}$ avec $\mathscr{F}_{2|V'}$ (voir [12]). De plus, comme $\delta(M_i, \mathscr{F}_1)=\delta(M_i, \mathscr{F}_2)$ pour tout i, puisque $\alpha_i(\mathscr{F}_1)=\alpha_i(\mathscr{F}_2)$, les germes des feuilletages $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont isotopes au voisinage de chaque M_i et il en résulte que h_0 se prolonge en un homéomorphisme h, laissant fixe chacune des composantes de ∂V, isotope à l'identité et conjuguant $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$.

Remarque 5. — Il est facile de déterminer quels sont les systèmes formés d'une classe $\delta\in S^+H^1(V, \mathbf{R})$ et d'indices $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$, $\alpha_i=\pm 1$, associés à des feuilletages presque sans holonomie transversalement orientés. Ces systèmes sont assujettis aux deux conditions nécessaires suivantes :

1) Si la variété V ne contient pas de facteur I, c'est-à-dire si $V=L\times\mathbf{S}^1$, avec L surface à bord non vide différente de $\mathbf{S}^1\times I$, alors la classe $\delta(\mathscr{F})$ pour tout feuilletage $\mathscr{F}$ a une évaluation non nulle sur le facteur $\mathbf{S}^1$. (En effet, le feuilletage $\mathscr{F}'$ sans holonomie, associé à $\mathscr{F}$ comme plus haut, a une classe $\delta(\mathscr{F})=\delta$ d'évaluation non nulle sur le facteur $\mathbf{S}^1$, d'après [12].)

2) Si la variété V ne contient pas de facteur $\mathbf{S}^1$, c'est-à-dire si $V=M\times I$, avec M surface fermée différente de $\mathbf{T}^2$, nous avons vu plus haut que $\alpha_0(\mathscr{F})+\alpha_1(\mathscr{F})=o$ pour tout feuilletage.

Réciproquement, si un système δ, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ satisfait à ces conditions, on peut le représenter par un feuilletage presque sans holonomie transversalement orienté défini par une 1-forme intégrable :

1) Si $V=L\times\mathbf{S}^1$, où L est une surface différente de $\mathbf{S}^1\times I$, dont le bord ∂L possède k composantes connexes $\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}$, une classe quelconque de $SH^1(V, \mathbf{R})$ d'évaluation non nulle sur le facteur $\mathbf{S}^1$ peut être représentée par une 1-forme fermée d'équation $\varepsilon d\theta+\omega_L$ où $\theta\in\mathbf{S}^1$, $\varepsilon=\pm 1$ et ω_L est une 1-forme fermée de L.

Soient (φ_i), $o\leqslant i\leqslant k-1$, des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur L, telles que

$\varphi_i(x)$ soit proportionnel à la distance de x à γ_i dans un voisinage tubulaire de γ_i et égale à 1 en dehors de ce voisinage. Alors la 1-forme

$$\omega = \sum_i \alpha_i d\varphi_i + \sum_i \varphi_i \, (\varepsilon d\theta + \omega_L)$$

définit un feuilletage $\mathscr{F}$ presque sans holonomie et transversalement orienté, tel que $\delta(\mathscr{F}) = [\varepsilon d\theta + \omega_L]$ et $\alpha_i(\mathscr{F}) = \alpha_i$.

Chaque feuille intérieure de ce feuilletage est difféomorphe à la surface ouverte, revêtement de L, de groupe fondamental le noyau de ω_L dans $\pi_1(L)$.

2) Si $V = M \times I$ avec $M \neq \mathbf{T}^2$, alors la 1-forme

$$\Omega = dr + \varphi(r)\omega$$

où $r \in I$, φ est une application $\mathscr{C}^\infty$ de I dans $\mathbf{R}$ comme plus haut et ω est une 1-forme fermée quelconque de M, définit un feuilletage transversalement orienté $\mathscr{F}$, tel que

$$\delta(\mathscr{F}) = [\omega] \in S^+ H^1(M \times I, \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \alpha_0(\mathscr{F}) = -\alpha_1(\mathscr{F}) = -1.$$

De même, la forme $-\Omega$ définit un feuilletage associé au système $([\omega], +1, -1)$. On obtient ainsi un représentant dans chaque classe d'isotopie.

Chaque feuille intérieure du feuilletage associé à Ω ou $-\Omega$ est un revêtement de M dont le groupe fondamental est le noyau de ω dans $\pi_1(M)$.

3) Si $V = \mathbf{T}^2 \times I$, alors les 1-formes

$$\Omega_1 = dr + \varphi(r)\omega \quad \text{et} \quad \Omega_2 = (1 - 2r)dr + \varphi(r)\omega$$

où $r \in I$ et ω est une forme linéaire quelconque de $\mathbf{T}^2$, définissent des feuilletages dont les systèmes associés sont respectivement $([\omega], -1, +1)$ et $([\omega], -1, -1)$. Nous désignerons respectivement ces feuilletages par $\mathscr{F}([\omega], 1)$ et $\mathscr{F}([\omega], 2)$, par analogie avec les feuilletages f_1 et f_2 de $C = \mathbf{S}^1 \times I$. On peut d'ailleurs les obtenir simplement en faisant le produit des feuilletages f_1 ou f_2 par $[0, 1]$ et en identifiant $C \times \{0\}$ et $C \times \{1\}$ dans $C \times [0, 1]$ au moyen d'une rotation de la couronne C.

Les feuilletages associés aux formes Ω_1, Ω_2 ainsi qu'aux formes $-\Omega_1$, $-\Omega_2$ fournissent des représentants dans chaque classe d'isotopie.

II. — CLASSES DE CONJUGAISON DE FEUILLETAGES DE $\mathbf{T}^2\times\mathrm{I}$ ET $\mathbf{T}^3$

Nous allons appliquer les résultats de la partie précédente à la classification des feuilletages transversalement orientables, de codimension 1, de classe de différentiabilité supérieure ou égale à 2, ou analytique réelle, des variétés $\mathbf{T}^3$ et $\mathbf{T}^2\times\mathrm{I}$, sans composante de Reeb dans le cas différentiable.

Les feuilletages $\mathscr{F}([\omega], i)$, $i=1$ ou 2, introduits à la fin de la partie I, vont jouer, dans cette classification, un rôle analogue à celui joué par les feuilletages f_1 et f_2 dans la classification des feuilletages de $\mathbf{T}^2$ et $\mathbf{S}^1\times\mathrm{I}$ indiquée dans l'Introduction.

Pour les feuilletages différentiables, le résultat s'énonce comme suit :

Théorème 2. — Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de classe $\geqslant 2$, transversalement orientable et sans composante de Reeb, défini sur $\mathbf{T}^3$ ou $\mathbf{T}^2\times\mathrm{I}$ ($\mathscr{F}$ est alors supposé tangent au bord). Alors :

(i) *Si $\mathscr{F}$ ne contient pas de feuille compacte, il est topologiquement isotope à un feuilletage linéaire $\mathscr{F}'$ de $\mathbf{T}^3$, c'est-à-dire à un feuilletage défini par une forme d'équation*

$$\Omega=\alpha d\theta_1+\beta d\theta_2+\gamma d\theta_3 \quad \textit{avec} \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R} \quad \textit{et} \quad (\theta_1,\theta_2,\theta_3)\in\mathbf{T}^3=\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1.$$

(ii) *Si $\mathscr{F}$ contient au moins une feuille compacte, il est topologiquement conjugué à un feuilletage $\mathscr{F}'$ de $\mathbf{T}^2\times(\mathbf{S}^1$ resp. $\mathrm{I})$ dont les feuilles compactes sont les tores $\mathbf{T}^2\times\{r\}$ pour $r\in\mathrm{F}$, fermé non vide de $\mathbf{S}^1$ resp. I (contenant $\partial\mathrm{I}$) et tel que les composantes connexes de $\mathbf{T}^2\times\mathrm{U}$, avec $\mathrm{U}=(\mathbf{S}^1$ resp. $\mathrm{I})-\mathrm{F}$, qui sont en quantité au plus dénombrable et difféomorphes au produit de $\mathbf{T}^2$ par un intervalle, contiennent chacune un feuilletage $\mathscr{F}([\omega], i)$, où ω est une forme linéaire de $\mathbf{T}^2$ et $i=1$ ou 2. La forme linéaire ω, ainsi que l'indice i, peuvent varier d'une composante connexe à l'autre; cependant, pour des raisons de continuité et d'orientabilité, $i=1$ sauf pour un nombre fini de composantes connexes et en outre i est pair dans le cas de $\mathbf{T}^3$.*

Ce théorème est une conséquence du lemme suivant :

Lemme. — Si $\mathscr{F}$ est un feuilletage de classe $r\geqslant 2$ transversalement orientable de $\mathbf{T}^2\times\mathrm{I}$ dont $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et $\mathbf{T}^2\times\{1\}$ sont les seules feuilles compactes, $\mathscr{F}$ est presque sans holonomie.

Ainsi, d'après le théorème 1, $\mathscr{F}$ est topologiquement isotope relativement à $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et $\mathbf{T}^2\times\{1\}$ à un feuilletage $\mathscr{F}(\gamma, i)$. Ce lemme est un cas particulier du théorème 2 de [4]. Mais il est facile de le démontrer directement en constatant que :

— $\mathscr{F}$ ne possédant pas de composante de Reeb, on déduit de [6] que ses feuilles sont homéomorphes, soit à $\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}$, soit à $\mathbf{R}^2$, et de [5] que l'adhérence de chacune d'elles contient $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et $\mathbf{T}^2\times\{1\}$.

— Les groupes d'holonomie de $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et $\mathbf{T}^2\times\{1\}$ sont archimédiens ordonnés (corollaire du lemme 4).

On en déduit que les feuilles non compactes de $\mathscr{F}$ sont simultanément, soit toutes des plans, soit toutes des cylindres. Dans le premier cas, $\mathscr{F}$ est naturellement presque sans holonomie. Dans le second cas, on montre que, si une feuille cylindrique avait une holonomie non nulle, le feuilletage posséderait une composante de Reeb.

Démonstration du théorème. — Dans [5] il est montré que, si $\mathscr{F}$ ne possède pas de feuilles compactes, il a une holonomie triviale, et d'après [12] il est topologiquement isotope à un feuilletage linéaire du tore $\mathbf{T}^3$.

Supposons que $\mathscr{F}$ possède au moins une feuille compacte L_0. Puisque $\mathscr{F}$ ne possède pas de composante de Reeb, l'injection $i_0 : L_0 \hookrightarrow \mathbf{T}^3$ resp. $\mathbf{T}^2\times I$ induit un homomorphisme injectif de $\pi_1(L_0)$ dans $\pi_1(\mathbf{T}^3$ resp. $\mathbf{T}^2\times I)$ et ainsi L_0 est un plongement de $\mathbf{T}^2$, $\mathscr{C}^\infty$-isotope à une fibre $\mathbf{T}^2\times\{r_0\}$ de $\mathbf{T}^2\times(\mathbf{S}^1$ resp. $I)$, pour une certaine représentation de $\mathbf{T}^3$ comme produit $\mathbf{T}^2\times\mathbf{S}^1$.

Si $\{L_j\}_{j=1,2,\ldots,p}$ désigne un ensemble fini quelconque de feuilles compactes de $\mathscr{F}$, il existe donc un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbf{T}^2\times(\mathbf{S}^1$ resp. $I)$, isotope à l'identité, qui applique ces feuilles sur des fibres $\mathbf{T}^2\times\{r_j\}$.

Or il est facile de montrer, en utilisant un raisonnement de [2], qu'à toute feuille L_j on peut associer un voisinage tubulaire U_j :

$$\Phi_j : \mathbf{T}^2\times[-1, 1] \xrightarrow{\sim} U_j \subset \mathbf{T}^3,$$

tel que, si L est une feuille compacte de $\mathscr{F}$ qui le rencontre,

$$L = \Phi_j(\mathbf{T}^2\times\{t\}), \quad \text{où} \quad t\in[-1, 1].$$

On en déduit qu'il existe un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbf{T}^3$ resp. $\mathbf{T}^2\times I$ isotope à l'identité qui applique les feuilles compactes de $\mathscr{F}$ sur des fibres $\mathbf{T}^2\times\{r\}$ de $\mathbf{T}^3=\mathbf{T}^2\times(\mathbf{S}^1$ resp. $I)$ où r appartient à un fermé F de $\mathbf{S}^1$.

Désignons par $\mathscr{F}'$ le feuilletage image de $\mathscr{F}$ par ce difféomorphisme et par U le complémentaire de F. Supposons que $U\neq\emptyset$ et soit ℓ un intervalle ouvert, composante connexe de U. Alors $\mathscr{F}'$ restreint à $\mathbf{T}^2\times\ell$ est un feuilletage sans feuille compacte. Ce feuilletage correspond donc à un feuilletage presque sans holonomie de $\mathbf{T}^2\times I$ d'après le lemme précédent et il est donc conjugué à un feuilletage $\mathscr{F}([\omega], i)$, d'après la partie I.

Il en résulte que $\mathscr{F}'$ est un feuilletage ayant les propriétés décrites dans l'énoncé. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Lorsque $\mathscr{F}$ est un feuilletage analytique, ce théorème est précisé par le corollaire suivant (on trouvera dans [9] la définition du tourbillonnement de Reeb) :

Corollaire. — Un feuilletage $\mathscr{F}$ analytique, transversalement orientable, du tore $\mathbf{T}^3=\mathbf{T}^2\times\mathbf{S}^1$, sans composante de Reeb, est topologiquement conjugué à un feuilletage analytique défini par une forme

$$\Omega = \psi(r)dr + \varphi(r)\omega$$

où $r \in \mathbf{S}^1$, ω *est une forme linéaire de* $\mathbf{T}^2$ *et* ψ, φ *sont des applications analytiques de* $\mathbf{S}^1$ *dans* $\mathbf{R}$ *sans zéro commun. Si* $\mathcal{F}$ *est sans feuille compacte, ou sans feuille non compacte, on peut choisir* ψ *et* φ *constants.*

Enfin un feuilletage analytique quelconque est topologiquement conjugué à l'un des feuilletages précédents modifié par un nombre fini de tourbillonnements de Reeb.

Remarque. — Un feuilletage défini par une forme Ω comme dans l'énoncé peut se construire de la façon suivante : on considère le feuilletage analytique f de $\mathbf{T}^2$ défini par la forme $\tau = \psi(r)dr + \varphi(r)d\theta$, $(r, \theta) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 = \mathbf{T}^2$ et l'on prend le quotient du feuilletage $f \times [0, 1]$ de $\mathbf{T}^2 \times [0, 1]$ défini par une identification de $\mathbf{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathbf{T}^2 \times \{1\}$ par une rotation du facteur θ.

On a naturellement un résultat analogue sur $\mathbf{T}^2 \times \mathrm{I}$. Avant d'aborder la démonstration de ce corollaire, précisons un résultat, établi par S. P. Novikov dans [6], sous la forme du lemme suivant :

Lemme. — *Soit* $\Phi : \mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1 \to \mathrm{C} \subset \mathrm{V}^3$ *une composante de Reeb d'un feuilletage analytique, transversalement orientable, d'une variété* V^3. *Alors, quel que soit le voisinage* U *de* C *dans* V^3, *il existe un plongement*

$$\Phi_2 : \mathrm{D}_2^2 \times \mathbf{S}^1 \to \mathrm{U} \subset \mathrm{V}^3, \quad \text{où} \quad \mathrm{D}_2^2 = \{x \in \mathbf{R}^2, \, ||x|| \leqslant 2\}$$

et un feuilletage $\mathcal{F}_\mathrm{U}$ *de classe* C^∞ *de* V^3 *tels que* :

(i) U *est un voisinage de* $\mathrm{C}_2 = \Phi(\mathrm{D}_2^2 \times \mathbf{S}^1)$, $\partial \mathrm{C}_2$ *est transverse à* $\mathcal{F}$ *et* Φ *est la restriction de* Φ_2 *à* $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$.

(ii) $\mathcal{F}_\mathrm{U}$ *et* $\mathcal{F}$ *coïncident sur* $\mathrm{V}^3 - \mathrm{int}\, \mathrm{C}_2$.

(iii) *L'image réciproque de* $\mathcal{F}_\mathrm{U}$ *par* Φ_2 *est le feuilletage trivial de* $\mathrm{D}_2^2 \times \mathbf{S}^1$.

Ainsi le feuilletage $\mathcal{F}$ se déduit de $\mathcal{F}_\mathrm{U}$ par un tourbillonnement de Reeb autour du lacet $\Phi(\{0\} \times \mathbf{S}^1)$. Si un couple $(\Phi_2', \mathcal{F}_\mathrm{U}')$ satisfait aux propriétés (i), (ii), (iii), dès que U est suffisamment petit, $\mathcal{F}_\mathrm{U}'$ et $\mathcal{F}_\mathrm{U}$ sont topologiquement conjugués.

Démonstration. — Désignons par $\partial_1 \mathrm{C}$ la face de $\partial \mathrm{C}$ qui correspond à l'intérieur de C et par $\partial_2 \mathrm{C}$ l'autre face. Soit $\varphi_i : \pi_1(\mathrm{C}) \to \mathrm{Diff}_0^\omega(\mathbf{R}^+)$ un homomorphisme d'holonomie de $\partial \mathrm{C}_i$ $(i = 1, 2)$. Un élément de $\pi_1(\mathrm{C})$ représentable par un méridien de $\partial \mathrm{C}$ appartient au noyau de φ_1. $\mathcal{F}$ étant analytique, son image par φ_2 est aussi le germe de l'application identique.

Soit alors

$$\Phi : \mathrm{D}_2^2 \times \mathbf{S}^1 \to \mathrm{U} \subset \mathrm{V}^3$$

un plongement qui vérifie la propriété (i). D'après le lemme 4, on peut le choisir de telle façon que l'intersection d'une feuille de $\mathcal{F}$ avec $\partial \mathrm{C}_2$ soit une réunion de méridiens $\Phi_2(\partial \mathrm{D}_2^2 \times \{\theta\})$ où $\theta \in \mathbf{S}^1$. Le feuilletage $\mathcal{F}_\mathrm{U}$ qui satisfait aux propriétés (ii) et (iii) est obtenu en recollant à $\mathcal{F}' \,|\, (\mathrm{V}^3 - \mathrm{int}\, \mathrm{C}_2)$ l'image par Φ_2 du feuilletage produit de $\mathrm{D}_2^2 \times \mathbf{S}^1$.

Démonstration du corollaire. — Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage analytique de $\mathbf{T}^3$. Si $\mathscr{F}$ possède au moins une composante de Reeb Γ, alors ce feuilletage ne contient qu'un nombre fini de feuilles compactes. Le lemme précédent permet d'effacer la composante de Reeb Γ. Le feuilletage $\mathscr{F}_1$ obtenu est un feuilletage $\mathscr{C}^\infty$ de type analytique (les germes d'holonomie en tout point sont de type analytique). De plus, le feuilletage $\mathscr{F}_1$ ne contient pas de composante de Reeb ou bien possède un nombre fini de feuilles compactes, strictement plus petit que celui de $\mathscr{F}$. Il en résulte que par un nombre fini de tels effacements, on obtient un feuilletage $\mathscr{F}'$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de type analytique, ne possédant plus de composante de Reeb.

On peut appliquer le théorème 2 au feuilletage $\mathscr{F}'$. Ce feuilletage est topologiquement isotope à un feuilletage linéaire ou bien est $\mathscr{C}^\infty$-conjugué à un feuilletage $\mathscr{F}''$ de $\mathbf{T}^3=\mathbf{T}^2\times\mathbf{S}^1$ dont les feuilles compactes sont les tores $\mathbf{T}^2\times\{r\}$ pour $r\in F$, fermé non vide de $\mathbf{S}^1$. Si $F=\mathbf{S}^1$, $\mathscr{F}''$ est défini par la forme $\Omega=dr$.

Si $F\neq\mathbf{S}^1$, le feuilletage $\mathscr{F}''$, étant comme $\mathscr{F}'$ de type analytique, ne possède qu'un nombre fini de feuilles compactes. Soit $L=\mathbf{T}^2\times\{r\}$, pour un certain $r\in F$, l'une de ces feuilles compactes et désignons par U_1 et U_2 les composantes connexes adjacentes à $r\in F$. Comme $\mathscr{F}''$ est de type analytique, il résulte de la remarque 2 de la partie I que

$$\delta(L_1, [\mathscr{F}''])=\pm\delta(L_2, [\mathscr{F}'']) \quad (L_1 \text{ et } L_2 \text{ étant les faces de } L).$$

Si $\mathscr{F}([\omega_1], i_1)$ et $\mathscr{F}([\omega_2], i_2)$ sont les feuilletages associés aux régions $\mathbf{T}^2\times U_1$ et $\mathbf{T}^2\times U_2$, comme dans le théorème 2, il suit alors du lemme 4 de la partie I, que

$$[\omega_1]=[\omega_2].$$

L'ouvert $U=\mathbf{S}^1-F$ ne contenant qu'un nombre fini de composantes connexes, on peut trouver ω, φ et ψ comme dans l'énoncé, tels que $\mathscr{F}''$ soit conjugué relativement à $\mathbf{T}^2\times F$ au feuilletage défini par une forme d'équation :

$$\Omega=\psi(r)dr+\varphi(r)\omega.$$

Ceci achève la démonstration du corollaire.

III. — COBORDISMES ENTRE FEUILLETAGES DE $\mathbf{T}^2$

Nous désignerons par $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et $\mathscr{F}^\omega(\mathbf{T}^2)$ l'ensemble des feuilletages orientables du tore $\mathbf{T}^2$, respectivement de classe r et analytiques réels. Un feuilletage orientable de $\mathbf{T}^2$ n'est rien d'autre qu'un champ de droites orientable sur $\mathbf{T}^2$. On supposera $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ muni de la $\mathscr{C}^r$-topologie de la convergence uniforme des champs de droites.

Dans la partie II, nous avons obtenu une classification des feuilletages différentiables du tore $\mathbf{T}^3$, dans l'hypothèse où ces feuilletages ne contenaient pas de composantes de Reeb. De même ici, nous ne pouvons obtenir des résultats significatifs pour la relation de cobordisme entre feuilletages différentiables qu'en excluant l'existence de composantes de Reeb dans le feuilletage cobordant :

Définition 1. — Deux feuilletages f_0 et f_1 de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ sont R-$\mathscr{C}^r$*-cobordants, s'il existe un $\mathscr{C}^r$-feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{T}^2 \times [0, 1]$, orientable, cobordant f_0 et f_1 et ne possédant pas de composantes de Reeb dans l'intérieur de $\mathbf{T}^2 \times [0, 1]$.*

On doit noter que la relation de R-cobordisme n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive en général :

Si $\mathscr{F}_0$ est un R-cobordisme entre f_0 et f_1 et $\mathscr{F}_1$ un R-cobordisme entre f_1 et f_2, le cobordisme somme $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ entre f_0 et f_2 peut très bien contenir des composantes de Reeb. Cependant, ces composantes de Reeb de $\mathscr{F}$ doivent avoir une intersection non vide et transverse avec le tore intermédiaire portant le feuilletage f_1 et y induire des composantes de Reeb (de dimension 2). Remarquons que si Γ est une telle composante de f_1, les groupes d'holonomie de f_1 relatifs à chaque composante de $\partial\Gamma$ doivent être conjugués, car les deux composantes de $\partial\Gamma$ appartiennent à une même feuille torique de $\mathscr{F}$. Ceci nous conduit à introduire la définition suivante :

Définition 2. — Une composante de Reeb Γ d'un feuilletage f de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ est dite $\mathscr{C}^r$-symétrique s'il existe une $\mathscr{C}^r$-conjugaison entre les groupes d'holonomie de f relatifs aux deux composantes connexes de $\partial\Gamma$.

Pour en revenir au cobordisme $\mathscr{F}$, nous voyons donc que si f_1 ne possède pas de composante de Reeb symétrique, le cobordisme en question est un R-cobordisme. Autrement dit, la relation de R-cobordisme est une relation d'équivalence, si on la limite par exemple aux feuilletages de $\mathbf{T}^2$ sans composante de Reeb symétrique.

Deux feuilletages f_0 et f_1, $\mathscr{C}^r$-isotopes, sont évidemment $\mathscr{C}^r$-cobordants : si $h : \mathbf{T}^2\times[0, 1]\to\mathbf{T}^2$ est une $\mathscr{C}^r$-isotopie entre f_0 et f_1 on peut définir un feuilletage $\mathscr{F}$ cobordant f_0 et f_1 par :

$$\mathscr{F}_{|\mathbf{T}^2\times\{t\}} = h_t(f_0)\times\{t\} \quad \text{pour tout} \quad t\in[0, 1].$$

Si maintenant f_0 et f_1 sont deux feuilletages de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$, non $\mathscr{C}^r$-isotopes, on peut essayer de rechercher entre eux un cobordisme moins élémentaire, contenant par exemple des feuilles compactes de la forme $\mathbf{T}^2\times\{t\}$ pour $0<t<1$. Nous avons vu dans l'Introduction que l'on pouvait ainsi définir un cobordisme entre deux feuilletages définis par des formes fermées. Ceci nous conduit à introduire la définition suivante :

Définition 3. — Un feuilletage f de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ admet un $\mathscr{C}^s$-prolongement, $1\leqslant s\leqslant r$, s'il existe un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{T}^2\times[0, 1]$ tel que :

— $\mathscr{F}$ soit transverse à $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ avec $\mathscr{F}_{|\mathbf{T}^2\times\{0\}} = f\times\{0\}$.

— $\mathscr{F}$ soit tangent à $\mathbf{T}^2\times\{1\}$ et que $\mathbf{T}^2\times\{1\}$ soit l'unique feuille compacte de $\mathscr{F}$.

En fait, très peu de feuilletages f possèdent un tel prolongement, comme le montre le lemme suivant :

Lemme 1. — Si un feuilletage f de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$, avec $r\geqslant 2$, possède un $\mathscr{C}^r$-prolongement, alors f est un feuilletage sans holonomie.

Démonstration. — Supposons que f possède un prolongement $\mathscr{F}$ dans $\mathbf{T}^2\times[0, 1]$. Le double $\tilde{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$, construit le long de $\mathbf{T}^2\times\{0\}$, est un feuilletage de $\mathbf{T}^2\times\mathbf{I}$, tangent au bord, de classe $r\geqslant 2$, et sans feuille compacte dans l'intérieur de $\mathbf{T}^2\times\mathbf{I}$. Un tel feuilletage est presque sans holonomie, d'après le théorème 2, et sa trace $f\times\{0\}$ sur $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ est donc un feuilletage sans holonomie.

Remarques :

1) Si un feuilletage sans holonomie possède des prolongements, il suit du théorème 1 qu'il n'existe que deux classes d'isotopie de tels prolongements, ces deux classes étant d'ailleurs conjuguées.

2) Il est facile de voir que tout feuilletage sans holonomie possède des prolongements topologiques. Par contre il semble peu probable qu'un feuilletage f sans holonomie, de classe $r\geqslant 1$, soit $\mathscr{C}^r$-prolongeable en général. Il suffit pour cela que le feuilletage f soit défini par une $\mathscr{C}^r$-forme fermée. On peut donc raisonnablement formuler la conjecture suivante : un feuilletage de $\mathbf{T}^2$ est $\mathscr{C}^r$-prolongeable si et seulement s'il peut être défini par une forme fermée de classe r. G. Joubert et R. Moussu ont montré que cette conjecture est vraie.

Nous désignerons par M^r et M^ω les sous-espaces de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ et $\mathscr{F}^\omega(\mathbf{T}^2)$ formés par les feuilletages ne contenant pas de composante de Reeb $\mathscr{C}^r$ (resp. $\mathscr{C}^\omega$) symétrique et n'étant pas partout d'holonomie triviale.

Une conséquence du lemme 1 est que la construction suggérée plus haut ne permet pas de construire des R-cobordismes entre feuilletages de M^r. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Lemme 2. — Si $\mathscr{F}$ est un R*-cobordisme défini dans $\mathbf{T}^2\times[0,1]$ entre un feuilletage f_0 de M^r et un feuilletage f_1 de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$, avec $r\geqslant 2$, alors l'intérieur de $\mathbf{T}^2\times[0,1]$ ne contient pas de feuille compacte de $\mathscr{F}$.*

Démonstration. — Désignons $\mathbf{T}^2\times[0,1]$ par V. Le feuilletage $\mathscr{F}$ ne contenant pas de composante de Reeb, il suit du théorème de Novikov que l'inclusion de chaque feuille dans V induit une injection sur les groupes fondamentaux (voir [12] par exemple). Chaque éventuelle feuille compacte de $\mathscr{F}$ contenue dans int V est donc difféomorphe au tore $\mathbf{T}^2$. Désignons par Σ l'ensemble de ces feuilles et supposons que $\Sigma\neq\emptyset$. Tout d'abord, remarquons que chaque feuille τ appartenant à Σ est parallèle à $T_0=\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et $T_1=\mathbf{T}^2\times\{1\}$, c'est-à-dire qu'elle sépare V en deux cobordismes triviaux. Ceci peut être déduit de [12] très simplement par l'artifice suivant : on considère le feuilletage auxiliaire $\mathscr{F}_0$ de V dont les feuilles sont les tores $\mathbf{T}^2\times\{t\}$ pour $t\in[0,1]$; l'inclusion de τ dans V induisant une injection des groupes fondamentaux, il existe une isotopie de τ dans int V amenant τ sur un tore τ' qui, soit est une feuille de $\mathscr{F}_0$, soit est transverse à $\mathscr{F}_0$. Mais ce dernier cas est exclu : il signifierait que la restriction de la hauteur $t\in[0,1]$ à τ serait une fonction non singulière.

On peut donc associer à chaque feuille τ de Σ le cobordisme trivial V_τ entre τ et $\mathbf{T}^2\times\{1\}$, ce qui permet de munir Σ d'un ordre total par :

$$\tau\leqslant\tau' \Leftrightarrow V_\tau\subseteq V_{\tau'}.$$

Comme Σ est supposé non vide, il est clairement inductif et possède un élément maximal unique τ_0. Soient V′ le cobordisme trivial entre $T_0=\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et τ_0, et $\mathscr{F}'$ la restriction de $\mathscr{F}$ à V′. Nous affirmons que $\mathscr{F}'$ est un prolongement de f_0. Supposons au contraire que $\mathscr{F}'$ contienne une feuille compacte $L\neq\tau_0$; cette feuille doit couper T_0 en raison de la maximalité de τ_0 : autrement dit, $\partial L\neq\emptyset$ et $\partial L\subset T_0$. Comme $\pi_1(L)$ est un sous-groupe de $\pi_1(V')\simeq\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, L est difféomorphe à $\mathbf{S}^1\times[0,1]$. Soient $\tilde{V}'$ le double de V′ le long de T_0 et $\tilde{\mathscr{F}}'$ le double de $\mathscr{F}'$. Le double $\tilde{L}$ de L est une feuille torique de $\tilde{\mathscr{F}}'$ et il est facile de vérifier que son inclusion dans V′ induit un homomorphisme non injectif du groupe fondamental. Il s'ensuit que $\tilde{\mathscr{F}}'$ contient des composantes de Reeb et que f_0 contient des composantes de Reeb symétriques, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $\mathscr{F}'$ est un prolongement de f_0, et f_0 est sans holonomie, ce qui est également exclu par hypothèse. Il en résulte que $\Sigma=\emptyset$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat le plus important, à savoir qu'il n'existe pas d'autres R-cobordismes entre feuilletages de M^r que les cobordismes triviaux dérivant des isotopies entre feuilletages :

Théorème 3. — Restreinte à M^r, pour $r\geqslant 2$, la relation de R*-$\mathscr{C}^r$-cobordisme coïncide avec la relation de $\mathscr{C}^r$-isotopie. Plus précisément, si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{C}^r$-feuilletage de $\mathbf{T}^2\times[0,1]$, sans*

composante de Reeb, cobordant deux feuilletages f_0 et f_1 de M^r, alors le feuilletage $\mathscr{F}$ est $\mathscr{C}^r$-isotope rel. $\mathbf{T}^2\times\{0\}$ au feuilletage produit $f_0\times[0, 1]$.

Démonstration. — Désignons $\mathbf{T}^2\times[0, 1]$ par V et soit $\mathscr{F}$ un R-$\mathscr{C}^r$-cobordisme entre deux feuilletages f_0 et f_1 de M^r. Montrons tout d'abord que toute feuille de $\mathscr{F}$ est difféomorphe à $\mathbf{S}^1\times[0, 1]$ resp. à $\mathbf{R}\times[0, 1]$ avec $(\mathbf{S}^1 \text{ resp. } \mathbf{R})\times\{0\}\subset T_0=\mathbf{T}^2\times\{0\}$ et $(\mathbf{S}^1 \text{ resp. } \mathbf{R})\times\{1\}\subset T_1=\mathbf{T}^2\times\{1\}$. Puisque le groupe fondamental de chaque feuille est un sous-groupe de $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ et qu'il n'existe pas de feuilles difféomorphes à $\mathbf{T}^2$ d'après le lemme 2, les feuilles de $\mathscr{F}$ pourraient être également difféomorphes à $\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}$. Nous allons voir que ceci est impossible. En effet, si L est une telle feuille, son ensemble limite $D(L)=\bigcap_K(\overline{L-K})$, avec K compact quelconque de L, est nécessairement contenu dans int V puisque $\mathscr{F}$ est transverse à ∂V. Cet ensemble D(L) contient un ensemble minimal $M\subset$ int V. Mais $\mathscr{F}$ étant de classe $\geqslant 2$, sans composante de Reeb, et $\pi_1(V)$ étant abélien, il suit de [5] que M est nécessairement une feuille compacte, ce qui est exclu par le lemme 2. Soit maintenant une feuille L difféomorphe à $(\mathbf{S}^1 \text{ resp. } \mathbf{R})\times[0, 1]$ et supposons par exemple que $\partial L\subset T_0$. Un raisonnement développé dans la démonstration du lemme 2 montre que f_0 contient alors des composantes de Reeb symétriques, ce qui est exclu par hypothèse.

Nous allons construire l'isotopie cherchée par étapes successives. Tout d'abord, les feuilles compactes de $\mathscr{F}$, étant toutes difféomorphes à $\mathbf{S}^1\times[0, 1]$, avec $\mathbf{S}^1\times\{0\}\subset T_0$ et $\mathbf{S}^1\times\{1\}\subset T_1$, sont manifestement deux à deux parallèles et il est possible de trouver une première $\mathscr{C}^r$-isotopie rel. T_0, transformant $\mathscr{F}$ en un feuilletage dont les feuilles compactes sont les cylindres $\gamma\times[0, 1]$, où γ est une feuille compacte quelconque de f_0. Désignons par $r_0, \ldots, r_\ell$ les composantes de Reeb éventuelles de f_0 et par $r_{\ell+1}, \ldots, r_{\ell+t}$ les composantes connexes de $\mathbf{T}^2-\bigcup_{i=0}^{\ell} r_i$.

L'isotopie cherchée sera la composition d'isotopies φ_i, $0\leqslant i\leqslant\ell+t$, où φ_i est une isotopie de V rel. $(\mathbf{T}^2\times\{0\})\cup((\overline{\mathbf{T}^2-r_i})\times[0, 1])$, transformant $\mathscr{F}_{|r_i\times[0,1]}$ dans le feuilletage $f_{0|r_i}\times[0, 1]$. Ces isotopies φ_i sont définies de la façon suivante :

— Si $0\leqslant i\leqslant\ell$, le feuilletage $\mathscr{F}'_{|r_i\times[0,1]}$ est un feuilletage sans feuille compacte dans l'intérieur de $r_i\times[0, 1]$. L'isotopie $\varphi_{i|r_i\times[0,1]}$ résulte alors immédiatement des théorèmes 1 et 2 par passage au double le long de $r_i\times\{0\}$ et $r_i\times\{1\}$.

— Si $\ell+1<i<\ell+t$, il est possible de trouver un chemin γ plongé dans r_i, transverse à f_0 et dont chaque extrémité appartient à une composante différente de ∂r_i (ou bien un cercle γ plongé transverse à f_0 si $r_i=T_0$). Le feuilletage $\mathscr{F}'_{|r_i\times[0,1]}$ peut être rendu transverse à $\gamma\times[0, 1]$ par une isotopie φ'_i de $r_i\times[0, 1]$ rel. $(r_i\times\{0\})\cup(\partial r_i\times[0, 1])$ en utilisant les résultats de [12]. Enfin le théorème de stabilité permet de construire une dernière isotopie φ''_i transformant le feuilletage $\varphi'_i(\mathscr{F}')$ dans le feuilletage $f_{0|r_i}\times[0, 1]$. On pose alors $\varphi_{i|r_i\times[0,1]}=\varphi''_i\circ\varphi'_i$.

Si $\mathscr{F}$ est un cobordisme analytique, on peut effacer ses composantes de Reeb, ce qui a pour effet de le transformer en un $\mathscr{C}^\infty$-R-cobordisme. Le théorème précédent a donc le corollaire suivant, concernant les cobordismes analytiques :

Corollaire 1. — Deux feuilletages analytiques de M^ω, *$\mathscr{C}^\omega$-cobordants, sont également $\mathscr{C}^\infty$-isotopes.*

Le théorème 5 montre également que très peu de feuilletages sont R-cobordants. Si l'on désigne par $N^r \subset \mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)\times\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ l'ensemble des couples de feuilletages $\mathscr{C}^r$-R-cobordants, on a le résultat suivant :

Corollaire 2. — L'ensemble N^r, *pour* $r\geqslant 2$, *des couples de feuilletages* R-*cobordants de* $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$, *n'est nulle part dense dans* $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)\times\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ *lorsqu'on munit chaque facteur de la $\mathscr{C}^r$-topologie uniforme.*

Démonstration. — Pour démontrer le corollaire, il suffit d'exhiber un sous-ensemble V^r de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)\times\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ ouvert et dense, contenu dans le complémentaire de N^r. Considérons par exemple l'ensemble V^r formé des couples de feuilletages (f_1,f_2) de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ tels que :

(i) Les feuilletages f_0 et f_1 ne contiennent qu'un nombre fini, non nul, de feuilles compactes simples au sens de [7]. (C'est-à-dire que le générateur du groupe d'holonomie de chaque feuille compacte γ a une partie linéaire λ_γ différente de 0 et de 1.)

(ii) Les nombres λ_γ définis ci-dessus pour chaque feuille compacte de f_0 et f_1 sont deux à deux distincts.

Dans [7], M. Peixoto a montré que l'ensemble des feuilletages vérifiant la condition (i) forment un ouvert dense de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$ pour la $\mathscr{C}^r$-topologie. Il en résulte immédiatement que l'ensemble V^r est un ouvert dense de $\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)\times\mathscr{F}^r(\mathbf{T}^2)$. D'autre part, si $(f_0,f_1)\in V^r$, f_0 et f_1 appartiennent en particulier à M^r et ne sont cobordants que s'ils sont $\mathscr{C}^r$-isotopes d'après le théorème 3. La condition (ii) exclut justement cette possibilité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DENJOY, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *Journal de Math.* (9), vol. **11** (1932).

[2] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann. Ec. norm. Sup. Pisa*, série 2, **16** (1962), 367-397.

[3] A. HAEFLIGER, Feuilletages sur les variétés ouvertes, *Topology*, vol. **9** (1970), 183-194.

[4] R. MOUSSU, *Sur les feuilletages de codimension 1*, thèse, Orsay, 1971.

[5] R. MOUSSU et R. ROUSSARIE, Une condition suffisante pour qu'un feuilletage soit sans holonomie, *C. R. Acad. Sci.*, vol. **271** (1970), série A, 240-243.

[6] S. P. NOVIKOV, Topology of foliations, *Trudy Mosc. Math. Obsch.*, vol. **14** (1965), 248-278.

[7] M. PEIXOTO, Structural stability on two dimensional manifolds, *Topology*, vol. **1** (1962), 101-120.

[8] A. PHILLIPS, Smooth maps transverse to a foliation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. **76** (1970), 792-797.

[9] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Actual. Scient. Ind.*, n° 1183 (1952).

[10] H. ROSENBERG et G. CHATELET, Un théorème de conjugaison des feuilletages, *Ann. Inst. Fourier*, vol. **21**, fasc. 3 (1971), 95-106.

[11] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, Reeb Foliations, *Annals of Math.*, vol. **91** (1970), 1-24.

[12] R. ROUSSARIE, Plongements dans les variétés feuilletées et classifications des feuilletages sans holonomie, *Publ. math. I.H.E.S.*, n° **43** (1973), 101-141.

[13] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudo-groups, *Amer. Journ. of Math.*, vol. **87** (1969), 79-102.

[14] STERNBERG, Local C^n transformations of the real line, *Duke Math. J.*, vol. **24** (1957), 97-102.

[15] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds, *Topology*, vol. **9** (1970), 153-154.

Avril 1971
Département de Mathématiques
Université de Dijon
21000-Dijon

Manuscrit reçu le 1er octobre 1972.